

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen.*

II. *Torsionsmodul, Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation und kubische Kompressibilität;* *von E. Grüneisen.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: *Einleitung.* — 5. *Torsionsmodul.* § 22. Schwingungsmethode. — 6. *Querkontraktionsmessungen.* § 23. Allgemeiner Plan. § 24. Beschreibung des Apparates. § 25. Aufhängung des Apparates. § 26. Einfluß der Stabbiegungen. § 27. Elimination anderer Fehlerquellen. § 28. Versuchsergebnis für die harten Stäbe. § 29. Versuchsergebnis für die weichen Stäbe aus Kadmium, Zinn, Blei, Wismut. — 7. *Besprechung des Zahlenmaterials.* § 30. Zusammenstellung der Beobachtungen. § 31. Das Verhältnis μ . § 32. Die kubische Kompressibilität. — *Zusammenfassung.*

Einleitung.

Früher¹⁾ hat sich ergeben, daß für einigermaßen homogenes und isotropes Material verschiedene Methoden, statische und dynamische, auf Dehnung und Biegung beruhende, zum gleichen Werte des Elastizitätsmoduls E führen. Die vorliegende Untersuchung²⁾ gilt der zweiten das elastische Verhalten isotropen Materials bestimmenden Konstante, als welche in der Poisson'schen Theorie eine Zahl μ auftritt, die dem Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation bei der Dehnung eines Stabes gleich ist. Sind E und μ bekannt, so würden, wenn das Material die Forderungen der Theorie erfüllte, der Tor-

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 22. p. 801. 1907.

2) Die Numerierung der einzelnen Abschnitte und Tabellen schließt sich an die der früheren Abhandlung an.

sionsmodul T und die Kompressibilität κ gegeben sein durch die Formeln:

$$(1) \quad T = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

$$(2) \quad \kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}.$$

Da sowohl die Messung der Querkontraktion von Stäben, d. h. die unmittelbare Bestimmung von μ , als auch die der Kompressibilität auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen, während der Torsionsmodul sich leicht bestimmen läßt, so wird zumeist Formel (1) als richtig angenommen und μ aus E und T berechnet; κ ergibt sich dann nach Formel (2). Dies Verfahren bedarf entschieden einer kritischen Nachprüfung.

Denn ein Beweis für die Gültigkeit von Formel (1) ist noch nie gegeben worden. Im Gegenteil ist Stromeyer¹⁾ bei seinen Querkontraktionsmessungen zu dem Schluß gelangt, daß die Zahl μ bei direkter Messung anders gefunden wird, als aus Formel (1). Wenn er auch die Möglichkeit ziemlich großer Beobachtungsfehler einräumen muß, so spricht doch andererseits für die Richtigkeit seines Resultates, daß in der vorhandenen Literatur die Werte von μ , welche auf Torsionsmessungen und also auf der Annahme von Formel (1) beruhen, für dasselbe Metall außerordentlich schwanken, während Methoden, bei denen μ direkt gemessen oder wenigstens aus einer mit Volumänderung verbundenen Deformation abgeleitet wird, besser übereinstimmende Zahlen liefern.

Im folgenden wird Formel (1) dadurch geprüft, daß für 13 Stäbe, deren Elastizitätsmodul E bekannt ist, sowohl T als μ beobachtet werden.

Für den Torsionsmodul ist hier nur die dynamische Methode gewählt worden. Sie dürfte genügen, da die direkte statische Methode sich nahezu der gleichen Deformation bedient, und der Unterschied zwischen $T_{\text{isoth.}}$ und $T_{\text{adiab.}}$ nur gering ist. Zur Ermittlung von μ sind Querkontraktionsmessungen mit einem Interferenzapparat ausgeführt worden, wie dies schon früher von Stromeyer²⁾ und Benton³⁾, allerdings unter An-

1) C. E. Stromeyer, Proc. Roy. Soc. 55. p. 373. 1894.

2) l. c.

3) J. R. Benton, Ann. d. Phys. 3. p. 471. 1900; Phys. Rev. 12. p. 36. 1901.

wendung stärkerer Deformationen, geschehen ist. Mit Spiegelapparaten ist die Querkontraktion von Bauschinger¹⁾ und Morrow²⁾ gemessen worden. Alle die genannten Beobachter haben jedoch ihre Versuche nur auf wenige Metalle ausgedehnt (vgl. Tab. 16).

Zum Schluß ist noch für alle untersuchten Stäbe die kubische Kompressibilität berechnet worden.

5. Torsionsmodul.

§ 22. Schwingungsmethode.

Am einfachsten und zuverlässigsten erhält man den Torsionsmodul von Stäben nach der Schwingungsmethode.

Der Stab wird, in der Mitte von einem Drahring umschlungen, in einen Schraubstock eingeklemmt. Ein Korkring, der an einer Stelle aufgeschlitzt sich leicht über den Stab schiebt und innen mit Kolophonium bestreut ist, erhält durch Fingerdruck so viel Reibung am Stabe, daß bei drehender Bewegung am Stabende der Torsionsgrundton entsteht.

Beim Al, Ir, Rh, Zn, Pb, Bi, Cd, Sn ließ sich der Ton nicht erzeugen oder verklang zu schnell. Bei den anderen untersuchten Stäben waren Schwebungen mit einem nahe gleich gestimmten *longitudinal* schwingenden Vergleichsstabe zu hören. An diesem ließ sich die Tonhöhe nach der Kundtschen Staubfigurenmethode leicht ermitteln, während dies für den schwächeren und rasch verklingenden Torsionston direkt nicht möglich war. Längere Stäbe können jedoch nach Schneebeli Methode³⁾ auch zur direkten Erzeugung von Staubfiguren veranlaßt werden.

Als Vergleichsstäbe dienten vier Messingstangen. Ihre Longitudinaltöne wurden durch allmähliche Kürzung auf die Torsionstöne der zu untersuchenden Stäbe abgestimmt. Da sich das Messing als recht homogen erwies, so genügte es, für einige wenige Längen die absolute Tonhöhe zu ermitteln, im übrigen aber sie aus dem Kürzungsverhältnis der Messingstangen abzuleiten.

Bei dieser Gelegenheit wurden auch noch einige Longi-

1) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur 25. p. 81. 1879.

2) J. Morrow, Phil. Mag. (6) 6. p. 417. 1908.

3) H. Schneebeli, Pogg. Ann. 140. p. 608. 1870.

tudinaltöne mitbestimmt, so von Kupfer IV (= IVa), Gold II und den neu bezogenen Stäben Aluminium I und II¹⁾, Kupfer V und VI.²⁾ Die Analyse der letztgenannten Stäbe, die ich Hrn. Groschuff verdanke, ergab folgendes:

Aluminium I:	1,1 % Si; 0,5 % Fe; 0,05% Cu	El.L.-V. ³⁾ = 35 (4,1‰)
Aluminium II:	1,6 % Si; 0,5 % Fe; 5,7 % Cu	$\times 10^{-4}$ 32 (3,8‰)
Kupfer V:	0,2 % As; 0,04% Fe; 1,0 % Cu	32 (2,2‰)
Kupfer VI:	0,15% As; 0,03% Fe; Spur Ni	53 (3,5‰)

Tabelle 10.

	l cm	s	$n_{tors.}$ Schw./Sek.	$T_{18^{\circ}}$ kg/mm ²	$E_{18^{\circ}}$ kg/mm ²	$\mu_{tors.}$
Aluminium I	50,28	2,71	3120	2717	7120	0,310
Aluminium II	50,06	2,81	3090	2737	7320	0,337
Kupfer IV a	26,18	8,96	4306	4640	12580	0,356
Kupfer V	49,65	8,93	2291	4710	13110	0,391
Kupfer VI	50,21	8,93	2253	4660	13040	0,399
Silber	25,19	10,53	3285	2940	8050	0,369
Gold I	26,99	19,22	2135	2602	7780	0,495
Gold II	27,69	19,21	2168	2822	8100	0,435
Stahl	26,98	7,82	5975	8280	21320	0,287
Konstantan	26,96	8,92	4855	6230	16560	0,329
Manganin	26,94	8,44	4358	4740	12600	0,329
Palladium	26,98	11,96	3832	5210	11470	0,101
Platin II	27,04	21,39	3122	6220	17020	0,368
Rotguß	26,94	8,40	3751	3500	8240	0,177

