

DI UN NUOVO MODELLO DI ELETTROMETRO A QUADRANTI E DELL'APPLICAZIONE DELLE CORRENTI DI FOUCAULT ALLO SMORZAMENTO DELLE OSCILLAZIONI DEGLI ELETTROMETRI; NOTA DEL PROFESSOR LUIGI DONATI ¹⁾).

(Mem. dell' Accad. delle Scienze di Bologna t. VIII).

III.

L'idea da cui fui guidato in questo studio si fu quella di ricercare se non fosse possibile, lasciando intatte tutte le parti che propriamente costituiscono l'elettrometro, di sostituire alle specie di freno rappresentato dalla laminetta di platino che si muove in seno all'acido solforico un freno, dirò così, *elettromagnetico* costituito da un pezzo metallico conduttore che si muove in un campo magnetico. Nessun dubbio naturalmente sul principio in sè: ma si trattava di vedere se la cosa era pratica; vale a dire se era possibile per questa via di conseguire uno smorzamento sufficiente, con mezzi semplici e conciliabili colle funzioni di un apparecchio elettrometrico. Su ciò la risposta doveva chiedersi direttamente alla esperienza; e così io feci, servendomi a tal ufficio dell'elettrometro che ho descritto or ora.

Per adattarlo più comodamente a questo studio ho sostituito alla sospensione bifilare l'unifilare con sottile filo metallico, cambiando l'apparato di sospensione S nell'altro rappresentato dalla figura III. Il pezzo metallico *t* di attacco del filo è portato da un sostegno isolante *i*, ed è in relazione coll'esterno mediante una asticella metallica *h* ripiegata come si vede nella figura, la quale passa attraverso un foro del coperchio, senza toccarlo, per la solita ragione dell'isolamento. Un otturatore scorrevole lungo l'asticella serve a chiudere il foro quando non si adopera l'istrumento. Il tutto è sorretto dal coperchio del tubo, e può alzarsi od abbassarsi a mezzo di una vite di richiamo, come si vede dalla figura.

Ho poi tolto la parte inferiore C' della cassa cilindrica ed il trepiede; ed ho fatto riposare provvisoriamente l'istrumento

1) *Continuaz. e fine.* V. pag 61.

sopra una platina di vetro che fa da coperchio ad un vaso cilindrico a bordo smerigliato. La platina ha nel mezzo un'apertura circolare attraverso alla quale passa il prolungamento dell'ago che scende nel vaso inferiore, dove si produce il campo magnetico, e che porta in basso l'appendice metallica *s* destinata all'ufficio di freno elettromagnetico. Il detto prolungamento consiste in un'asticella di vetro, onde l'appendice *s* rimane isolata dall'ago, il quale comunica con l'esterno dall'alto per mezzo del filo metallico di sospensione. Ne è risultato così un apparecchio provvisorio di studio rappresentato schematicamente dalla fig. II.

Nelle prime prove mi servii per la produzione del campo magnetico di una elettrocalamita. Ma ciò solo in via di scandaglio: poichè è chiaro che sarebbe una soluzione poco pratica quella che implicasse l'uso di elettrocalamite. Adoperai un'elettrocalamita di forma speciale fatta costruire apposta per tale ufficio, i cui rocchetti erano fasciati esternamente da un involucro metallico, che era mantenuto in comunicazione col suolo unitamente al nucleo di ferro, per evitare azioni elettrostatiche. Essa era contenuta nell'interno del vaso, e i fili adduttori della corrente passavano attraverso fori praticati nella parete. Costatai subito che si otteneva già uno smorzamento sufficiente anche con correnti relativamente deboli, cioè con un campo magnetico di moderata intensità; e riconobbi la possibilità di risolvere il problema con delle calamite permanenti di moderate dimensioni, tali cioè da non riuscire troppo ingombranti e potersi facilmente adattare a tutti gli ordinarii elettrometri. Prendendo allora a sperimentare con calamite d'acciaio, dopo una serie di prove fatte variando la forma e le dimensioni sia delle calamite sia dell'appendice, venni infine alla disposizione indicata nella figura II, che è quella che mi ha servito per le ultime determinazioni.

L'appendice o freno consiste in un pezzetto *s* di alluminio a forma di piastrina rettangolare molto allungata e stretta, che si muove fra le branche *m, m* di una calamita a ferro di cavallo, ravvicinate fra loro in guisa che fra le superficie polari, che sono piane, parallele e verticali, interceda un piccolo spazio, giusto quanto basta per lasciare libero movimento intorno all'asse verticale alla piastrina *s*; la quale nella posizione di riposo dell'ago si dispone nel piano della calamita, cioè parallelamente alle linee

di forza. La forma adottata per l'appendice ha per iscopo di diminuire quanto è possibile il suo momento d'inerzia e di accrescere l'intensità del campo magnetico ravvicinando i poli della calamita. Invece di una piastrina serve egualmente bene anche un cilindretto, col quale non vi è bisogno di orientamento; e quanto al metallo, invece dell'alluminio (che è quello che a parità di peso ha la minore resistenza elettrica) può usarsi anche il rame o l'argento.

Per precisare le condizioni del fenomeno giova ricorrere alla teoria delle oscillazioni di un sistema (ago) soggetto a smorzamento. Indicando con

M il momento d'inerzia dell'ago,
 L la forza di torsione,
 F la forza di smorzamento per l'unità di velocità angolare,
 ξ l'angolo di deviazione,
 t il tempo,

si ha per definire il movimento la nota equazione differenziale

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + F \frac{d\xi}{dt} + L\xi = 0$$

che integrata, e determinando le costanti con la condizione che

$$\text{per } t=0 \quad \text{sia} \quad \xi = \xi_0, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

dà

$$\xi = \xi_0 \left\{ \frac{x_2}{x_1 - x_2} e^{x_1 t} - \frac{x_1}{x_1 - x_2} e^{x_2 t} \right\}$$

essendo x_1 e x_2 le radici dell'equazione

$$Mx^2 + Fx + L = 0.$$

indicando con R il modulo di $\sqrt{F^2 - 4LM}$, poniamo

$$(1) \quad F/2M = \alpha, \quad R/2M = \beta;$$

e distinguiamo i tre casi:

$$\text{di } F^2 - 4LM < 0, \quad \text{di } F^2 - 4LM = 0, \quad \text{di } F^2 - 4LM > 0.$$

