

Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen.

Von

O. D. KELLOGG in Princeton New Jersey U. S. A.

§ 1.

Eine besondere Art von Funktionalgleichungen hat wieder in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt, nämlich diejenige, in welchen die gesuchte Funktion mit einer bekannten Funktion multipliziert unter einem Integralzeichen steht. Aus diesem Grunde ist für solche der Name „Integralgleichung“ vorgeschlagen worden. Wichtig sind die folgenden zwei Typen:

$$(1) \quad f(s) = \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt,$$

$$(2) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt,$$

wo $f(s)$ und $K(s, t)$ bekannte Funktionen sind, $\varphi(s)$ aber gesucht wird.

Die Gleichungen zweiter Art haben unter gewissen Stetigkeitsbedingungen für $K(s, t)$ eine allgemeine und elegante Lösung durch Herrn Fredholm gefunden*). Die Gleichungen erster Art sind dagegen wesentlich andere, weil das $\varphi(s)$ jetzt nicht mehr außerhalb des Integralzeichens auftritt, und man kann sich leicht davon überzeugen, daß sie nicht in derselben Allgemeinheit auflösbar sind wie die anderen, denn wäre z. B. $K(s, t)$ in bezug auf s ein Polynom n^{ten} Grades, so müßte für irgendwelches $\varphi(t)$, $f(s)$ auch ein Polynom sein, von höchstens n^{tem} Grade. Übrigens sind in folge der Anwendungen auf die mathematische Physik und die Funktionentheorie solche Integralgleichungen von Bedeutung, in denen das $K(s, t)$ eine Unstetigkeit besitzt. Die vorliegende Arbeit behandelt also Integralgleichungen der angegebenen Arten, in denen gewisse Unstetigkeiten vorkommen**).

*) Acta Mathematica Bd. 27.

**) Sie ist zum Teil eine Neubearbeitung gewisser Untersuchungen, welche ich im vorigen Jahre unter Leitung von Herrn Prof. Hilbert für meine Doktorarbeit

§ 2.

Will man eine geschlossene ebene Kurve ohne Doppelpunkte so mit Masse belegen, daß die nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials hervorgerufene Potentialfunktion vorgeschriebene Randwerte annimmt, so führt die Frage nach dem Moment dieser Belegung auf eine Gleichung der ersten Art. Nun ist, wie schon bemerkt, für allgemeines $K(s, t)$ die Gleichung (1) von beschränkter Lösbarkeit. In einem wichtigen Fall dagegen, auf den sich auch die erwähnte Frage aus der Potentialtheorie durch teilweise Integration zurückführen läßt, können wir die Gleichung sehr allgemein lösen; das ist der Fall, wo $K(s, t)$ für $s = t$ einen Pol hat, und unter dem Integral dann der Cauchysche Hauptwert zu verstehen ist. Die Lösung ermittelt man durch die von Herrn Hilbert aufgestellten Reziprozitätsformeln:

$$\begin{aligned} (3_1) \quad & \left\{ \varphi(s) = \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt + \int_0^1 \varphi(t) dt, \right. \\ (3_2) \quad & \left. f(s) = -\int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt + \int_0^1 f(t) dt. \right. \end{aligned}$$

Ist in der ersten dieser Gleichungen das $\varphi(s)$ vorgeschrieben, so gibt die zweite das $f(s)$ an, welches, in die erste eingesetzt, sie befriedigt und umgekehrt ist (3_1) die Lösung von (3_2). Die Formeln gelten für streckenweise stetige und differentiierbare Funktionen $\varphi(s)$ und $f(s)$ vorausgesetzt, daß etwa vorhandene Unendlichkeitsstellen von niedrigerer als erster Ordnung sind. Sie können folgendermaßen abgeleitet werden. Man geht aus von einer Potentialfunktion $u(x, y)$ für die Fläche des Einheitskreises, die auf der Kreisperipherie die Werte $f(s)$ annehmen möge. Wir nehmen vorläufig an, was eine kleine Erleichterung mit sich bringt, daß

$$\int_0^1 f(t) dt = 0;$$

später wird diese Einschränkung aufgehoben werden. Die überall im Inneren des Kreises stetige Funktion $u(x, y)$ ist eindeutig darstellbar als Potential einer Doppelbelegung, wie die Potentialtheorie lehrt:

$$(4) \quad u(x, y) = 2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{\varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)} dt$$

machte (vgl. meine Inauguraldissertation, Göttingen 1902). Von den Vorlesungen Hilberts habe ich freien Gebrauch gemacht.

wo

$$\varrho^2 \binom{t}{x, y} = [x - x(t)]^2 + [y - y(t)]^2$$

ist; t , sowie s bezeichnen einen Parameter, welcher gleich $\frac{1}{2\pi}$ mal der von einem beliebigen Punkt gemessenen Bogenlänge des Kreises ist. Die Stetigkeit dieser Funktion $u(x, y)$ gilt auch überall *am Rande*, wo die Randwerte $f(s)$ stetig sind.