Tab. 10 gibt das Resultat aller Versuche. Der Torsionsmodul T berechnet sich aus der Schwingungszahl/Sek. n , der Stablänge l und der Materialdichte s nach der Formel

$$T = \frac{4 n^2 l^3 s}{9810} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right].$$

Daneben ist der Modul E gesetzt, teils nach der früheren Tab. 8, teils nach den neuerdings bestimmten Longitudinaltönen. Wo $E_{\text{long.}}$ und $E_{\text{stat.}}$ zugleich bekannt sind, ist dem ersteren Werte hier der Vorzug gegeben, da sowohl bei den

1) Von Basse & Selve, Altena. Warm gewalzt und gezogen.

2) Aus Hedderheim.

3) Das el. Leitvermögen in $[\text{cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}]$ bei 15° und sein Temperaturkoeffizient (in ‰) wurden im Schwachstromlaboratorium der Reichsanstalt bestimmt.

Torsions- wie bei den Longitudinalschwingungen vorwiegend die Elastizität der mittleren Stabteile zur Geltung kommt. Aus E und T berechnet sich schließlich $\mu_{\text{tors.}}$ nach Formel (1). Eine Besprechung des Zahlenmaterials erfolgt später in § 31.

Die geringen Ungleichmäßigkeiten im Durchmesser der Stäbe, welche zu der in § 6 abgeleiteten Korrektur bei den Longitudinaltönen Veranlassung gaben, sind in Tab. 10 unberücksichtigt geblieben. Zwar ergibt sich die entsprechende Korrektur für den Torsionsmodul T doppelt so groß, wie für $E_{\text{long.}}$ (vgl. die δ in Tab. 3), weil die Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie der Torsionsschwingung sich formell nur durch das Auftreten der zweiten Potenz des Querschnittes statt der ersten von den entsprechenden Werten für die Longitudinalschwingung (§ 6) unterscheiden, dennoch würde jene Korrektur hier bedeutungslos sein, da die später bewiesene Ungültigkeit von Formel (1) durch sie nicht aufgehoben wird.

Die neu bestimmten $E_{\text{long.}}$ für die oben genannten sechs Stäbe bedürfen wegen des sehr gleichmäßigen Durchmessers keiner Korrektur. Für Kupfer IV und Gold II stimmen die $E_{\text{long.}}$ (12580 bzw. 8100) wieder gut überein mit den $E_{\text{stat.}}$ (12500 bzw. 8120).

6. Querkontraktionsmessungen.

§ 23. Allgemeiner Plan.

Der Stab wurde ebenso wie für die Dehnungsmessungen (§ 11) aufgehängt und belastet, so daß die Deformationsverhältnisse sicherlich die gleichen waren wie früher. Da es sich bei den Querkontraktionsversuchen um die Messung einer etwa 30 mal kleineren Verschiebung handelte, als bei den Dehnungsversuchen unter gleichen Belastungsverhältnissen, im letzteren Falle aber die Verschiebung oft nur 3 Interferenzringe ($= 0,819 \mu$) betragen hatte, so mußten entweder die Belastungen gesteigert oder die Interferenzmessungen durch Verbindung mit einer Übersetzungsvorrichtung empfindlicher gemacht werden. Ich entschied mich für den zweiten Weg, da ich es für zweckmäßiger hielt, im Bereich kleinster Deformationen zu bleiben, in dem allein es möglich war, auch die

weichsten Metalle zu untersuchen. Eine Steigerung der Belastung, wie sie nötig gewesen wäre, um die Übersetzungsvorrichtung zu vermeiden, hätte außerdem eine völlig neue Montierung des Stabes in der Belastungsvorrichtung erfordert.

Es muß jedoch ohne weiteres zugestanden werden, daß die Beschränkung auf kleine Belastungen unter etwa 30 kg auch Nachteile gehabt hat. Erstens reichte die Übersetzungsvorrichtung trotz einer Vergrößerung der Querkontraktion im Verhältnis 1:10 bzw. 1:12 nicht aus, um die außerordentlich wenig kompressibeln Metalle Rhodium und Iridium in den Bereich der Untersuchung zu ziehen. Zweitens brachte jene Vorrichtung eine erhebliche Komplizierung des Apparates und eine entsprechende Vermehrung der Fehlerquellen mit sich.

Eine ausführliche Beschreibung des Apparates ist an anderer Stelle¹⁾ gegeben. Zur Beurteilung der Messungsergebnisse wird jedoch ein Hinweis auf die wichtigsten Konstruktionsteile und eine Besprechung der Fehlerquellen notwendig sein.

§ 24. Beschreibung des Apparates.

Aus der schematischen Skizze Fig. 1a geht hervor, wie die Wirksamkeit des Apparates im Idealfalle gedacht war. Wir betrachten zunächst den eigentlichen Querkontraktionsapparat

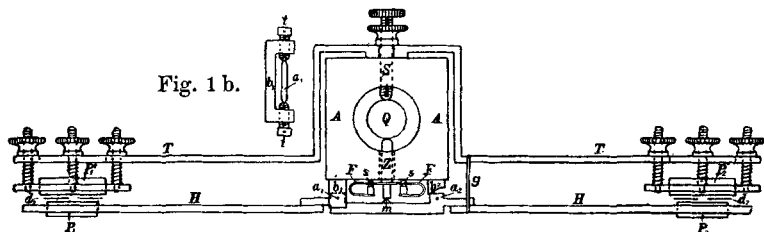


Fig. 1 a.

und sehen davon ab, wie er in seiner richtigen Lage an dem senkrecht zur Zeichnungsebene gedachten Stabe gehalten wird.

Q bezeichnet den Querschnitt, in welchem die beiden Meßkuppen den Stab berühren. Die eine Kuppe bildet das Ende einer Schraube S , die in dem über den Stab geschobenen

1) E. Grüneisen, Zeitschr. f. Instrumentenk. 28. p. 89. 1908.

Aluminiumwürfel A einen festen Halt besitzt. Die andere Kuppe bildet das Ende eines Stahlzylinders Z , der von der Feder F gehalten durch eine zylindrische Bohrung des Würfels A frei hindurchgeht. Da die Enden der Feder an den im Würfel A eingeschraubten Säulchen ss feste Stützpunkte besitzen, so werden die Kuppen mit einer der Durchbiegung von F entsprechenden Kraft gegen den Stab gepreßt und folgen demnach den Veränderungen des Durchmessers. Damit ihre gegenseitige Verschiebung gleich der Änderung des Durchmessers sei, darf sich die Federkraft, mit der die Meßkuppen in die Oberfläche des Stabes eingedrückt werden, während der Querkontraktion nur so wenig ändern, daß die dadurch bedingte Änderung der Eindrückung klein ist gegen die Änderung des Durchmessers. Deshalb ist für die weichen Stäbe eine schwächere Feder F in Anwendung gekommen als für die harten.

Vorausgesetzt, daß die Bewegung des Zylinders Z lediglich eine Verschiebung in Richtung seiner Achse ist, so bleibt nur noch diese Verschiebung relativ zum Würfel A zu messen. Dies geschieht durch Umsetzung der translatorischen Bewegung in die Drehung des Hebelarmes H um eine der beiden Achsen a_1 oder a_2 .