Nel 1° caso le radici x_1 e x_2 sono immaginarie

$$\left(x_1 = -\alpha + i\beta, \quad x_2 = -\alpha - i\beta: \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{L}{M} \right)$$

e si ha

$$(I) \quad \xi = \xi_0 e^{-\alpha t} \left\{ \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha t \right\}.$$

In questo caso il moto è oscillatorio, e i massimi delle elongazioni da una parte e dall'altra della posizione di equilibrio corrispondono a tempi t_n nei quali sia

$$\sin \beta t_n = 0 \quad \text{cioè} \quad t_n = \frac{n\pi}{\beta} \quad (n \text{ numero intero}).$$

La durata T di un'oscillazione ($T = t_n - t_{n-1}$) è data da

$$(2) \quad T = \frac{\pi}{\beta};$$

e l'ampiezza delle elongazioni corrispondenti ai tempi t_n , da

$$\xi_n = \xi_0 e^{-\alpha t_n} = \xi_0 e^{-n\pi\lambda}.$$

Il rapporto ξ_{n-1}/ξ_n di due ampiezze successive è costante e uguale a $e^{\lambda T}$, e il *decremento logaritmico* λ è

$$(3) \quad \lambda = \alpha T.$$

Per $F=0$ ($\alpha=0$, $\beta=\sqrt{\frac{L}{M}}$) si ha il moto oscillatorio libero, cioè

senza smorzamento. La sua equazione diviene

$$(I)_a \quad \xi = \xi_0 \cos \beta t \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{L}{M}} \right).$$

L'ampiezza delle elongazioni è costante ($\lambda=0$) ed uguale a ξ_0 , e la durata τ di un'oscillazione libera è data da

$$(4) \quad \tau = \pi \sqrt{\frac{M}{L}}.$$

Per F crescente da 0 fino a $2\sqrt{LM}$, β decresce, e T e λ crescono fino a divenire infiniti per $F=2\sqrt{LM}$.

A questo punto si è nel 2° caso, che rappresenta il limite fra gli altri due. Le radici sono eguali

$$(x_1 = x_2 = \alpha; \beta = 0, \alpha = \sqrt{\frac{L}{M}});$$

e il movimento la cui equazione si riduce a

$$(II) \quad \xi = \xi_0 e^{-\alpha t} (1 + \alpha t), \quad (\alpha = \sqrt{\frac{L}{M}})$$

non è più oscillatorio ma *aperiodico* (periodo infinito).

Per valori di F ancora più grandi si entra nel 3° caso. Le radici sono reali ($x_1 = -\alpha + \beta$, $x_2 = -\alpha - \beta$: $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{L}{M}$), e si ha un moto *aperiodico* (periodo immaginario) via via più lento, rappresentato dall'equazione

$$(III) \quad \xi = \xi_0 e^{-\alpha t} \left\{ \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right\}$$

la quale differisce dalla (I) per ciò che al posto delle funzioni circolari compariscono funzioni iperboliche.

Ciò ricordato, portiamo in particolare la nostra attenzione sul 1° caso, in cui, come si è detto, il moto è oscillatorio. Esso è definito dalla durata di oscillazione T e dal decremento logaritmico λ : quantità che si possono rilevare direttamente dalla osservazione del movimento stesso, e che essendo collegate mediante le equazioni (2) e (3) alle quantità α e β , possono servire alla determinazione di queste ultime e quindi per le (1) alla determinazione di due delle tre quantità L, M, F, data che sia la terza. Più in generale, il movimento può esser definito a mezzo, di due parametri che si possono far dipendere dai dati di osservazione, e per mezzo dei quali, data ad arbitrio una delle quantità L, M, F, si possono determinare le altre due. Dalle due equazioni nominate poi associandole fra loro e con la (4) che dà la durata d'oscillazione libera, e tenendo conto delle (1), si possono derivarne altre. Così si ha combinando le (2) e (3)

$$T = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{M}{L}} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}.$$

Introducendo in questa la durata dell'oscillazione libera data dalla (4) e confrontando quindi con la (3), si hanno le altre due

$$T = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}, \quad \alpha\tau = \frac{\pi\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}};$$

le quali ponendo per semplicità

$$(5) \quad \sigma = \frac{\pi\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

divengono

$$(6) \quad T = \frac{\lambda\tau}{\sigma},$$

$$(7) \quad \alpha\tau = \sigma.$$

Ponendo invece

$$\text{tang } \phi = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \left(\cos \phi = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} = \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \text{sen } \phi = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} = \frac{\sigma}{\pi} \right),$$

le stesse equazioni prendono l'altra forma, che giova a chiarirne il significato:

$$T = \frac{\tau}{\cos \phi}, \quad \alpha\tau = \pi \text{ sen } \phi,$$

dove ϕ rappresenta un certo angolo individuato dal valore di λ , come l'altra quantità σ , e che può quindi come λ , o come σ servire a definire il grado di smorzamento.

Queste relazioni, con altre che si potrebbero parimenti dedurre, forniscono materia ad una facile discussione delle condizioni del movimento. A me basterà rilevare alcuni punti più strettamente attinenti al mio soggetto: al qual uopo mi gioverà prendere come parametri del movimento le quantità α e τ , o ciò che torna lo stesso, i rapporti F/M e L/M da cui queste dipendono (eq. (1) e (4)). E anzitutto apparisce dalla (7) che il grado di smorzamento (definito come si è detto testè dal valore di λ o σ) dipende dal valore del prodotto $\alpha\tau$, e che è sempre possibile (teoricamente) di conseguire quel grado che si vuole determinando convenientemente il prodotto stesso, il quale cresce col grado di smorzamento dal valore 0, che corrisponde al movimento libero, cioè a $\lambda = 0$, fino al valore limite π che corri-