Es ist nun eine konjugierte Potentialfunktion $v(x, y)$ überall im Inneren des Kreises durch die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt. Diese wird im Inneren der Kreisfläche stetig sein, und auch an den Stellen *des Randes*, wo $u(x, y)$ stetig und differentierbar ist, also wo dasselbe von $f(s)$ gilt. Nun ist, da

$$\log(x + iy) = \log \varrho e^{i\vartheta} = \log \varrho + i\vartheta$$

eine komplexe Funktion ist, $-\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ das zu $\frac{\partial \log \frac{1}{\varrho}}{\partial n}$ konjugierte Potential. Es gilt also für das Innere des Kreises die Darstellung

$$(5) \quad v(x, y) = -2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial \vartheta \binom{t}{x, y}}{\partial n} dt,$$

$$\vartheta \binom{t}{x, y} = \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y}{x(t) - x}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) bilden die Grundlagen des Beweises für die Formeln (3). Der Gedankengang ist folgender: Für die „gewöhnlichen“ Punkte des Randes (wo $f(s)$ stetig und differentierbar ist) geht $u(x, y)$ stetig in $f(s)$, und $v(x, y)$ stetig in seine Randwerte $\varphi(s)$ über. Die Ausdrücke rechts in den zwei Gleichungen (4) und (5) gehen bei Annäherung des Punktes (x, y) an einen „gewöhnlichen“ Punkt $(x(s), y(s))$ des Randes stetig in $\pi g(s)$ bzw. in $\pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt$ über. Da nun jede der zwei Gleichungen (4) und (5) immer innerhalb des Kreises gilt, und da bei Annäherung des Punktes (x, y) an den Rand jedes Glied sich stetig einer bestimmten Grenze nähert, so gelten die Gleichungen auch an der Grenze, und wir haben

$$(6) \quad \begin{cases} f(s) = \pi g(s), \\ \varphi(s) = \pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt \end{cases}$$

oder

$$\varphi(s) = \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt$$

eine Formel die für alle „gewöhnlichen“ Punkte des Randes die Werte eines Potentials mit denen des konjugierten verbindet. Betrachtet man auf ganz ähnliche Weise die Funktion $v(x, y)$ und ihre konjugierte, $-u(x, y)$, so findet man zwischen $f(s)$ und $\varphi(s)$ auch die Beziehung

$$f(s) = - \int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt.$$

Es bleibt also nur noch darzutun, daß die erwähnten Übergänge in (6) stetig sind und die Einschränkungen

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt = 0$$

zu beseitigen. Daß

$$2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{\varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)} dt$$

stetig in $\pi g(t)$ übergeht, ist der gewöhnliche Satz für die Randwerte einer Doppelbelegung, wenn man bemerkt, daß für den Kreis

$$\int_0^1 g(t) \frac{\partial \vartheta \left(\begin{smallmatrix} t \\ s \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt = \int_0^1 g(t) dt$$

ist, und, daß

$$\int_0^1 f(t) dt = 0$$

war. Dagegen ist die Stetigkeit des Überganges von

$$-2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial \vartheta \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial n} dt = - \int_0^1 g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt$$

in

$$\int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt$$

nicht ohne weiteres klar. Wir wollen das Verhalten des Integrals betrachten, wenn der Punkt (x, y) sich einem „gewöhnlichen“ Grenzpunkte, für den wir der Bequemlichkeit halber den Punkt $(1, 0)$, $s = 0$ nehmen können, nähert. Zu diesem Zwecke teilen wir das Integral in zwei Teile — von $t = -\varepsilon$ in positiver Umlaufrichtung bis $t = +\varepsilon$, und von $t = +\varepsilon$ weiter bis $t = -\varepsilon$, — wir denken uns naturgemäß alle vorkom-

menden Funktionen als außerhalb des Intervalles 0 bis 1 durch die Forderung definiert, daß sie die Periode 1 haben. Wir haben also

$$-\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt - \int_{+\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt.$$