Diese Achsen werden durch beiderseits zugespitzte Stahlzylinder gebildet, deren Lagerung in den Böcken b_1 oder b_2 man aus der Skizze 1b erkennt. Die Stahlspitzen drehen sich in ringförmigen Achatsteinen, die in die Enden der Schrauben tt eingelassen sind. Diese Lagerung hat sich als praktisch reibungslos erwiesen. Jede Reibung hätte sich bei der Messung als toter Gang bemerklich machen müssen.

Mitten zwischen den Achsen und in ihrer Ebene liegt die Stahlspitze m , die durch die leichte Federkraft eines Gummibändchens g gegen die gut polierte Endfläche des Stahlzylinders Z gedrückt wird. Da in Wirklichkeit die Feder F senkrecht zur Zeichnungsebene orientiert war, so konnte der Abstand der Achsen a_1 und a_2 auf 2 cm herabgesetzt werden, der kurze Hebelarm also auf 1 cm.

In rund 11 cm Abstand von der Mittelspitze m beobachtete man die Verschiebung des Hebelarmes gegen die mit dem Würfel A fest verbundenen Arme T mittels Haidingerscher

Interferenzringe. Die Ringe entstehen (§ 9) zwischen den im Hebelarm befestigten planen Glasplatten $P_1 P_2$ einerseits und den im Träger T verstellbar eingesetzten Platten $P_1' P_2'$ andererseits. Die einander zugekehrten Flächen sind durchsichtig versilbert. Für die Schärfe der Ringe ist Parallelismus der gegenüberstehenden Spiegelflächen erforderlich. In unserem Falle drehten sich zwar die Flächen gegeneinander, jedoch in so geringem Betrage, daß das Ringbild während des Belastens die notwendige Schärfe behielt.

Als Ort der gemessenen Ringverschiebung galten die Mittelpunkte der mit dem Hebelarm fest verbundenen Blenden d_1 und d_2 von 5 mm Durchmesser. Die Blenden sind in der Ebene der Achsen $a_1 a_2$ orientiert. Der Abstand der Spitze m von den Blendenmitten beträgt nahezu 11 cm, daher ist das Übersetzungsverhältnis je nach dem benutzten Plattenpaar und je nach der gewählten Achse 10 bzw. 12, z. B. bei Anwendung der Achse a_1 in Bock b_1 am Plattenpaar 1

$$\eta_1 = d_1 a_1 : a_1 m = 10,$$

am Plattenpaar 2

$$\eta_2 = d_2 a_1 : a_1 m = 12.$$

Die genauen Verhältniszahlen wurden auf der Teilmaschine ausgemessen.

Die Schraube S wird je nach dem Durchmesser des zu prüfenden Stabes so weit eingeschraubt, daß der Hebelarm senkrecht zur Richtung des Stabdurchmessers bzw. der Zylinderachse (Z) steht.

Hinsichtlich der Parallelstellung der Platten sei auf die ausführliche Beschreibung verwiesen. Über die Beobachtung der Ringe gilt das bei den Dehnungsversuchen (§ 12) Gesagte. Es wurde auch jetzt die Belastung so gewählt, daß eine ganze Zahl von Ringen am Doppelfaden vorüberwanderte. Entsprechend dem verschiedenen Übersetzungsverhältnis waren also an beiden Plattenpaaren verschiedene Belastungen nötig, um eine bestimmte Ringzahl vorüberwandern zu lassen. Die bei dem eingeschlagenen Verfahren erreichbare Schnelligkeit der Beobachtung war wichtig, weil sie die Störung durch äußere Temperaturänderungen ausschloß. So genügte wieder ein über

den Apparat geschobener Holzkasten mit Glasfenstern als Temperaturschutz gegen außen.

Da die Querkontraktion stets an beiden Plattenpaaren beobachtet werden sollte, war die Einrichtung getroffen, daß Quecksilberlampe und Beobachtungsfernrohr auf fahrbarer Unterlage bequem von einem Plattenpaar zum anderen verschoben werden konnten.

§ 25. Aufhängung des Apparates.

Wir kommen nun zu demjenigen Punkte, der die größten Schwierigkeiten bereitet hat. Der im vorigen beschriebene Apparat muß den mit der Längenänderung des Stabes verbundenen Auf- und Abwärtsbewegungen des untersuchten Querschnittes ohne Widerstand folgen. Dies läßt sich am einfachsten erreichen, wenn die Meßkuppen die einzigen Berührungsstellen zwischen Apparat und Stab bilden. Da ihre Reibung am Stabe aber nicht ausreicht, um das Apparatgewicht zu tragen, so mußte noch eine besondere Entlastung der Kuppen vorgesehen werden, deren Einrichtung hier wieder nur im Prinzip angedeutet werden möge.

Der Apparat ist mit vier zu den oberen Ecken des Würfels *A* führenden, in ihrer Länge verstellbaren Kettchen am kurzen Arm einer ungleicharmigen Wage aufgehängt und durch ein am langen Arm sitzendes Gegengewicht im indifferenten Gleichgewicht gehalten, indem die Angriffspunkte des Apparatgewichtes und Gegengewichtes mit der Drehachse des Wagebalkens in eine Ebene gebracht sind. So werden die Meßkuppen einerseits entlastet, andererseits genügt ihre Reibung am Stabe, um den Apparat bei einer Auf- und Abwärtsbewegung des untersuchten Querschnittes mitzuführen. Die durch Spitzenlager gebildete Drehachse des Wagebalkens ist mit dem oberen Teile des Stabes starr verbunden, wodurch dessen erschütterungsfreie Aufhängung auch dem Apparate selbst zugute kommt.

Der Apparat hat infolge der Aufhängung Bewegungsfreiheit in vertikaler Richtung. Die Verstellbarkeit der Kettchen dient dazu, den Würfel *A* so am Stabe zu justieren, daß die gemeinsame Achse der Schraube *S* und des Zylinders *Z* senkrecht zum Stabe zu liegen kommt. Die richtige Einstellung

wird durch eine besondere Vorrichtung, auf die ich hier nicht eingehen will, gewährleistet.

§ 26. Einfluß der Stabbiegungen.

Die beschriebene Aufhängevorrichtung erfüllt ihren Zweck insofern gut, als der Apparat einem Heben und Senken des Querschnittes ohne Widerstand folgt. Nun treten aber, wie sich bei den Dehnungsmessungen herausstellte, erhebliche Biegungen des Stabes auf, infolge deren der untersuchte Querschnitt sich gegen den oberen Teil des Stabes dreht, und damit auch gegen den daran hängenden Querkontraktionsapparat selbst. Dadurch wird das Zylinderchen *Z* zwangsweise in vertikaler Ebene gedreht, denn seine Führung läßt eine kleine Drehung verhältnismäßig leicht zu, obwohl bei der endgültigen Apparatform der Zylinder von *zwei* an seinen Enden sitzenden Federn gehalten wird.¹⁾ Die Drehung des Zylinders hat aber zur Folge, daß die auf seiner Endfläche aufliegende Spitze *m* je nach der Auflagerstelle und je nach dem Drehungssinn des Zylinders sich dem Stabe nähert oder von ihm entfernt. Dadurch wird die Querkontraktion zu klein oder zu groß gefunden werden.

Zur Elimination dieses Fehlers gibt es zwei Mittel. Einmal wird er unmerklich klein, wenn die Spitze *m* und der Berührungspunkt zwischen Zylinder und Stab auf dem gleichen Radius des Querschnittes *Q* liegen. Sofern man dies aber nicht gewährleisten kann, muß man zum zweiten Mittel greifen und durch eine halbe Umdrehung des Stabes um seine Achse innerhalb des Apparates die Stabbiegung, die Zylinderdrehung und damit auch den Fehler umgekehrt wirken lassen.