sponde a $\lambda = \infty$ ossia al movimento aperiodico. Dei due fattori α e τ , o dei corrispondenti rapporti F/M e L/M , uno si potrà in ogni caso assegnare a piacere, e basterà poi determinare corrispondentemente l'altro. Così si avrà per un dato valore di α , o del rapporto F/M , il valore della forza di torsione L corrispondente al voluto grado di smorzamento espresso da

$$(7)_a \quad L = \frac{\pi^2 \alpha^2}{\sigma^2} M;$$

e per un dato valore di τ , o del rapporto L/M , il valore corrispondente della forza di smorzamento F , da

$$(7)_b \quad F = \frac{2\sigma}{\tau} M.$$

È però da osservare che qualora per accrescere il grado di smorzamento si provveda all'aumento del prodotto $\alpha\tau$ facendo crescere τ , se da un lato riuscirà minore il numero di oscillazioni da compiersi dall'ago prima di arrestarsi sensibilmente nella sua posizione di equilibrio, crescerà al tempo stesso la loro durata individuale. Ora nelle applicazioni agli strumenti di misura non è tanto il grado di smorzamento in sè che importa, quanto il ridurre al minimo la durata effettiva di un'osservazione, cioè il tempo dentro il quale l'ago si arresta, qualunque sia d'altronde il numero di oscillazioni in esso tempo compiute; e però converrà soprattutto aver riguardo a tale durata.

Per istudiare la questione sotto questo punto di vista, proponiamoci in generale di trovare l'espressione del tempo θ occorrente affinchè l'elongazione sia ridotta inferiore ad una determinata frazione ε del suo valore iniziale, di guisa che

$$\text{per } t \geq \theta \quad \text{sia sempre } \xi \leq \varepsilon \xi_0:$$

d'onde poi quando si prenda ε così piccolo che $\varepsilon \xi_0$ risulti insensibile, si avrà per θ la durata pratica di un'osservazione. La detta condizione sarà soddisfatta prendendo $\theta = nT$ (n numero intero) se alla fine delle n^{ma} oscillazione l'ampiezza ξ_n , rappresentata da $e^{-n\lambda} \xi_0$, sia già uguale o inferiore a $\varepsilon \xi_0$, cioè si abbia $n\lambda \geq \log nep 1/\varepsilon$. E se intendiamo che n sia il più piccolo nu-

mero per cui questo accade, sarà inoltre $(n-1) \lambda < \log \text{nep } 1/\epsilon$:
onde ponendo $\omega = \log \text{nep } 1/\epsilon$, avremo per definire θ

$$\theta = nT \quad \text{con} \quad \frac{\omega}{n} \leq \lambda < \frac{\omega}{n-1} ;$$

ovvero sostituendo per T il valore λ/α dato dalla (3).

$$(8) \quad \theta = \frac{n\lambda}{\alpha} \quad \text{con} \quad \omega \leq n\lambda < \frac{n}{n-1} \omega .$$

Il valore del prodotto $n\lambda$ determina ciò che possiamo chiamare il *grado di riduzione* dell'ampiezza delle oscillazioni: e si vede che per un dato grado di riduzione il valore di θ non dipende che da α ossia dal rapporto F/M , ed è quindi indipendente dalla forza di torsione L . Il che va inteso nel senso che variando L varia la durata T di un'oscillazione e al tempo stesso anche il grado di smorzamento, e quindi il numero n di oscillazioni occorrenti a conseguire il dato grado di riduzione, in guisa che il prodotto nT conserva lo stesso valore.

A chiarir bene la cosa, osserviamo che indicando con $\sigma_n(\omega)$ o semplicemente σ_n i valori (5) di σ in cui si ponga $\lambda = \omega/n$, cioè

$$(5)' \quad \sigma_n = \frac{\pi\omega}{\sqrt{n^2\pi^2 + \omega^2}} ,$$

se, avuto riguardo alla (7), fra tutti i valori del prodotto $\alpha\tau$ relativi ai diversi gradi di smorzamento consideriamo i valori corrispondenti a $\lambda = \omega/n$, che son quelli pei quali $\xi_n = \epsilon\xi_0$ (pei quali cioè alla fine della n^{ma} oscillazione l'ampiezza è ridotta precisamente uguale alla frazione assegnata dal valore primitivo), sarà per questi

$$(7)' \quad \alpha\tau = \sigma_n \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Essi poi si potranno avere prendendo

a) per un dato α i valori di τ nella successione σ_n/α ;

b) per un dato τ i valori di α nella successione σ_n/τ .

Indicando con $\theta_n(\omega)$ o θ_n i rispettivi valori di θ , sarà

$$(8)' \quad \theta_n = \frac{\omega}{\alpha} :$$

e si vede che per un dato valore di ω il numero n delle oscillazioni (definito dal valore di σ_n) dipende dal prodotto $\alpha\tau$, e la loro durata complessiva θ_n dipende solo da α . Mutando τ si muta n rimanendo invariato θ_n : e in questo caso i diversi valori di τ sono quelli forniti dalla (7)' per un dato valore di α e appartenenti alla successione a), e si ha

$$(7)'_a \quad \tau_n = \frac{\sigma_n}{\alpha} \quad \text{ovvero} \quad L_n = \frac{\pi^2 \alpha^2}{\sigma_n^2} M, \quad \text{con} \quad \theta_n = \frac{\omega}{\alpha} = \text{cost.}$$

Mutando invece α , θ_n cangia con n ; la (7)' fornisce i successivi valori di α appartenenti alla successione b), e con questi la (8)' dà i corrispondenti valori di θ_n ; e si ha

$$(7)'_b \quad \alpha_n = \frac{\sigma_n}{\tau} \quad \text{ovvero} \quad F_n = \frac{2\sigma_n}{\tau} M, \quad \text{con} \quad \theta_n = \frac{\omega}{\alpha_n} = \frac{\omega}{\sigma_n} \tau.$$

In queste equazioni l'indice n indica per le quantità L e F come per α e τ i valori corrispondenti ai diversi numeri, e si è lasciata senz'indice la M riferendosi in particolare al caso che si attribuisca al momento d'inerzia un determinato valore e che si tratti solo di far variare la forza di torsione o la forza di smorzamento.