Sobald etwa $|x-1| + |y| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, ist das erste Integral immer stetig, da der Integrand eine stetige Funktion von x und y innerhalb dieses Bereiches ist. Wir wählen nun ε , über das wir frei verfügen können, so klein, daß in dem Intervalle $t = -\varepsilon$ bis $t = +\varepsilon$ $g(t) = \frac{f(t)}{\pi}$ stetig und differentierbar ist, was möglich ist, da der betrachtete Punkt $(0, 1)$ ein „gewöhnlicher“ sein sollte. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt$$

eine stetige Funktion von x und y für $x=1$, $y=0$ ist. Zu diesem Zwecke ziehen wir den Kreisradius durch den Punkt x, y ; er möge die Peripherie im Punkte $t=t_1$ treffen. Hiermit wollen wir also nicht die Richtung in welcher (x, y) an die Peripherie heranrückt, einschränken; t_1 kann als eine Veränderliche angesehen werden. Wir haben jetzt

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t) \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} dt = L \left\{ \int_{-\varepsilon}^{t_1-\sigma} + \int_{t_1+\sigma}^{+\varepsilon} \right\};$$

denn liegt (x, y) nicht auf der Peripherie, so hat der Grenzwert rechter Hand den gewöhnlichen Sinn eines Integrals, sonst stimmt er mit dem (gemeinten) Cauchyschen Hauptwerte überein. Teilweise Integration gibt nun

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt &= \left[g(\varepsilon) \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ x, y \end{smallmatrix} \right) - g(-\varepsilon) \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} -\varepsilon \\ x, y \end{smallmatrix} \right) \right] \\ &+ L \left[g(t_1-\sigma) \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t_1-\sigma \\ x, y \end{smallmatrix} \right) - g(t_1+\sigma) \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t_1+\sigma \\ x, y \end{smallmatrix} \right) \right] \\ &- \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g'(t) \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right) dt. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite ist das dritte Glied wegen der absoluten Integrierbarkeit des Logarithmus durchweg stetig, das erste Glied ist für

$$|x-1| + |y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

auch stetig, und das zweite verschwindet für jedes (x, y) in demselben Bereiche, denn

1) liegt (x, y) nicht auf der Peripherie des Kreises, so ist alles stetig, und das Glied verschwindet daher mit σ .

2) liegt (x, y) auf der Peripherie, so nimmt das Glied, da

$$\log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t_1 \pm \sigma \\ x(t_1), y(t_1) \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2} \log \varrho^2 = \frac{1}{2} \log [1 - 2 \cos 2\pi(t_1 \mp \sigma - t_1) + 1],$$

die Form an:

$$L \underset{\sigma=0}{[g(t_1 - \sigma) - g(t_1 + \sigma)] \log 2 \sin \pi \sigma}$$

und dies verschwindet wegen der Differentiierbarkeit von $g(t)$ in diesem Bereiche.

Also ist der ganze Ausdruck

$$- \int_0^1 g(t) \frac{\partial \log \varrho \left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y \end{smallmatrix} \right)}{\partial t} dt$$

im betrachteten Punkte stetig. Man berechnet leicht seinen Wert für den Randpunkt s und findet ihn wie angegeben $= \pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt$. Die folgenden Formeln sind also aufgestellt:

$$\begin{cases} \varphi(s) = \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt, \\ f(s) = - \int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t) dt. \end{cases}$$

In dem vorhergehenden waren $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt = 0$. Sollten nun $f(s)$ diese Bedingungen nicht befriedigen, so tun es doch

$$f(s) - \int_0^1 f(t) dt, \quad \varphi(s) - \int_0^1 \varphi(t) dt,$$

und die eben erhaltenen Formeln auf diese Funktionen angewandt, liefern die gewünschten Gleichungen (3).

Wir haben nur die Punkte betrachtet, wo $f(s)$ und $\varphi(s)$ stetig und differentiierbar waren. Nun aber kann man direkt verifizieren, daß die Formeln noch für Punkte gelten, wo die Stetigkeit unterbrochen wird. Nehmen wir z. B. an, $f(s)$ erleide einen endlichen Sprung, etwa für $s=0$: $f(+0) - f(-0) = a\pi$, $f'(s)$ dagegen möge stetig sein. Als Integrations-

grenzen können wir die bequemereren $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ nehmen, da der Integrand die Periode 1 hat. Dann gibt (\mathfrak{B}_1)

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{s-t} dt + S_1(s)$$

wo S_i ($i=1, 2, \dots$) hier und im folgenden eine im Punkte $s=0$ stetige Funktion bedeuten soll. Ferner ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{s-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{f(t)}{s-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f(t)-a\pi}{s-t} dt + a \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dt}{s-t}.$$