So wurde z. B. beim Silberstabe für irgend einen Durchmesser die Verkürzung im Mittel zu $2,056 \cdot 10^{-2} \frac{1}{2} \lambda / \text{kg}$ gefunden. Als die Spitze *m* um 0,37 mm gesenkt war, ergab sich 2,170. Nachdem der Stab innerhalb des Apparates um 180° gedreht war, fand sich in der ersten Höhe der Spitze *m* 1,890, nach der Senkung 1,782. Der Effekt hatte sich also in der Tat umgekehrt. Mittelt man die zusammengehörigen Beobachtungen, so folgt für die Durchmesseränderung

1) Vgl. die Beschreibung in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde.

vor der Senkung von m	nach der Senkung von m
2,056	2,170
1,890	1,782
<hr/> 1,973 · 10 ⁻² $\frac{1}{2}$ λ /kg	<hr/> 1,976 · 10 ⁻² $\frac{1}{2}$ λ /kg.

Der Einfluß der Zylinderdrehung fällt also heraus, wenn für jeden Durchmesser zwei Beobachtungen mit entgegengesetzter Ansatzrichtung des Apparates kombiniert werden. Die Ausführung dieser Doppelbeobachtungen neben sorgfältiger Justierung der Spitze m in der Achse des Zylinders Z wird meiner Meinung nach den besprochenen Fehler bei den folgenden Messungen hinreichend eliminiert haben.

§ 27. Elimination anderer Fehlerquellen.

Ein ebenso unerwarteter Fehler, wie der soeben besprochene, offenbarte sich darin, daß die Beobachtungen an beiden Plattenpaaren nach Umrechnung mit den bekannten Übersetzungsverhältnissen η_1 und η_2 nicht zum gleichen Werte der Querkontraktion führten. Es zeigte sich, daß bei Belastung des Stabes eine Bewegung der Plattenarme TT gegen die benutzten Achsenlager der Böcke b_1 und b_2 eintrat, obwohl zwischen ihnen eine starre Verbindung beabsichtigt war. Da jene Bewegung im wesentlichen aus einer Parallelverschiebung (= ν Ringe) bestand, so erschienen die einer Belastung π entsprechenden beiderseitigen Ringverschiebungen ν_1 und ν_2 um $+\nu'$ und $-\nu'$ gefälscht. Aus

$$\nu_1 + \nu' = \eta_1 \Delta d,$$

$$\nu_2 - \nu' = \eta_2 \Delta d$$

ergibt sich die wahre Durchmesseränderung für 1 kg Belastung

$$(3) \quad \frac{\Delta d}{\pi} = \frac{1}{\eta_1 + \eta_2} \left[\left(\frac{\nu}{\pi} \right)_1 + \left(\frac{\nu}{\pi} \right)_2 \right].$$

Das auffallendste Beispiel für den Einfluß und die Elimination von ν' gibt der *Stahlstab*. Die Zahlen von Tab. 11 (Zeile 1 und 2) geben die scheinbaren, durch ν' gefälschten Durchmesseränderungen. Die nach Formel (3) berechneten Zahlen der dritten Zeile, die sich auch in Tab. 12 finden, geben die wahren Werte und stimmen gut überein, obwohl sie für verschiedene, durch die Pfeile im Tabellenkopf angedeutete Ansatzrichtungen des Apparates gelten. Außerdem beziehen sich die Spalten 1—4 und 5—8 auf verschiedene Querschnitte.

Tabelle 11.

Durchmesseränderung des Stahlstabes in $10^{-5} \frac{1}{2} \lambda / \text{kg.}$

	Querschnitt 1				Querschnitt 2			
	1 →	2 ←	3 ↑	4 ↓	5 →	6 ←	7 ↑	8 ↓
Plattenpaar 1, $\frac{1}{b_1} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)_1 =$	386	427	385	425	377	448	393	427
„ 2, $\frac{1}{b_2} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)_2 =$	406	360	405	358	409	341	402	365
$\frac{1}{b_1 + b_2} \left[\left(\frac{\nu}{\pi} \right)_1 + \left(\frac{\nu}{\pi} \right)_2 \right] =$	395	396	395	395	392	399	397	399

Schließlich ist noch eine dritte Fehlerquelle zu erwähnen.

Bei allen Versuchen wurde mit Achslager 2 im Mittel eine größere Kontraktion des Durchmessers erhalten, als mit Achslager 1 (Tab. 12). Der Unterschied betrug in der Regel etwa 1,3 Proz., beim Nickel und Eisen I stieg er auf 2—3 Proz.

Die völlige Regelmäßigkeit der Erscheinung bei allen vier Kombinationen der Achsen und Achslager deutet darauf hin, daß die soeben besprochene Verschiebung des Plattenträgers *TT* gegen die Achslagerebene keine reine Parallelverschiebung ist, sondern von einer Drehung begleitet wird. Wenn diese Drehung beim Belasten stets im gleichen Sinne erfolgt, so wird sie mit der Hebelarmdrehung gleichsinnig oder ungleichsinnig sein, je nachdem das eine oder andere Achslager gebraucht wird, sie kann daher durch Beobachtungen an beiden Achslagern eliminiert werden.

Alle Versuche mit beiden Achsen zu machen, hätte kaum den Aufwand an Mühe und Zeit gelohnt, da die Korrektur, deren die Beobachtung an *einer* Achse bedarf, die Hälfte der oben genannten Beträge ausmacht, also von der Größenordnung der Beobachtungsfehler ist. Ich habe mich deshalb mit einer mittleren Korrektur begnügt, welche für die an Lager 1 bzw. 2 gemessenen Verschiebungen + bzw. − 0,6 Proz. beträgt. Nur bei Eisen I und Nickel wurde sie auf ± 1,2 Proz. erhöht.

Die Winkeldrehung, die hier eliminiert werden muß, ist von der Ordnung $3 \cdot 10^{-8}$ absolut, oder 0,006“.

§ 28. Versuchsergebnis für die harten Stäbe.

Tab. 12, Spalte 1—5 enthält das Ergebnis der Querkontraktionsmessungen für alle Stäbe, die gegenüber der angewandten Deformation als vollkommen elastisch gelten können. Für sie kann die Querkontraktion proportional der Belastung gesetzt werden. Es genügt daher, als Zahlen der Tabelle die Durchmesseränderung in $10^{-5} \frac{1}{2} \lambda / \text{kg}$ ($\frac{1}{2} \lambda = 0,273 \mu$) anzugeben. Bei Stahl, Eisen, Nickel, Konstantan, Manganin, und Platin konnte übrigens nur *ein* Ring beobachtet werden.

Die Pfeile im Tabellenkopf deuten die Richtung an, in der der Apparat an den Stab angesetzt war. Spalte 1 gibt Material, Querschnitt (Qu.) und Achslager an, auf die sich die Zahlen rechts beziehen. Querschnitt 1 und 2 liegen, wo nichts besonderes bemerkt ist, auf $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Stablänge (27 cm). Beim Platin sind die in Klammern gesetzten Zahlen die Entfernungen des Querschnittes von einem Stabende. Ferner sind in Spalte 1 noch Winkel verzeichnet, um welche die Pfeilrichtungen des Tabellenkopfes für jede Zeile gedreht zu denken sind gegen die für die erste Zeile bei jedem Stabe geltenden Richtungen.

Die Zahlen von Spalte 2—5 geben die aus den Beobachtungen an beiden Plattenpaaren nach Formel (3) berechneten $\Delta d / \pi$. Sie gelten für Zimmertemperatur (17°). Spalte 2 und 3 beziehen sich auf denselben Durchmesser, 4 und 5 auf den dazu senkrechten. Um den Einfluß der Stabbiegung nach § 26 zu eliminieren, sind in Spalte 6 und 7 die Mittel aus Spalte 2 und 3 einerseits, 4 und 5 andererseits gebildet. Spalte 8 ist wieder aus 6 und 7 gemittelt und in Spalte 9 mit der Achslagerkorrektion (§ 27) versehen.