Tutto ciò per il caso che debba essere $n\lambda = \omega$, che cioè, come si è detto, alla fine della n .^{ma} oscillazione il grado di riduzione definito da $n\lambda$ corrisponda esattamente al limite assegnato ω . Riportandoci ora al caso più generale di dianzi che è definito dalla disuguaglianza $\omega \leq n\lambda < \frac{n}{n-1} \omega$, se poniamo $n\lambda = z$, avremo al posto della (7)'

$$\alpha\tau = \sigma_n(z), \quad \text{con} \quad \sigma_n(\omega) \leq \sigma_n(z) < \sigma_{n-1}(\omega),$$

e per definire il valore di θ

$$\theta = \frac{z}{\alpha};$$

e al posto delle (7)'_a, (7)'_b equazioni analoghe dove s'intenda z sostituito ad ω . Il prodotto $\alpha\tau$, non più limitato alla successione di valori $\sigma_1(\omega)$, $\sigma_2(\omega)$, può prendere tutti i valori intermedi, ed ai valori $\sigma_n(z)$ compresi nell'intervallo fra $\sigma_n(\omega)$ e $\sigma_{n-1}(\omega)$ cor-

risponde un numero di oscillazioni uguale a n ed un grado di riduzione z variabile fra ω e $\frac{n}{n-1} \omega$ (per $n = 1$ non esiste per z , che in questo caso è uguale a λ , che il limite inferiore ω , e l'altro risulta infinita, vale a dire che λ può essere preso fra ω e ∞). Il valore di esso prodotto determina ancora il numero di oscillazioni, e determina inoltre, dentro gli accennati limiti, il valore di z ; mentre per ogni dato valore di z la durata θ dipende solo da α .

Gioverà per fissare le idee qualche applicazione numerica. E anzitutto sarà utile avere un prospetto dei numeri che rappresentano i valori di σ corrispondenti ai diversi valori di λ . Siccome poi già per $\lambda = 7$ e al di là si ha $e^\lambda > 1000$, cioè il rapporto di ampiezza di due oscillazioni consecutive è ridotto inferiore a un millesimo e quindi il moto si può riguardare come sensibilmente aperiodico, non occorrerà occuparci dei valori superiori di λ . E quanto ai piccoli valori di λ ed inferiori a 1, osserviamo che si può ritenere σ uguale sensibilmente a λ , la differenza salendo appena a $1/20$ per $\lambda = 1$. Pei valori di λ da 1 a 7 l'andamento dei valori di σ è indicato dai numeri della tabella seguente, insieme a quelli di e^λ , che danno il rapporto d'ampiezza di due oscillazioni consecutive, e di λ/σ che servono (6) al calcolo di T.

TABELLA I.

λ	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
e^λ	2,72	4,48	7,39	12,18	20,1	33,1	54,6	90,0	148	244	403	665	1096
σ	0,95	1,35	1,69	1,96	2,17	2,34	2,47	2,58	2,66	2,73	2,78	2,83	2,87
λ/σ	1,05	1,11	1,19	1,28	1,39	1,50	1,62	1,75	1,88	2,02	2,16	2,30	2,44

Ciò posto prendiamo ad applicazione dello studio precedente l'esempio di $\varepsilon = 1/403$ (in cifra tonda $\varepsilon = 1/400$) per il quale si ha $\omega = \log \text{nep } 403 = 6$. Questo valore di ε si può intendere che corrisponda all'incirca al limite pratico di un'osservazione poichè quando i movimenti dell'ago saranno ridotti al di sotto

di 1/400 dell'ampiezza iniziale, si potranno generalmente trascurare, e si potrà riguardare l'osservazione come compiuta. Con esso si ha poi il vantaggio che essendo $\omega = 6$ si hanno numeri semplicissimi per i valori λ_n di λ pei quali l'osservazione si compie in n oscillazioni, che sono come sappiamo $\lambda_n = \omega/n$. I corrispondenti valori σ_n di σ risultano espressi (5)', ponendo per ω il detto valore, da $\sigma_n = 6/\sqrt{n^2 + 3,65}$. Con questi valori le equazioni (7)_a', (7)_b' permettono di calcolare facilmente i valori successivi di una delle quantità α e τ , o di uno dei rapporti F/M , L/M , dato che sia il valore (costante) dell'altro, ed i valori corrispondenti di θ_n cioè della durata dell'osservazione.

Si trova così che per dati valori di M e F i valori successivi L_n della forza di torsione che sono (7)_a' inversamente proporzionali al quadrato di σ_n , crescono con n proporzionalmente a $n^2 + 3,65$, ossia per $n = 1, 2, 3, \dots$ come i numeri

$$4,65; \quad 7,65; \quad 12,65; \dots$$

Si trovano poi (7)_b' per un dato valore di τ , ossia dal rapporto L/M , i valori F_n della forza di smorzamento corrispondenti a n oscillazioni e le relative durate θ_n date da

$$F_n = 2\sigma_n \frac{M}{\tau} \quad \theta_n = \frac{\omega}{\sigma_n} \tau$$

dove a ω e σ_n vanno attribuiti i valori predetti; il che dà per i successivi valori di σ_n e di ω/σ_n i numeri indicati nella tabella seguente insieme con quelli che rappresentano i valori di λ_n .

TABELLA II.

$$\varepsilon = 1/400, \quad \omega = 6, \quad \sigma_n = 6/\sqrt{n^2 + 3,65}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_n	6	3	2	1,5	1,2	1	0,86	0,75
σ_n	2,79	2,17	1,69	1,35	1,12	0,95	0,83	0,73
ω/σ_n	2,15	2,77	3,56	4,43	5,35	6,30	7,25	8,22

Per $n = 1$ si ha il caso dell'osservazione ridotta alla prima escursione, cioè del moto *praticamente* aperiodico. Si ha allora

$\lambda_1 = \omega = 6$; $\sigma_1 = 2,8$, cui corrisponde per la forza di smorzamento il *limite pratico*

$$F_1 = 5,6 \frac{M}{r},$$

che rappresenta circa 9/10 del valore del vero limite

$$\lim F = 2\pi \frac{M}{r}$$

corrispondente a $\lambda = \infty$, $\sigma = \pi$, cioè al moto rigorosamente aperiodico. Si ha poi in questo caso $\theta_1 = 2,15 \tau$, vale a dire la *durata di osservazione di poco superiore al doppio della durata dell'oscillazione libera* (risulterebbe precisamente *uguale* al doppio, cioè $\theta_1 = 2\tau$ prendendo $\varepsilon = 1/230$ cui corrisponde $\omega = 5,44$).