Die zwei ersten Glieder auf der rechten Seite bilden eine für $s=0$ stetige Funktion. Das dritte Glied aber verhält sich bis auf eine stetige Funktion wie $a \log |s|$. Wir haben also $\varphi(s) = a \log |s| + S_2(s)$. Es fragt sich, ob dieses $\varphi(s)$ in (\mathfrak{B}_2) eingesetzt wieder für $f(s)$ einen Sprung von der Größe $a\pi$ ergibt. Dies ist in der Tat der Fall, denn die Substitution $t = s + t'$ liefert

$$f(s) = \frac{a}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\log |s+t'|}{t'} dt' + S_3(s).$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(s) - f(-s) &= \frac{a}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} + S_4(s) \\ &= \frac{a}{\pi} \cdot L_{\sigma=0} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{-\sigma} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} + \int_{\sigma}^{+\frac{1}{2}} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} \right\} \\ &= \frac{2a}{\pi} \cdot L_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{+\frac{1}{2}} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Trennt man nun das Integral in zwei Teile, je nachdem $t < s$ oder $s < t$ ist, und entwickelt dann nach Potenzen von $\frac{t}{s}$ in einen und $\frac{s}{t}$ im anderen, so kann man die Integration ausführen:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}^s \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} &= 2 \int_{\sigma}^s \left\{ \frac{1}{s} + \frac{t^2}{3s^3} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n+1)s^{2n+1}} + \cdots \right\} dt \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right] - 2 \left[\frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma^3}{3^2 s^2} + \cdots \right] \\ \int_s^{\frac{1}{2}} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} &= 2 \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right] + s \cdot S_6(s).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}L \int_{\sigma=0}^{\frac{1}{2}} \log \left| \frac{t+s}{t-s} \right| \frac{dt}{t} &= 4 \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right] + s \cdot S_6(s) \\ &= 4 \left[\frac{\pi^2}{8} \right] + s \cdot S_6(s).\end{aligned}$$

Also finden wir schließlich

$$f(s) - f(-s) = \frac{8a}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} + s \cdot S_6(s)$$

und $f(s)$ zeigt also das behauptete Verhalten.

Auf ganz ähnliche Weise findet man, daß die Formeln auch für algebraische Unendlichkeitsstellen erhalten bleiben. Man findet nämlich, daß $f(s) = \frac{1}{|s|^\alpha} \cdot \cos \frac{\alpha\pi}{2}$, in (\mathfrak{Z}_1) eingesetzt, $\varphi(s) = \frac{1}{|s|^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}$ für positives s , $\varphi(s) = \frac{-1}{|s|^\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}$ für negatives s liefert; und umgekehrt liefert dies $\varphi(s)$, in (\mathfrak{Z}_2) eingesetzt, jenes $f(s)$.

Man kann sich auch leicht durch teilweise Integration überzeugen, daß sich Unstetigkeiten in den Ableitungen von $f(s)$ und $\varphi(s)$ genau ebenso reproduzieren.

§ 3.

Mit Hilfe dieser Hilbertschen Formeln (3) können wir gleich zwei Integralgleichungen lösen. Erstens

$$(7) \quad f(s) = \int_0^1 \varphi(t) [a \operatorname{ctg} \pi(s-t) + S(s, t)] dt$$

wo $S(s, t)$ eine endliche und bis auf einzelne Linien stetige und differenzierbare Funktion ist. Multiplizieren wir nämlich die Gleichung mit $-\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \pi(r-s)$ und integrieren in Bezug auf s von 0 bis 1, so bekommen wir

$$(8) \quad f_1(r) = \varphi(r) + \int_0^1 \varphi(t) K(r, t) dt$$

wo

$$f_1(r) = -\frac{1}{a} \int_0^1 f(s) \operatorname{ctg} \pi(r-s) ds$$

und

$$K(r, t) = -1 - \frac{1}{a} \int_0^1 S(s, t) \operatorname{ctg} \pi(r-s) ds$$

beides bekannte Funktionen sind. Hierin ist eine Vertauschung einer Integrationsfolge vorgenommen worden, diese ist aber berechtigt unter den für $S(s, t)$ gemachten Voraussetzungen. Nun ist (8) eine der Fredholmschen Methode vollkommen zugängliche Gleichung, und durch sie wird die Lösung der Gleichung (7) geleistet, falls diese überhaupt eine Lösung besitzt.

§ 4.