Die Mittelbildung aus Spalte 6 und 7 bedarf für einige Stäbe, wie Gold I, Platin, Rotguß, Eisen I, der Rechtfertigung, weil hier Unterschiede (bis über 10 Proz.) in der Kontraktion aufeinander senkrechter Durchmesser auftreten (vgl. Spalte 6 und 7), die ich nur auf *Anisotropie* zurückzuführen weiß. Die Größe der Querkontraktion wechselt mit der Richtung des Durchmessers, und es ist von vornherein nicht zu sagen, welche Form der kreisförmige Querschnitt bei der Deformation annimmt. Es fragt sich also, wie die *mittlere* Querkontraktion zu berechnen ist.

Tabelle 12.
Durchmesseränderung in $10^{-5} \frac{1}{2} \lambda / \text{kg}$ ($\frac{1}{2} \lambda = 0,273 \mu$).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	→	←	↑	↓	↔	↑ ↓	↔	$\left(\frac{\Delta d}{\pi}\right)_{\text{kor.}}$	$\left(\frac{\Delta d}{\pi}\right)_{\text{Mittel}}$
<i>Al</i> , ↖?, Qu. 1, " 2,	1864 1835	1799 1828	1866 1866	1797 1807	1832 1832	1831 1836	1832 1834	1843 1845	1844
<i>Al I</i> , ↖0, Qu. 1, " 2,	1545 1655	1850 1791	1697 1721 1725	1748 1732 1708	1697 1723	1722 1726 1716	1710 1725	1700 1715	1707
<i>Al II</i> , ↖?, Qu. 1, " 2,	1685 1654	1602 1676	1628 1698	1643 1602	1643 1615	1636 1650	1640 1632	1650 1622	1636
<i>Cu IVa</i> , ↖?, Qu. 1, " 2,	1089 1092	1097 1082	1088 1085	1083 1119	1093 1087	1085 1102	1089 1095	1083 1088	1085
<i>Cu VI</i> , ↖0, Qu. 1, " 2,	981 915	896 926	926 903	941 929	938 921	933 916	936 918	930 924	927
<i>Ag</i> , ↖0, Qu. 1, " 1, ↖0, " 2, ↖0, " 2,	2047 2066 2009 1994	1940 1890 1996 1970	1996 1976 1997 1987	1975 1941 1984 1943	1993 1973 2002 1982	1985 1968 1990 1965	1989 1965 1996 1973	1977 1985	1981
<i>Au I</i> , ↖0, Qu. 1, " 1, ↖0, " 1, ↖32°, " 1, ↖45°, " 1, ↖0, " 3,	2175 2144 2133 2066 2021 2033	2107 2110 2107 1992 1985	2087 2134 2127	2093 2122 2150	2141 2127 2120 2039 2003 2013	2090 2128 2138	2105 2079 2076	2104 2088	2100
(2 mm unter Qu. 1)					1040	9903	2121	2109	

$\angle 0$, 1,	2049	2084	2079	2019	2089	2091	2092	2080	2089
$\angle 45^\circ$, 2,	1	2084	2082	2049	2066	2061	2085	2097	
				2147		2104			
Ni,									
$\angle 0$, 1,	441	433	426	434	437	430	433	438	437
$\angle 0$, 2,	435	433	426	431	434	429	431	436	
			440	439		439			
Fe I,									
Qu. 1,	454	454	458	448	454	453	454	459	
$\angle ?$, 2,			467	468		467			464
			490	497		493			
	445	441	481	487	443	484	463	468	
Stahl,									
Qu. 1,	395	395	395	395	395	395	395	393	394
$\angle 45^\circ$, 2,	392	399	397	399	396	398	397	395	
			392	397		394			
Konst,									
Qu. 1,	452	452	454	454	452	454	453	456	457
$\angle 0$, 2,	455	459	452	458	457	455	456	459	
			463	456		460			
Mang.,									
Qu. 1,	669	670	675	680	670	677	674	670	672
$\angle 0$, 2,	680	675	681	677	678	679	678	674	
			671	670		671			
Pt,									
Qu. 1 (7,5 cm),	668	682	693	710	675	701	688	692	
$\angle 0$, 2 (9 cm),	674	656	695	707	665	701	683	687	
" 3 (10,2 cm),	649	649	639	714	649	707	678	682	655
" 4 (17 cm),	628	625	654	666	626	660	643	647	(14,7 cm)
" 5 (18 cm),	629	625	655	641	627	648	638	634	
			654	637		645			
Pd,									
Qu. 1,	975	968	987	993	971	990	981	987	
$\angle 0$, 2,			999	1004		1002			994
			1014	1023	997	1019	1008	1002	
Rotguß,									
Qu. 1,	1462	1452	1391	1259	1457	1275	1366	1374	1374
$\angle 45^\circ$, 2,	1355	1327	1397	1385	1341	1391	1366	1374	
			1391	1398		1395			

Soweit der betrachtete Deformationsbereich als *klein* gelten darf, d. h. solange die Verrückungen lineare Funktionen der Koordinaten mit konstanten Deformationskoeffizienten sind („homogene“ Deformation), ist die Volumdilatation des Bereichs durch die Divergenz der Verrückungen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

gegeben. Die Wahl des Koordinatensystems ist dabei gleichgültig. Nun stellt die Dehnung eines homogenen, isotropen Stabes in vollem Umfang eine homogene Deformation dar, man erhält deshalb die Volumdilatation als Summe der Längsdilatation (etwa $\partial \xi / \partial x$) und der doppelten Querkontraktion

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right).$$

In erster Annäherung wollen wir nun auch für die anisotropen Stäbe, wenigstens für kurze Stabelemente, die Deformation als homogen annehmen, dann ist die Volumdilatation des Stabelementes wiederum durch die Divergenz

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

gegeben, und wenn die x -Achse wieder mit der Stabachse zusammenfällt, so stellt $\partial \xi / \partial x$ die Längsdilatation, $\partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z$ die Querschnittskontraktion dar. Da die Wahl der y - und z -Achse beliebig ist, so berechnet sich also die mittlere Querkontraktion als arithmetisches Mittel der Kontraktionen irgend zweier aufeinander senkrechter Durchmesser.

Tatsächlich ergibt sich bei beliebig gewähltem Durchmesserkreuz das in Spalte 8 bzw. 9 gebildete Mittel aus den Durchmesserkontraktionen auch bei Gold I, Rotguß und Eisen I als praktisch konstant. Andererseits zeigt das Beispiel von Gold I, daß unsere Annahme homogener Deformation nur für kurze Stabelemente gültig sein kann. Denn in den nur 2 mm entfernten Querschnitten 1 und 3 haben sich die Richtungen maximaler und minimaler Kontraktion sicherlich stark gegeneinander gedreht. Also kann man die beiden Querschnitte auch nicht in einem gemeinsamen Bereich homogener Deformation liegend annehmen.

Starke Inhomogenität des Materiales zeigt bei den Querkontraktionsmessungen nur der Platinstab, dessen Querkontraktion sich längs des Stabes gleichmäßig um fast 10 Proz. ändert. Während deshalb im allgemeinen als mittlere Durchmesseränderung eines Stabes in Spalte 10 von Tab. 12 das Mittel aus den untersuchten Querschnitten genommen ist, bezieht sich die für Platin angegebene Zahl auf die Mitte der für die Dehnungsmessungen geltenden Meßlänge.

Die Zahlen von Spalte 10 der Tab. 12 ergeben nach Multiplikation mit der Lichthalbwelle ($273 \cdot 10^{-7}$ cm) und Division mit dem Stabdurchmesser d die Querkontraktionen ζ in [1/kg]. Der 10^6 fache Betrag von ζ ist in Spalte 3 von Tab. 13 angeführt, daneben in Spalte 4 die Längsdilatation ε , in Spalte 5 das Verhältnis

$$\mu_{\text{stat.}} = \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdilatation}}.$$

ε ist den statischen Messungen (l. c. Tab. 7) entnommen. Nur für Aluminium I, II und Kupfer VI fehlt diese Messung und es ist ε aus $E_{\text{long.}}$ (Tab. 10) berechnet.