Se si prendesse invece $\varepsilon = 1/1000$ che dà $\omega = 6,9$, si avrebbero per σ_n , ω/σ_n i valori seguenti invece di quelli del primo esempio

TABELLA II. (bis)

$$\varepsilon = 1/1000, \quad \omega = 6,91, \quad \sigma_n = 6,91/\sqrt{n^2 + 4,83}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_n	6,91	3,45	2,30	1,73	1,38	1,15	0,98	0,86
σ_n	2,86	2,32	1,85	1,51	1,26	1,08	0,94	0,83
ω/σ_n	2,41	2,97	3,72	4,56	5,46	6,39	7,35	8,32

Questi numeri valgono per l'ampiezza ridotta ad un millesimo, vale a dire trascurabile certamente in ogni caso, e si vede che non differiscono molto da quelli del primo esempio, ai quali pertanto ci riferiremo nel seguito per ragione di semplicità, e che ci serviranno di scorta per giudicare, per dati valori di λ o σ , del numero di oscillazioni che essi importano e dei relativi valori di F e θ , e reciprocamente.

Si vede da questi esempî come i risultati precedenti possano servire di base ad una discussione quantitativa. Possiamo poi dall'analisi fatta trarre immediatamente alcune conseguenze pratiche. E in primo luogo vediamo che la forza di torsione essendo

senza influenza sulla durata di osservazione, potrà determinarsi indipendentemente in base ad altre considerazioni; per esempio in riguardo al grado di sensibilità che si vuole dall'istrumento. Si vede inoltre che ad abbreviare la detta durata gioverà in ogni caso ridurre quanto si può il momento di inerzia, onde converrà senz'altro regolare fin da principio le cose in modo che esso abbia il minimo valore conciliabile con le condizioni dell'apparecchio. Fissati per tal modo L e M , e con essi la durata d'oscillazione libera τ (il cui valore gioverà in ogni caso rilevare direttamente dall'osservazione), il movimento sarà ridotto a dipendere dal solo parametro α , cioè (avendo supposto fissato M) dalla sola forza di smorzamento F . Avuto quindi riguardo al valore disponibile di F , si potrà colla scorta delle equazioni e dei dati numerici precedenti giudicare in ogni caso qual sia il minor numero n di oscillazioni cui può ridursi un'osservazione, e valutarne la durata.

In conclusione poi si vede che la ricerca delle migliori condizioni si riduce a procurare il maggior valore di α ossia del rapporto F/M , cioè a far sì che il momento d'inerzia M sia il più piccolo possibile, e la forza F di smorzamento sia convenientemente grande. Ora per ciò che riguarda M conviene notare che nelle esperienze che formano il soggetto di queste considerazioni il momento d'inerzia si compone di due parti: della parte cioè che spetta all'ago, astrazione fatta dall'appendice che serve allo smorzamento, e della parte spettante a quest'ultima. Se indichiamo con M' e m rispettivamente queste due parti, dovremo supporre nelle formole precedenti

$$M = M' + m = M' \left(1 + \frac{m}{M'} \right).$$

Per l'influenza che ha la grandezza di M , si vede che è essenziale che il momento additivo m non sia troppo grande. Se indichiamo con τ' e τ le durate d'oscillazione libera corrispondenti rispettivamente ai momenti M' e M , cioè quali sono prima e dopo dell'aggiunta del momento m , sarà (4)

$$\tau = \tau' \sqrt{\frac{M}{M'}} = \tau' \sqrt{1 + \frac{m}{M'}}.$$

Di qui si ha la durata τ dell'oscillazione libera modificata dal momento additivo in funzione della durata primitiva τ' : e si vede che τ cresce proporzionalmente alla quantità

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M'}}.$$

e dalle precedenti equazioni risulta poi che anche la durata di osservazione θ e la corrispondente forza di smorzamento F , a parità di altre circostanze, crescono nello stesso rapporto. Per queste ragioni io ho cercato di dare all'appendice s una forma tale da rendere il suo momento d'inerzia piccolissimo: e sono riuscito a far sì che esso non arrivasse mai in ogni caso ad $1/20$ del momento primitivo dell'ago. In tali condizioni si ha

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M'}} < 1 + 1/40,$$

vale a dire che risulta per la durata d'oscillazione libera un aumento inferiore ad $1/40$ del suo valore primitivo. Così l'aggiunta dell'appendice s ha un'influenza appena sensibile sul valore di τ , e corrispondentemente sui valori di θ e F : onde nei calcoli precedenti relativi a queste quantità si può senza grave errore prescindere da essa.

Quanto poi alla forza di smorzamento F osserverò che essa a parità di altre circostanze si può ritenere proporzionale al quadrato dell'intensità del campo magnetico: giacchè essa cresce in ragion composta dell'intensità del campo e dell'intensità delle correnti indotte, che è alla sua volta proporzionale all'intensità del campo. Importa quindi di avere un campo magnetico intenso; e ciò io ho potuto conseguire anche con calamite di modesta grandezza restringendo le dimensioni del campo stesso, come mi era consentito dalla forma del pezzo s . E così sono riuscito ad ottenere tutti i gradi di smorzamento anche nei casi meno favorevoli, come si vedrà più innanzi.

Osserverò infine che quando si possa disporre di una forza di smorzamento abbastanza grande, può essere quistione se per le osservazioni torni più vantaggioso di tenersi ad un grado di smorzamento inferiore al limite di aperiodicità, pur rimanendo vicinissimi ad esso in guisa che l'osservazione si riduca alla pri-

ma escursione dell'ago, come si è detto di sopra: ovvero venga meglio di oltrepassarlo. Il movimento sarà rappresentato pei due casi rispettivamente dalle equazioni (I) e (III), essendo in entrambi piccolissimo il valore di β ; e il confronto analitico delle due equazioni d'accordo colla pratica conduce a ritenere preferibile il primo modo, cioè di non oltrepassare il limite di aperiodicità. Ma su ciò non mi trattengo, intendendo di limitarmi alla considerazione del primo caso.