Die Gleichung

$$(9) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) [a \operatorname{ctg} \pi(s-t) + S(s, t)] dt$$

behandelt man auf ähnliche Weise. Multiplikation mit $\operatorname{ctg} \pi(r-s)$ und Integration von 0 bis 1 in Bezug auf s gibt

$$(10) \quad f_1(r) = \int_0^1 \varphi(s) \operatorname{ctg} \pi(r-s) ds - a\varphi(r) + a \int_0^1 \varphi(t) dt \\ + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t) S(s, t) \operatorname{ctg} \pi(r-s) dt ds,$$

und wenn wir die Benennung der Integrationsveränderlichen passend vertauschen und die mit a multiplizierte Gleichung (10) von der Gleichung (9) abziehen, so bekommen wir wieder eine der Fredholmschen Methode zugängliche Gleichung, deren Lösung auch eine Lösung von (9) ist, falls diese lösbar ist.

§ 5.

Es war eine Eigenschaft der Hilbertschen Formeln, die Randwerte einer Potentialfunktion auf einer Kreisperipherie anzugeben, ausgedrückt mittelst der Randwerte des konjugierten Potentials. Liegen aber die Randwerte längs der Begrenzung eines anderen Gebietes Ω an Stelle der Kreisperipherie vor, so bedürfen die Formeln einer kleinen Erweiterung, die wir eintreten lassen können, falls wir eine konforme Abbildung des Gebietes Ω auf den Kreis kennen.

Für den Kreis lauteten die Formeln

$$(11) \quad \begin{cases} g(\sigma) = \int_0^1 f(\tau) \operatorname{ctg} \pi(\sigma - \tau) d\tau + \int_0^1 g(\tau) d\tau, \\ f(\sigma) = -\int_0^1 g(\tau) \operatorname{ctg} \pi(\sigma - \tau) d\tau + \int_0^1 f(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Sind nun die Randwerte $\varphi(s)$ einer Potentialfunktion $U(x, y)$ des Gebietes Ω gegeben, so können wir offenbar die Randwerte $\psi(s)$ des konjugierten Potentials $V(x, y)$ auf folgende Weise bekommen. Die konforme Abbildung des Gebietes Ω der $z = x + iy$ -Ebene auf einen Kreis der $\xi = \xi + i\eta$ -Ebene, dessen Peripherie gleich der Längeneinheit (eine Voraussetzung die wir der Bequemlichkeit halber auch für die Länge der Begrenzung von Ω machen), verwandelt $U(x, y)$ in eine Funktion

$$U(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = u(\xi, \eta),$$

die auf der Begrenzung des Kreises die Werte $\varphi(s(\sigma)) = f(\sigma)$ annimmt. Wir bestimmen die Randwerte $g(\sigma)$ des zu $u(\xi, \eta)$ konjugierten Potentials $v(\xi, \eta)$ und machen die zur eben angewandten Transformation inverse Transformation, womit wir $\varphi(\sigma(s)) = \psi(s)$ bekommen, da bei einer solchen Transformation konjugierte Potentiale ebensolche bleiben. All' diese Operationen können wir mit den Formeln (11) vereinigen, falls wir nur die Abbildung der Randpunkte $\sigma = \sigma(s)$ ermittelt haben:

$$(12_1) \quad \psi(s) = \int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi[\sigma(s) - \sigma(\tau)] \sigma'(\tau) d\tau + \int_0^1 \psi(t) \sigma'(\tau) d\tau,$$

$$(12_2) \quad \varphi(s) = -\int_0^1 \psi(t) \operatorname{ctg} \pi[\sigma(s) - \sigma(\tau)] \sigma'(\tau) d\tau + \int_0^1 \varphi(t) \sigma'(\tau) d\tau.$$

Die Funktion $\sigma = \sigma(s)$ wird durch die konforme Abbildung bestimmt. Ist die Funktion, welche die Abbildung vermittelt

$$z = F(\xi) = F(\varrho e^{i\vartheta})$$

so ist

$$dz = F'(\xi) d\xi,$$

und wenn wir die konjugiert imaginäre Größe durch einen Strich andeuten,

$$dz \cdot \overline{dz} = F'(\xi) \cdot \overline{F'(\xi)} \cdot d\xi \cdot \overline{d\xi}$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = F'(\xi) \cdot \overline{F'(\xi)} (d\xi^2 + d\eta^2)$$

d. h.

$$ds^2 = [F'(\xi) \cdot \overline{F'(\xi)}]_{\varrho = \frac{1}{2\pi}} d\sigma^2$$

also

$$(12_3) \quad s = \int_0^\sigma [F'(\xi) \cdot \overline{F'(\xi)}]_{\varrho=\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2}} d\sigma,$$

dies gibt die verlangte Beziehung zwischen s und σ an.