Tabelle 13.

	d cm	$\zeta \cdot 10^6$ 1/kg	$\varepsilon \cdot 10^6$ 1/kg	$\mu_{\text{stat.}}$
Aluminium . . .	1,207	0,417	1,216	0,343
Aluminium I . .	1,299	0,359	1,059	0,339
Aluminium II . .	1,300	0,344	1,029	0,334
Kupfer IVa . . .	1,196	0,248	0,712	0,348
Kupfer VI . . .	1,300	0,195	0,578	0,337
Silber	1,109	0,488	1,286	0,379
Gold I	1,208	0,475	1,121	0,423
Gold II	1,154	0,494	1,176	0,420
Nickel	1,605	0,0743	0,2407	0,309
Eisen I	1,301	0,0974	0,347	0,280
Stahl	1,595	0,0674	0,2347	0,287
Konstantan . . .	1,997	0,0625	0,1924	0,325
Manganin	1,806	0,1016	0,309	0,329
Palladium	1,610	0,1685	0,428	0,393
Platin II	1,617	0,1116	0,286	0,387
Rotguß	1,468	0,256	0,714	0,358

§ 29. Versuchsergebnis für die weichen Stäbe aus Kadmium, Zinn, Blei, Wismut.

Für die weichen Stäbe konnte derselbe Apparat benutzt werden. Nur wurde eine schwächere Feder F eingesetzt, um eine merkliche Eindrückung der Kuppen in den Stab zu vermeiden. Bei der Beobachtung der Interferenzringe entstanden wieder wie früher (§ 15) Schwierigkeiten aus den Erscheinungen der dauernden Deformation und elastischen Nachwirkung. Ich möchte bemerken, daß ich den Unterschied beider damals nicht genügend hervorgehoben habe. Um den Einfluß der dauernden Deformation zu eliminieren, wurde nicht nur wie früher die gleiche Belastung mehrmals hintereinander wiederholt, wie das überhaupt stets geschah, sondern auch die Verschiebung lediglich bei Entlastung beobachtet.

Das Resultat der Querkontraktionsmessungen ist in Tab. 14 vereinigt. Unter π steht die Belastungsstufe, gerechnet von der Ausgangsbelastung an, unter $\Delta d/\pi$ die zugehörige Durchmesseränderung, wie sie aus den vier für einen Querschnitt nötigen Beobachtungsreihen graphisch gemittelt ist. Die Anisotropie ist hier also bereits eliminiert (§ 28). Sie zeigt sich bei allen vier Stäben, beträgt im Maximum bei Zinn etwa 11 Proz., während sie in Querschnitt 2 des Bleistabes für die gewählten Richtungen unmerklich ist. Man erkennt, daß überall die $\Delta d/\pi$ mit zunehmender Belastung ansteigen, ebenso wie es bei den Dehnungsmessungen für die damals mit δ bezeichneten Größen $\Delta L/\pi$ gefunden wurde. In § 15 ließ ich es ungewiß, ob diese Abweichungen von der Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung als reell anzusehen seien. Inzwischen haben aber Hr. Heuse und ich Dehnungsversuche an weichen Drähten angestellt, die es uns wahrscheinlich machen, daß weiches Material, gleichgültig von welcher Deformation man ausgeht, gegen kleine elastische Deformationen sich viel weniger nachgiebig zeigt, als gegen größere, ein Verhalten, welches dem des Gußeisens nach den Beobachtungen von Berliner¹⁾ ähnlich zu sein scheint. Diese Auffassung wird auch dadurch bestätigt, daß sich für die vier weichen Stäbe aus der Transversalschwingungsmethode durchweg ein etwas größeres E ergab, als aus der statischen (vgl. Tab. 8).

1) S. Berliner, Ann. d. Phys. 20. p. 527. 1906.

Tabelle 14.

Kadmium.

$d = 1,798 \text{ cm}$; $L = 16,30 \text{ cm}$.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	μ
5	0,0149	0,462	0,293
10	153	467	297
15	155	—	—

Zinn.

$d = 1,802 \text{ cm}$; $L = 16,30 \text{ cm}$.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	μ
6	0,0158	0,426	0,335
12	159	429	335

Blei.

$d = 1,802 \text{ cm}$; $L = 16,30 \text{ cm}$.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$		$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	μ
	Qu. 1	Qu. 2		
1,5	0,0662	0,0727	1,409	0,44 ₈
3,0	675	736	1,421	0,44 ₉
4,5	682	743	—	—

Wismut.

$d = 1,796 \text{ cm}$; $L = 16,33 \text{ cm}$.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2} \lambda/\text{kg}$	μ
4	0,0261	0,724	0,32 ₈
8	264	728	32 ₉
12	266	732	33 ₀
16	268	—	—

55*

Ich nehme also den beobachteten Gang der Zahlen $\Delta d/\pi$ und $\Delta L/\pi$ als reell an und teile deshalb die früher nur für Blei (Tabb. 5a und 6a) gegebenen Zahlen $\Delta L/\pi$ nachträglich auch für die anderen Stäbe mit. Sie sind in Spalte 3 auf die Belastungsstufen π reduziert. Die Ausgangsbelastung, die wie gesagt bei weichem Material für das Anwachsen der Deformation mit der Spannung von geringer Bedeutung zu sein scheint, betrug bei der Dehnung 5 kg; bei der Querkontraktion für Blei und Kadmium 5 kg, für Wismut und Zinn 2 kg. In der letzten Spalte ist das Verhältnis

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta L}{L}$$

gebildet. Es bleibt eine vielleicht nur scheinbare Tendenz des μ , mit der Belastung zu wachsen. Hinsichtlich der absoluten Werte μ ist zu sagen, daß sie mit größerer Unsicherheit behaftet sein werden, als bei den festen Stäben. Beim Blei deutet der große Unterschied in beiden Querschnitten auf Inhomogenität des Materials. In Anbetracht der geringen Zahl untersuchter Querschnitte können die gefundenen μ nur als Näherungswerte gelten.

7. Besprechung des Zahlenmaterials.

§ 30. Zusammenstellung der Beobachtungen.

In Tab. 15 sind nochmals die wichtigsten Beobachtungsergebnisse vereinigt, um daraus noch einige interessante Folgerungen zu ziehen. Insbesondere ist die Berechnung des *Kompressionsmoduls* H und seines reziproken Wertes, der *kubischen Kompressibilität* κ gegeben. Die Tabelle enthält also den Elastizitätsmodul $E_{\text{stat.}}$ [kg/mm²], nur für Aluminium I, II, Kupfer V, VI den Modul $E_{\text{long.}}$; ferner die Zahl $\mu_{\text{stat.}}$ aus Tabb. 13 und 14, die Zahl $\mu_{\text{tors.}}$ aus Tab. 10, den aus statischen Dehnungs- und Querkontraktionsmessungen berechneten Schub- oder Scheerungsmodul $K = \frac{E_{\text{stat.}}}{2(1 + \mu_{\text{stat.}})}$ und den Torsionsmodul T aus Tab. 10, welcher für homogenes, isotropes Material mit K identisch sein müßte; endlich den Kompressionsmodul H [kg/mm²] und die kubische Kompressibilität κ in [cm²/kg], also nahezu im technisch üblichen Maße [1/Atm]. Im absoluten [C.G.S.] Maße erhält man κ durch Division mit $0,98 \cdot 10^6$.

Tabelle 15.