IV.

Vengo ora propriamente ai risultati delle esperienze da me istituite, le quali erano condotte come se si trattasse di ordinarie misure elettrometriche. Si comunicava cioè all'ago una carica conveniente, e se ne osservava il movimento sia all'andata, quando con una successione di oscillazioni di ampiezza decrescente si avvicinava alla nuova posizione di equilibrio, sia al ritorno, dopo scaricato, quando riveniva oscillando alla posizione primitiva. Da quanto precede poi s'intende facilmente quale era l'andamento generale delle operazioni. Disposto l'ago dell'elettrometro con l'appendice s proporzionata allo spazio esistente fra i poli della calamita, si sperimentava dapprima senza quest'ultima, per determinare la durata dell'oscillazione libera dell'ago. Poi messa a posto la calamita e regolata la posizione dell'appendice, in guisa che venisse a trovarsi giusto in mezzo fra i due poli e convenientemente orientata (il che si ottiene facilmente movendo la platina di vetro su cui riposa l'elettrometro), si faceva una serie di osservazioni coll'appendice a diverse altezze, e per ciascuna altezza con diverse cariche dell'ago cioè con diversa ampiezza delle deviazioni; notando volta a volta la durata e le successive ampiezze delle oscillazioni.

L'aria nell'interno dell'apparecchio era mantenuta secca mediante dell'acido solforico. I settori dell'elettrometro erano caricati permanentemente in modo simmetrico a mezzo di una pila di 100 elementi di Volta divisi in due gruppi, come dissi di sopra. L'ago poi veniva caricato ponendolo in comunicazione con un polo di una pila di uno o due elementi Daniell di cui l'altro polo comunicava colla terra; oppure prendendo una derivazione

sopra un filo di platino che chiudeva il circuito di una pila di quattro elementi Daniell, e mettendo uno dei punti di derivazione in comunicazione con l'ago e l'altro con la terra: la quale ultima disposizione permetteva di graduare a piacere la carica variando l'intervallo di derivazione, onde si aveva anche il mezzo di controllare l'esattezza delle indicazioni dell'elettrometro. Del resto si procedeva con le solite norme e cautele occorrenti nelle esperienze elettrometriche. Avendo inoltre osservato che la temperatura esercitava un'influenza non trascurabile sul grado di smorzamento, si aveva cura che tutte le esperienze da paragonarsi fra di loro avessero luogo possibilmente ad una stessa temperatura.

Ho fatto in tal modo molte serie di esperienze con diversi aghi e fili di sospensione e mutando la calamita e l'appendice *s*; e ho raccolto così un abbondante materiale di osservazione. Ma per lo scopo presente che è principalmente quello di mostrare la pratica applicabilità di questo metodo di smorzamento agli elettrometri, mi basterà di riportarne qui solo alcune. In tutte queste mi son servito di una medesima calamita della forma indicata dalla figura, solo rinforzandola talvolta con l'aggiungervi a fianco due calamite più piccole le cui branche terminavano al di sotto dello spazio in cui veniva a trovarsi il freno *s*. Mi servirò, per distinguere, dei nomi di calamita *semplice* e calamita *rinforzata*. La calamita semplice era del peso di 1 chil. e della forza portativa di circa 5 chil., e la calamita rinforzata veniva ad avere un peso di 1,8 chil. ed una forza portativa di circa 8 chil. Il *campo* è rappresentato dallo spazio compreso fra le branche *m, m*, le cui facce polari piane, parallele e verticali costituiscono due rettangoli uguali col lato maggiore (verticale) di 35 mm. ed il lato minore di 6 mm. Quest'ultimo misura lo spessore delle branche nelle estremità affacciate, dove esse sono alquanto rastremate. La distanza fra le facce polari era di 8,5 mm. La sezione orizzontale del campo avente così le dimensioni di $8,5 \times 6,0$ mm., è molto piccola di fronte alla sua estensione verticale, e ciò per le ragioni già ricordate. La forma dell'ago era sempre la stessa, quale si vede dalla figura IV, essendosi variato soltanto il peso e le dimensioni, ossia il momento d'inerzia: che è quello che solo propriamente ha influenza, e di cui perciò si indicherà volta a volta il valore. Lo specchietto, che non venne mai cambiato, consisteva

in un rettangolo di 2 cm. di altezza e 1 cm. di larghezza tagliato da un'ordinaria lastra da specchio; ed era relativamente pesante (0,7 gr.), ma per la sua forma contribuiva poco ad aumentare il momento d'inerzia. L'appendice è stata mutata talvolta da serie a serie, e se ne darà l'indicazione a suo luogo. Il modo con cui essa era unita al prolungamento inferiore dell'ago permetteva di collocarla a diverse altezze; mentre ai piccoli movimenti per alzarla od abbassarla si provvedeva con la vite di richiamo che fa parte dell'apparato di sospensione. Darò in millimetri l'indicazione della *profondità* dell'appendice nel campo (distanza della sua estremità inferiore al di sotto dell'estremità superiore delle branche della calamita), di cui si era agevolata la lettura mediante delle divisioni tracciate sulle branche della calamita.

In una prima serie di esperienze si aveva un ago di 6 cm. di diametro e del peso di 0,8 gr. senza lo specchietto e di 1,5 gr. con quest'ultimo. Il momento d'inerzia complessivo, valutato approssimativamente in base alla forma e alle dimensioni del sistema, era di 5,4 c. g. s. (la notazione c. g. s. stando ad indicare secondo l'uso il sistema di unità assolute *centimetro-grammo-secondo*, cui riferirò tutte le quantità). Il filo di sospensione era d'argento e del diametro di $1/20$ di mm. circa. L'appendice s'era costituita da una piastrina di alluminio avente 2,4 mm. di spessore, 3,5 mm. di altezza e 6 mm. di larghezza. Il peso era di 1,4 gr. e quindi di poco inferiore al peso di tutto il resto dell'ago, ma il momento d'inerzia piccolissimo (inferiore a $1/10$ di unità), e quindi senza influenza sensibile sulla durata d'oscillazione dell'ago, come venne constatato direttamente: il che sia detto qui anche per tutte le serie successive. La durata d'oscillazione libera misurata direttamente si trovò uguale a 10,2 secondi. La calamita infine era semplice.