Die Formeln (12) sind also die erweiterten Hilbertschen Formeln, welche auch gerade wie (3) ein reziprokes Verhalten zeigen. Spezielle Gebiete liefern sehr interessante Formelpaare, wie z. B. die Halbebene:

$$\begin{cases} \psi(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \frac{1+st}{s-t} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \frac{dt}{1+t^2}, \\ \varphi(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \frac{1+st}{s-t} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \frac{dt}{1+t^2}. \\ s = \tan \pi \sigma. \end{cases}$$

Wenn man nach der Grenze der Gültigkeit der Formeln (12) fragt, so sieht man, indem man sie als Formeln in σ und τ auffaßt, daß $\varphi(s(\sigma))$ und $\psi(s(\sigma))$ stückweise stetige und differentiiierbare Funktionen von σ sein müssen, welche durchweg integrierbar sind. (Cf. Formeln (3)). Wir nehmen an, daß sie solche Funktionen von s seien. Falls nun die Begrenzung von Ω in Strecken zerfällt, längs deren sich die Tangente stetig ändert, so ist $s(\sigma)$ stückweise stetig und differentiiierbar in σ ; dieselben Eigenschaften folgen dann aber auch für $\varphi(s(\sigma))$ und $\psi(s(\sigma))$. Was die Integrierbarkeit von diesen Funktionen anbelangt, so sieht man, daß $\varphi(s) \sigma'(s)$ und $\psi(s) \sigma'(s)$ integrierbar sein müssen, was nur in den Punkten, wo die Tangente an die Begrenzungskurve einen Sprung erleidet, eine neue *Bedingung* mit sich bringt: wenn die Tangente durch einen Winkel $\alpha\pi$

springt, so müssen $\varphi(s) s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und $\psi(s) s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ mit s verschwinden. Insbesondere haben wir *keine* neueren Bedingungen, falls alle Winkel der Berandung ihre Spitzen nach außen gekehrt haben.

§ 6.

Eine dritte Art mit Unstetigkeiten behafteter Integralgleichungen tritt im Fall der Doppelbelegung einer Kurve mit Ecken auf, obgleich ihre Anwendung nicht auf dies Gebiet beschränkt ist. Nehmen wir an, zwei analytische Kurvenstücke, die einen Teil der Begrenzung von Ω ausmachen, begegnen sich unter einem Winkel $\alpha\pi$, und rechnen wir die Bogenlänge s der Randkurve, $x = x(s)$, $y = y(s)$, von diesem Punkte aus. Dann findet man für $K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \arctg \frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)}$ die folgende Gestalt:

für $s < 0, t < 0$ oder für $s > 0, t > 0$

ist $K(s, t)$ eine stetige, analytische Funktion, für $s < 0, t > 0$ ist

$$K(s, t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \cdot \frac{-s}{s^2 - 2st \cos \alpha \pi + t^2} + E_-(s, t),$$

für $s > 0, t < 0$ ist

$$K(s, t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \cdot \frac{s}{s^2 - 2st \cos \alpha \pi + t^2} + E_+(s, t)$$

wo $E_-(s, t)$ und $E_+(s, t)$ zwei endliche Funktionen sind. Speziell für rechte Winkel hat man $K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\pm s}{s^2 + t^2} + E_{\pm}(s, t)$, wenn s und t entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Integralgleichung

$$(13) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt,$$

wo $K(s, t)$ die obige Form hat, läßt sich nun mittelst der erweiterten Hilbertschen Formeln lösen. Hierin sind $\pi f(s)$ die Randwerte der Potentialfunktion, welche die Belegung $\varphi(s)$ im Innern von Ω hervorruft. Sind $\pi f_a(s)$ die Randwerte der Potentialfunktion, welche $\varphi(s)$ im Außengebiet hervorrufft, so hat man bekanntlich nach der Potentialtheorie:

$$(14) \quad \varphi(s) = \frac{f(s) - f_a(s)}{2}.$$

Die Gleichung ist also gelöst, sobald wir $f_a(s)$ ermittelt haben. Das Gebiet, für das das vorliegende $K(s, t)$ charakteristisch ist, möge von Teilen analytischer Kurven begrenzt werden. Es läßt sich also konform auf den Kreis abbilden, und wir können die Hilbertschen Formeln aufstellen, sowohl für das Gebiet Ω , wie für das Gebiet Ω_a , welches aus der Ebene entsteht, wenn man Ω davon ausschneidet. Dann betrachten wir die zwei Potentialfunktionen $u_i(x, y)$ und $u_a(x, y)$, welche $\varphi(s)$ in Ω und in Ω_a hervorruft, und die zu ihnen konjugierten Potentiale $v_i(x, y)$ und $v_a(x, y)$. Mittelst der Hilbertschen Formeln bekommen wir die Rand-