1	2	3	4	5	6	7	8
Gezogene Stäbe	E	$\mu_{\text{stat.}}$	$\mu_{\text{tors.}}$ $= \frac{E}{2T} - 1$	K	T	H	$\times 10^8$
	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$
Aluminium	7190	0,343		2680		7600	1,31
Aluminium I	7120	339	0,310	2660	2717	7400	1,36
Aluminium II	7320	334	337	2740	2737	7400	1,36
Kupfer IVa	12500	348	356	4640	4640	13700	0,73
Kupfer V	13110		391		4710		
Kupfer VI	13040	337	399	4880	4660	13400	0,75
Silber	8050	379	369	2920	2940	11100	0,90
Gold I	7780	423	495	2730	2602	16800	0,59
Gold II	8120	420	435	2860	2822	16900	0,59
Nickel	20540	309		7850		17900	0,56
Eisen I	21680	280		8470		16400	0,61
Stahl	21320	287	287	8280	8280	16700	0,60
Konstantan	16590	325	329	6260	6230	15800	0,63
Manganin	12640	329	329	4760	4740	12300	0,81
Gegossene Stäbe							
Kadmium	5090	0,30		1960		4200	2,4
Zinn	5540	33		2080		5400	1,9
Blei	1656	44 ₆		573		5100	2,0
Wismut	3250	33		1220		3200	3,1
Palladium	11480	393	0,101	4120	5210	17900	0,56
Platin II	17080	387	368	6160	6220	25200	0,40
Rotguß (Bronze)	8240	358	177	3030	3500	9700	1,03

§ 31. Das Verhältnis μ .

Wir wenden uns zunächst zu einem Vergleich der Spalten 3 und 4. Beide sollten identische Zahlen ergeben und sie tun dies in der Tat für einige Stäbe hinreichend genau: Aluminium II, Stahl, Konstantan, Manganin. Auch bei Kupfer IV, Silber, Gold II ist der Unterschied nicht groß. Bei den übrigen Stäben kann aber von einer Übereinstimmung innerhalb der Versuchsfehlergrenze nicht mehr die Rede sein. Die

Torsionsmethode liefert Zahlen für μ , welche schon an und für sich höchst unwahrscheinlich sind, so für Gold I $\mu = 0,495$, für Palladium 0,101, für Rotguß 0,177. Hält man dies Ergebnis zusammen mit der für Gold I und Rotguß sicher nachgewiesenen Anisotropie innerhalb eines Stabquerschnittes, so kann man kaum zweifeln, daß die Anisotropie des Materiales die Hauptursache für die schlechte Übereinstimmung zwischen $\mu_{\text{stat.}}$ und $\mu_{\text{tors.}}$ bildet. Dann aber wird man auch $\mu_{\text{stat.}}$ für den viel zuverlässigeren Wert halten müssen, da die Berechnung von $\mu_{\text{tors.}}$ gegen Änderungen in E und T , die durch Anisotropie usw. hervorgerufen sein könnten, sehr empfindlich ist. Es erklären sich daraus viele widersprechende Resultate anderer Beobachter, die μ aus E und T bestimmt haben.

Dagegen lehrt Spalte 3, daß die Querkontraktionsmessung wahrscheinlich viel konstantere Zahlen μ für verschiedene Proben gleichen Materiales liefert, als man bisher anzunehmen geneigt war. Man vergleiche die drei Aluminiumstäbe, die beiden Kupferstäbe, die beiden Goldstäbe, jeder vom anderen sich nur durch geringe Mengen fremder Stoffe unterscheidend (vgl. Tab. 8 und p. 828), schließlich auch Eisen und Stahl. So ist auch die Übereinstimmung verschiedener Beobachter nicht

Tabelle 16.

	μ für Stäbe					Drähte	
	Ba. ¹⁾	A. ²⁾	Str. ³⁾	M. ⁴⁾	Gr.	Be. ⁵⁾	Ca. ⁶⁾
Aluminium					0,34		0,36
Kupfer		0,33	0,33	0,31—0,34	0,34—0,35	0,34	0,37
Nickel					0,31	0,27—0,37	
Eisen (Schmiede-)	0,26—0,31		0,28—0,30	0,27—0,29	0,28	0,28—0,29	0,32
Stahl	0,29	0,27	0,27—0,30	0,27—0,28	0,29	0,28	
Blei		0,43			0,45		

1) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur 25. p. 81. 1879.

2) E. H. Amagat, C. R. 107. p. 618. 1888; 108. p. 1199. 1889; Ann. chim. et phys. 22. p. 119. 1891.

3) C. E. Stromeyer (u. Kennedy), l. c.

4) J. Morrow, l. c.

5) J. R. Benton, l. c.

6) P. Cardani, Phys. Zeitschr. 4. p. 449. 1903.

ungünstig, wenn man sich auf die durch Querkontraktions- oder ähnliche Messungen gefundenen Zahlen beschränkt. In Tab. 16 habe ich alles mir bekannte Material zusammengestellt.

Danach ist man berechtigt, die durch Querkontraktionsmessung festgestellten μ soweit als Materialkonstanten zu betrachten, als dies bei elastischen Größen überhaupt zulässig ist, und an die gefundene Reihenfolge der Zahlen einige Schlüsse anzuknüpfen.

Amagat glaubte annehmen zu können, daß μ für die festen Metalle zwischen den Grenzen 0,5 und 0,25 liege und zwar um so größer sei, je näher das Metall dem flüssigen Zustande stehe. Danach wäre also ein Zusammenhang mit der Härte und vielleicht auch mit dem Schmelzpunkt zu erwarten. Davon ist jedoch nichts zu bemerken, höchstens wird man vielleicht sagen dürfen, daß die größte Härte stets mit kleinem μ verbunden ist. Ob ferner $\mu = \frac{1}{4}$ wirklich eine untere Grenze für die reinen Metalle darstellt, müssen weitere Versuche lehren. Zweifellos gibt es ja „feste“ Gebilde, wie Kork, deren μ unter $\frac{1}{4}$ liegt, und nach Versuchen von Bauschinger, Stromeyer, Morrow scheint auch Gußeisen dazu zu gehören. Aber Gußeisen kann wegen des eingesprengten Graphits kaum als kontinuierlicher fester Körper angesehen werden. Ebensowenig, wie Härte und Schmelzpunkt, zeigen andere auf den Kohäsionskräften der Atome beruhende physikalische Eigenschaften einen Zusammenhang mit μ . Dagegen erhält man nahezu die gleiche Reihenfolge der Metalle, wenn man sie einmal nach der Größe von μ , das andere Mal nach der Größe des Ausdrucks $\alpha E/c_p s$ ordnet, welcher der Temperaturänderung bei adiabatischer Dilatation des Stabes proportional ist und in Tab. 9 berechnet wurde. Die Reihenfolge ist in beiden Fällen die folgende:

	Pb	Au	Pd	Pt	Ag	Cu	Al	Sn	Ni	Cd	Fe		
$\mu = 0,45$	42	40	39	38	35	34	33	33	31	30	28		
	Pb	Au	Pd	Pt	Cu	Ag	Al	Ni	Fe	Sn	Cd	Rh	Ir
$\frac{\alpha E}{c_p s} = 0,30$	44	46	58	57	60	62	63	63	66	72	72	77	1,14

In diesen Reihen ist Wismut fortgelassen, da es eine vollkommene Ausnahmestellung einnimmt. Ferner stehen die drei

Metalle mit kleinstem Atomvolumen Cu, Ni, Fe in der μ -Reihe weiter nach rechts verschoben, als man nach den Werten $\alpha E/c_p s$ erwarten würde. Im übrigen ist aber die Beziehung so deutlich, daß ich glaube, für die nicht untersuchten, härtesten Metalle Rh und Ir ein kleines μ voraussagen zu können.

§ 32. Die kubische Kompressibilität.