Ogni esperienza si riferiva ad una data profondità dell'appendice, ed era duplice comprendendo come si è detto il movimento di andata e di ritorno, per ciascuno dei quali si notavano le ampiezze delle successive oscillazioni ed i tempi. La si ripeteva poi generalmente con diversa carica.

Riferirò, in via di esempio, partitamente i numeri relativi ad una esperienza scelta fra quelle della serie. Le deviazioni sono lette sopra una scala posta a due metri dallo specchio; i numeri interi corrispondono ai centimetri e i decimi ai millimetri della scala. La carica dell'ago è di $1/2$ volta circa.

Profondità dell'appendice: 3 mm.

Posizione di riposo dell'ago scarico alla divisione 20,5 della scala; *posizione di equilibrio dell'ago carico* alla divisione 42,0.

Posizioni estreme successive raggiunte dall'ago:
nella 1ª fase dell'esperienza (andata)

(20,5) 49,0 39,8 42,7 41,9 (42,0);

nella 2ª fase o di ritorno

(42,0) 13,6 22,7 19,7 20,6 (20,5):

da cui prendendo le differenze rispetto all'ultimo numero che rappresenta la posizione d'equilibrio, si hanno le deviazioni successive misurate sulla scala, che per la loro piccolezza relativa possono servire a rappresentare anche gli angoli di deviazione; e risultano rispettivamente:

1ª fase	21,5	7,0	2,2	0,7	0,1
2ª fase	21,5	6,9	2,2	0,8	0,1

e concordano, come si vede, per le due fasi.

Durata di un'oscillazione dedotta dalla media delle prime tre oscillazioni, in ambedue le fasi

$$T = 10,7 \text{ sec.}$$

Dai numeri che rappresentano le deviazioni si deduce per il rapporto d'ampiezza di due oscillazioni consecutive il valore medio 3,1; onde si ha per il *decremento logaritmico*

$$\lambda = 1,13$$

cui corrispondono i valori per σ e λ/σ i valori

$$\sigma = 1,06, \quad \lambda/\sigma = 1,06.$$

Per mezzo del valore di λ/σ così ottenuto e del valore noto di τ si può alla sua volta calcolare coll'equazione (6) del capi-

tolo III il valore di T e confrontarlo con quello direttamente osservato. Si trova così $T = 1,06 \times 16,2 = 10,8$ sec. valore poco diverso dal valore osservato.

A mezzo poi di σ e dei valori noti di M e τ si ricava dalla (7)_b la forza di smorzamento F , alla cui determinazione principalmente l'esperienza è diretta, e si trova nel caso attuale

$$F = \frac{2 \times 5,4}{10,2} \times 1,06 = 1,12 \text{ c. g. s.}$$

Ciò per un'esperienza relativa ad una data altezza dell'ago. Analoghi risultati si hanno dalle esperienze fatte per altre altezze con lo stesso ago, la stessa calamita e la stessa appendice: e il loro insieme fa conoscere i valori di F per tutte le profondità dell'appendice. Dai quali poi si ha il mezzo, colle formole e i dati precedenti, di calcolare *a priori* gli effetti che si otterranno con aghi e fili di sospensione diversi, ossia con altri valori di M e τ , mantenendo invariate calamita ed appendice.

Per le altre esperienze di questa come delle altre serie, mi limiterò a riferire i valori di λ , T e F dedotti nel modo che ho esposto, compendiando i risultati ottenuti, insieme con l'indicazione dei dati essenziali, in un prospetto nel modo seguente:

PROSPETTO A.

Calamita semplice - Appendice piastrina d'alluminio

di $2,4 \times 6 \times 35$ mm.

$M = 5,4$ $\tau = 10,2$.

Numero d'ordine	I	II	III	IV	V	VI	VII
	x	λ	σ	T	F	α	n
1	-5,0	0,62	0,60	10,3	0,63	0,06	10
2	0,0	0,89	0,86	10,4	0,91	0,08	7
3	3,0	1,13	1,06	10,7	1,1	0,10	6
4	5,0	1,35	1,24	11,0	1,3	0,12	5
5	7,5	1,73	1,51	11,5	1,6	0,15	4
6	10,0	2,18	1,79	12,0	1,9	0,17	3
7	12,0	2,62	2,08	13,5	2,2	0,20	3
8	15,0	3,58	2,36	15,0	2,5	0,23	2
9	16,0	4,32	2,55	17,0	2,7	0,25	2
10	17,5	4,85	2,65	18,5	2,8	0,26	2
11	19,0	—	—	—	—	—	1

I numeri delle colonne I, II e III indicano rispettivamente la profondità x dell'appendice in millimetri, il valore λ , e quello che se ne deduce per σ . La colonna IV dà le durate d'oscillazione direttamente osservate. Confrontandole con quelle calcolate in base ai numeri delle due precedenti colonne ed al valore di τ mediante la formola $T = \lambda\tau/\sigma$, si trovano sufficientemente d'accordo, ma in generale un poco inferiori.

La colonna V contiene i valori di F calcolati nel modo che si è detto. La legge con cui questi variano colla profondità x dipende dalle condizioni d'intensità nei diversi punti del campo, o come si suol dire dalla distribuzione delle linee di forza, e dalla forma e dimensioni dell'appendice, oltre che dalla conducibilità del metallo. Di tal legge non intendo qui occuparmi al di là della sua determinazione empirica, quale risulta dai numeri in questione. Ma si può osservare che per una stessa calamita e per appendici prismatiche o cilindriche di eguale altezza e differenti fra loro solamente per la sezione e per la conducibilità del metallo, la legge sarà presumibilmente la stessa, e i valori di F corrispondenti a uguali profondità saranno proporzionali, differendo gli uni dagli altri per un coefficiente che avrà un valore particolare per ciascuna appendice.