werte $v_i(s)$ aus $f(s)$. Dann erhalten wir, da am Rande $\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_a}{\partial n}$, folglich auch $\frac{\partial v_i}{\partial s} = \frac{\partial v_a}{\partial s}$ ist, durch Integration:

$$(15) \quad v_a(s) = v_i(s) + c.$$

Eine nochmalige Anwendung der Hilbertschen Formeln liefert, bis auf eine Konstante, die man durch Einsetzen in (12) und (13) bestimmen kann, $f_a(s)$. Nur ist es wichtig zu bemerken, daß man auf die Gleichung (15) aus der vorhergehenden schließen kann; denn es könnte möglich sein, daß die Konstante c nur für gewisse Strecken und nicht für

den ganzen Rand denselben Wert behielte, da wir nur von $v_i(s)$ und $v_a(s)$ wissen, daß sie streckenweise stetig sind. Wir wollen aber zeigen, daß $v_a(s)$ immer dieselben Sprünge erleidet wie $v_i(s)$, daß also c durchweg konstant ist.

Es erleide also $\frac{v_i(s)}{\pi}$ einen Sprung

$$\lim_{s=0} \left(\frac{v_i(s)}{\pi} - \frac{v_i(-s)}{\pi} \right) = a$$

an der Stelle $s=0$, wobei wir, um ganz allgemein zu sein, annehmen, daß die Tangente an die Randkurve von Ω einen Sprung durch den Winkel $\alpha\pi$ macht. Wollen wir dann eine Stelle betrachten, wo die Randlinie stetig gekrümmt ist, so brauchen wir nur $\alpha=0$ zu setzen. Der vorausgesetzte Sprung von $\frac{v_i(s)}{\pi}$ hat nun die Bedeutung, daß $f(s)$ im Punkte $s=0$ logarithmisch unendlich wird wie

$$-\frac{a}{\pi(1-\alpha)} \log |s|$$

$\left(\frac{v_i(s)}{\pi} = \varphi(s)\right)$ springt um a , $\varphi(s(\sigma))$ ebenfalls, also wird $f(s(\sigma))$ unendlich wie $-\frac{a}{\pi} \log |\sigma| = -\frac{a}{\pi(1-\alpha)} \log |s|$, da in diesem Punkte $s = \sigma^{1-\alpha} + \dots$.

Springt dagegen $\frac{v_a(s)}{\pi}$ um b , so wird $f_a(s)$ unendlich wie

$$+\frac{b}{\pi(1+\alpha)} \log |s|$$

(da für das Außengebiet $s = \sigma^{1+\alpha} + \dots$; das positive Vorzeichen kommt daher, daß der positive Umlaufssinn der Begrenzung von Ω_a dem der Begrenzung von Ω entgegengesetzt ist). Wenn wir nun diese Werte für $f(s)$ und $f_a(s)$ in (14) und dann das so gefundene $\varphi(s)$ in (13) einsetzen und die Glieder betrachten, welche logarithmisch unendlich werden, so haben wir

$$(16) \quad f(s) + f_a(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (f(t) - f_a(t)) K(s, t) dt$$

worin links

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{b}{1+\alpha} - \frac{a}{1-\alpha} \right)$$

der Koeffizient von $\log |s|$ ist, und wenn wir etwa s positiv annehmen, so ist rechts das gesuchte Glied enthalten in

$$\frac{1}{\pi^2} \left(-\frac{a}{1-\alpha} - \frac{b}{1+\alpha} \right) \int_{-\frac{1}{2}}^0 \log |t| \frac{\sin \alpha\pi \cdot s}{s^2 - 2st \cos \alpha\pi + t^2} dt.$$

Das Integral ermitteln wir nun, indem wir das Intervall teilen:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{2}}^0 \log |t| \frac{\sin \alpha \pi \cdot s}{s^2 - 2st \cot \alpha \pi + t^2} dt \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{-s} \log |t| \frac{\sin \alpha \pi \cdot d\left(\frac{s}{t}\right)}{1 - 2 \frac{s}{t} \cos \alpha \pi + \frac{s^2}{t^2}} + \int_{-s}^0 \log |t| \frac{\sin \alpha \pi \cdot d\left(\frac{t}{s}\right)}{1 - 2 \frac{t}{s} \cos \alpha \pi + \frac{t^2}{s^2}}. \end{aligned}$$