In der letzten Spalte von Tab. 15 sind die nach der Formel

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}$$

berechneten Kompressibilitäten angeführt. Die Art der Berechnung zeigt, daß ein ziemlich großer prozentischer Fehler zugelassen werden muß, besonders wenn μ , wie bei den weichen Metallen Sn, Cd, Pb, Bi ungenau bestimmt ist oder auch nur sehr große Werte besitzt, wie bei Pb und Au. Bei Pb z. B. bringt 1 Proz. Änderung in μ 8 Proz. Änderung in κ hervor. Sehr viel günstiger liegen die Verhältnisse beim Fe, wo die Fehler in κ nicht viel größer als die in μ sind.

Tabelle 17.

Kub. Kompressibilität $\kappa \times 10^{12}$ [C.G.S.] bei 18°.

	Amagat	Buchanan	Richards	Grüneisen
Aluminium		1,70	1,30 (1,50)	1,36
Kupfer	0,88	0,88	0,54 (0,74)	0,74
Silber			0,84 (1,04)	0,92
Gold		0,80	0,47 (0,67)	0,60
Nickel			0,27 (0,47)	0,57
Eisen u. Stahl	0,69		0,40 (0,60)	0,62
Palladium			0,38 (0,58)	0,57
Platin		0,56	0,21 (0,41)	0,40
Kadmium			1,9 (2,1)	2,4
Zinn			1,7 (1,9)	1,9
Blei	2,8		2,2 (2,4)	2,0
Wismut			2,8 (3,0)	3,2

Dies ist zu beachten, wenn man die hier erhaltenen Zahlen mit denen anderer Beobachter vergleicht, welche die Kompressibilität auf direkterem Wege gemessen haben. Man findet das Zahlenmaterial in Tab. 17 vereinigt, alle Zahlen sind im [C.G.S.]·

System ausgedrückt. Amagat¹⁾ bestimmte die Volumänderung einer Röhre bei einseitigem Zuge, Buchanan²⁾ die Längenänderung eines Drahtes bei allseitigem Druck, Richards³⁾ die *Differenz* der Kompressibilität zwischen Metall und Quecksilber; auf absolute Werte führte er seine Zahlen zurück durch zwei Kompressibilitätsmessungen an Eisen und Kupfer. Gegen diese letzterwähnten absoluten Messungen von Richards sind jedoch Bedenken zu erheben. Es soll die Längenänderung bei allseitigem Druck gemessen werden. Dazu wird das zu untersuchende Material in Stangenform auf den Boden eines vertikalen Stahlrohres gelagert und hohem Druck ausgesetzt. Es wird nun lediglich die gegenseitige Verschiebung der oberen Enden von Stange und Rohr gemessen und als lineare Verkürzung der Stange in Rechnung gesetzt. Die von der Theorie geforderte nicht unbeträchtliche *Verkürzung* des Stahlrohres durch den Innendruck⁴⁾ bleibt unberücksichtigt. Dadurch hat Richards meines Erachtens zu kleine Kompressibilitätswerte erhalten, und *alle* seine Zahlen bedürfen der gleichen additiven Korrektur. Nach dem Vergleich mit den von mir bestimmten Kompressibilitätswerten würde ich eine Korrektur von etwa $+ 0,20$ an den Richardsschen Zahlen für notwendig halten.⁵⁾ Bringt man diese an, so erhält man die geklammerten Zahlen, welche mit den meinigen in Anbetracht der schwierigen Messungen befriedigend übereinstimmen. Für die im Vergleich mit den meinigen auffallend hohen Kompressibilitätswerte bei Amagat und Buchanan weiß ich keine Erklärung zu geben.

Es sei mir hier noch gestattet, die Elastizitätstheorie und ihre Anwendung bei Berechnung der Kompressibilität gegenüber der ungünstigen Kritik des Hrn. Richards⁶⁾ in Schutz

1) E. H. Amagat, l. c.

2) J. Y. Buchanan, Proc. Roy. Soc. London. 73. p. 296. 1904.

3) Th. W. Richards, Zeitschr. f. physik. Chem. 61. p. 77. 171. 183: 1907.

4) Vgl. Sacerdote, Journ. de phys. (3) 8. p. 209. 1899.

5) Die erwähnte Fehlerquelle rechtfertigt nach meiner Berechnung nur eine Korrektur von $+ 0,10$, doch ist wohl zweifelhaft, ob die Deformation des Stahlrohres der Theorie völlig entsprochen hat. Sehr erwünscht wäre eine Wiederholung der absoluten Messungen seitens des Hrn. Richards.

6) l. c. p. 179.

zu nehmen. Diese ist meiner Meinung nach nur dann berechtigt, wenn sie die Benutzung des Torsionsmoduls zur Kompressibilitätsbestimmung verwirft. Und auch hier trifft der Vorwurf nicht die Theorie, sondern die Beschaffenheit des Materiales. Wenn man die Kompressibilität aus Versuchen berechnet, bei denen wirklich eine *Volumänderung* erzeugt und gemessen ist, so wird, wie ich glaube, die Theorie nicht versagen.

Übrigens unterliegt auch die Kompressibilitätsmessung von Richards und Buchanan der theoretischen Annahme, daß die Längsdilatation bei allseitigem Druck $\frac{1}{3}$ der Volumdilatation sei, was streng genommen auch nur für *isotropes* Material vorausgesetzt werden kann, wie Hr. Richards selbst hervorhebt.

Von den Beziehungen der Kompressibilität zu anderen physikalischen Konstanten soll in einem folgenden Aufsatz die Rede sein. Hier möchte ich nur noch darauf hinweisen, daß der Einfluß von Fremdkörpern auf die Kompressibilität des reinen Metalls sehr gering ist, soweit wenigstens die vorliegenden Versuche in Betracht kommen. Stahl und Eisen zeigen gleiche Kompressibilität. Für die Nickel-Kupferlegierung „Konstantan“ und die Mangan-Nickel-Kupferlegierung „Manganin“ scheint die Kompressibilität der Mischungsregel zu entsprechen.¹⁾ Das von Angenheister²⁾ für Silber-Kupferlegierungen aufgefundene Minimum der Kompressibilität zeigt sich bei jenen Legierungen also nicht, oder wenigstens nicht in so ausgeprägter Weise. Vgl. auch § 20.

Zusammenfassung.

Für 20 Metallstäbe ist die Querkontraktion bei schwachen Dehnungen mit einem Interferenzapparat gemessen worden, der noch Längenänderungen von 2×10^{-5} mm auf etwa ± 1 Proz. zu beobachten gestattet.

Das Verhältnis μ der Querkontraktion zur früher gemessenen Längsdilatation schwankt für die untersuchten Metalle zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$.

1) Vgl. auch A. Lessing, Inaug.-Diss. Berlin 1900.

2) G. Angenheister, Ann. d. Phys. 11. p. 188. 1903.

Mittels der Querkontraktionsmessung wurde bei einigen Stäben starke Anisotropie, zum Teil auch Inhomogenität festgestellt, und zwar sowohl bei gezogenen, wie bei nicht gezogenen Stäben.

Im Falle anisotropen Materials führt die Berechnung von μ aus Elastizitäts- und Torsionsmodul zu unzuverlässigen Zahlen.

Die direkt gemessene Zahl μ kann mit der Beschränkung, die für alle elastischen Eigenschaften gilt, als Materialkonstante betrachtet werden.

Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen μ und den auf Kohäsionskräften beruhenden Eigenschaften, z. B. Härte oder Schmelzpunkt, besteht nicht. Dagegen zeigt sich μ in der Regel um so größer, je kleiner die bei einseitiger adiabatischer Dehnung eintretende Temperaturänderung des Materials ist.

Aus Dehnung und Querkontraktion der Stäbe wurde die Volumänderung und damit die kubische Kompressibilität berechnet. Sie ist von kleinen Mengen fremder Stoffe im reinen Metall wenig abhängig. Für Legierungen von Kupfer mit Nickel und Mangan berechnet sich die Kompressibilität annähernd nach der Mischungsregel.

(Eingegangen 2. März 1908.)