Die Substitutionen $\frac{s}{t} = x$ und $\frac{t}{s} = x$ geben dann

$$\begin{aligned} & - \int_{-2s}^{-1} (\log s - \log |x|) \frac{d\left(\frac{x}{\sin \alpha \pi}\right)}{1 + \left(\frac{x}{\sin \alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi\right)^2} \\ & + \int_{-1}^0 (\log s + \log |x|) \frac{d\left(\frac{x}{\sin \alpha \pi}\right)}{1 + \left(\frac{x}{\sin \alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi\right)^2} \end{aligned}$$

und der Teil hiervon, welcher für $s = 0$ logarithmisch unendlich wird, ist

$$2 \log s \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sin \alpha \pi} - \operatorname{ctg} \alpha \pi \right) \right]_{-1}^0 = \alpha \pi \log s.$$

Also ist der Koeffizient von $\log s$ rechts in der Gleichung (16),

$$\frac{\alpha}{\pi} \left(-\frac{a}{1-\alpha} - \frac{b}{1+\alpha} \right)$$

welches nur dann dem Koeffizienten von $\log s$ auf der linken Seite gleich wird, falls $a = b$ ist.

§ 7.

Um nun die Gleichung

$$(17) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) [K(s, t) + E(s, t)] dt$$

zu lösen, wo $K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)}$, also Unstetigkeiten der S. 452 betrachteten Form hat, wobei $E(s, t)$ eine endliche, bis auf einzelne Linien stetige und differentiiierbare Funktion ihrer beiden Argumente ist, brauchen wir die Lösung von

$$(18) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt,$$

wo $f(s)$ die spezielle, einen Parameter enthaltende Form $K(s, t)$ hat. Die Lösung $\varphi(s)$ möge mit $R(s, t)$ bezeichnet werden, so daß wir die Gleichung haben:

$$(19) \quad K(s, t) = R(s, t) + \int_0^1 R(r, t) K(s, r) dr.$$

Um die Lösung $R(s, t)$ nach dem vorigen Paragraphen erlangen zu können, müssen wir wissen, daß $K(s, t)$ für alle in Betracht kommenden Werte von t eine streckenweise stetige und differentiiierbare Funktion von s ist, welche auch Bedingungen in Bezug auf die Integrabilität unterliegen muß. Man findet aber, daß für die Werte $t = s_i$, welche den Ecken von Ω entsprechen, $K(s, t)$ in Bezug auf s analytisch und auch sogar für $t = s_i$ stetig ist, ausgenommen für $s = s_i$. $R(s, t)$ hat also auch diese Eigenschaften und man findet, daß auch in Bezug auf t $R(s, t)$ sich genau so verhält wie $K(s, t)$.

Nun verifiziert man leicht durch einsetzen, daß

$$(20) \quad \varphi(s) = f(s) - \int_0^1 f(t) R(s, t) dt$$

die Gleichung (18) löst. Ferner ist sie die einzige Lösung; denn der Unterschied zwischen zwei verschiedenen Lösungen würde der Gleichung

$$0 = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt$$

genügen, was, wie die Potentialtheorie zeigt, bei nichtverschwindendem $\varphi(s)$ unmöglich ist.

Wenn wir nun umgekehrt (18) in (20) einsetzen, so bekommen wir

$$\int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt = \int_0^1 \varphi(t) R(s, t) dt + \int_0^1 \varphi(r) K(t, r) R(s, t) dr dt$$

für beliebiges $\varphi(t)$, — also

$$(21) \quad K(s, t) = R(s, t) + \int_0^1 K(r, t) R(s, r) dr.$$

Mittelst dieser Formel können wir nun die Gleichung (17) lösen. Schreiben wir nämlich in dieser Gleichung r für s , multiplizieren $R(s, r)$ und

integrieren von 0 bis 1 in Bezug auf r , so haben wir, wenn wir (21) beachten:

$$f_1(s) = \int_0^1 \varphi(t) K(s, t) dt + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t) E(r, t) R(s, r) dr dt,$$

oder wenn wir diese Gleichung von (17) abziehen:

$$f(s) - f_1(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) [E(s, t) - \int_0^1 E(r, t) R(s, r) dr] dt;$$

was eine der Fredholmschen Methode zugängliche Gleichung ist.