Si sono aggiunti poi nella colonna VI i valori di α , che risultano dai numeri della colonna precedente dividendo per $2M$ cioè per 10,8: e ciò per comodo di riferimento alle formole ed all'analisi che si è fatta precedere. Moltiplicando i numeri di questa colonna per quelli della colonna IV, debbono ottenersi i numeri della colonna II, in virtù della relazione $\lambda = \alpha T$.

Nella colonna VII infine sono registrati i numeri n che indicano le oscillazioni fatte dall'ago prima di *fermarsi*, intendendo ciò nel senso del primo esempio trattato verso la fine del capitolo III, cui si riferiscono i dati della tabella II, cioè determinando il limite inferiore del grado di riduzione dell'ampiezza colla condizione $n\lambda \geq 6$. Il prodotto nT dà la durata di un'osservazione riferita a questo limite; la quale è pure espressa da $n\lambda/\alpha$. È poi da avvertire che il numero n così definito è altra cosa dal numero di oscillazioni realmente sottoposte all'osservazione in ciascuna di queste esperienze, il quale è minore, non

essendo possibile tener dietro con le misure agli ultimi movimenti dell' ago.

Le esperienze di questa serie non vanno oltre la profondità di 19 mm., perchè a questo punto ci si avvicina al limite di aperiodicità (il limite *vero* corrispondente a $\sigma = \pi$ si avrebbe qui per $F = 3,33$; il limite *pratico* relativo a $\lambda = 6$, $\sigma_1 = 2,8$, per $F_1 = 2,96$); e la determinazione di λ e T diviene incerta. Per questo mancano per l'ultima esperienza indicata nel prospetto i numeri relativi.

Per avere con la stessa calamita e la stessa appendice un moto oscillatorio a profondità maggiori, conviene accrescere il momento d'inerzia dell' ago o la forza di torsione, cioè diminuire α o τ , come appare dalla relazione $\alpha\tau = \sigma$. Riferirò ora un' altra serie di esperienze, le cui condizioni differiscono dalla precedente solamente per avere cambiato il filo di sospensione con altro pure d'argento di maggior diametro, 1/10 di millimetro circa; con che la durata d'oscillazione libera τ si è trovata ridotta a 2,5 sec., rimanendo invariato tutto il resto. Eccone senz' altro il prospetto.

PROSPETTO B

Calamita e Appendice come sopra.

$$M = 5,4 \quad \tau = 2,5$$

Numero d'ordine	I	II	III	IV	V	VI	VII
	α	λ	σ	T	F	α	n
1	10,0	0,52	0,51	2,5	2,2	0,20	11
2	15,0	0,64	0,62	2,6	2,7	0,25	9
3	18,0	0,69	0,67	2,6	2,9	0,27	9
4	20,0	0,71	0,69	2,6	3,0	0,28	9
5	22,5	0,73	0,71	2,6	3,1	0,29	8
6	25,0	0,76	0,74	2,6	3,2	0,30	8
7	27,0	0,79	0,76	2,7	3,3	0,31	8
8	30,0	0,80	0,77	2,7	3,3	0,31	8
9	33,0	0,81	0,78	2,7	3,4	0,32	8
10	35,0	0,81	0,78	2,7	3,4	0,32	8

Il grado di smorzamento è qui ridotto molto minore, e si rende sensibile solo ad una certa profondità, onde le esperienze

incominciano con $x = 10$. Il massimo effetto si raggiunge verso $x = 33$, oltre il qual punto si mantiene pressochè costante per un certo tratto (per poi decrescere a profondità ancor più grandi, cui però non arrivano le esperienze qui riportate); ed è come si vede ancor lontano dal limite di aperiodicità.

Paragonando nelle due serie addotte le esperienze corrispondenti alla stessa profondità, si dovrebbero avere gli stessi valori per F e α , che sono indipendenti dalla forza di torsione, la quale sola è mutata dall'una serie all'altra. E infatti si trovano dei numeri che nei limiti di esattezza consentiti a questo genere di determinazione si possono riguardare come concordanti. Si vede poi che i numeri della serie B sono tutti un poco più grandi; il che può attribuirsi all'influenza dovuta alla resistenza dell'aria. Questa resistenza contribuisce infatti anch'essa allo smorzamento dei movimenti dell'ago, sovrapponendosi in qualche modo allo effetto elettromagnetico; e la sua azione deve risultare molto più sensibile nelle condizioni della serie B, in cui le oscillazioni sono più rapide e numerose; per quanto io abbia cercato di diminuirne l'effetto sperimentando in questa serie con deviazioni molto piccole, quali si avevano con le stesse cariche adoperate per l'altra serie, avuto riguardo alla cresciuta forza di torsione.

Tralasciando per brevità ogni ulteriore osservazione, darò ora il prospetto di un'altra serie di esperienze in cui la forza di smorzamento era considerevolmente maggiore. Questo si era ottenuto senza mutare l'attuale disposizione semplicemente rinforzando la calamita coll'aggiungervi a lato due calamite minori (come ho già accennato al principio di questo capitolo) e sostituendo all'appendice impiegata nelle due serie precedenti un'altra pure di alluminio e di uguale forma ed altezza, ma di sezione alquanto maggiore, e cioè di 3 mm. di spessore e 6,5 mm. di larghezza: sempre tale adunque da potersi muovere liberamente nel campo e da risultare trascurabile il suo momento d'inerzia di fronte a quello dell'ago, che era il medesimo delle altre due serie. Il filo di torsione era quello stesso della serie B.

PROSPETTO C

Calamita rinforzata. - Appendice piastrina d'alluminio
di $3 \times 6,5 \times 35$ mm.

$$M = 5,4 \quad \tau = 2,5$$

Numero d'ordine	I	II	III	IV	V	VI	VII
	α	λ	σ	T	F	α	n
1	-10	0,39	0,39	2,5	1,7	0,16	15
2	-5	0,59	0,58	2,5	2,5	0,23	11
3	0	0,88	0,85	2,6	3,7	0,34	7
4	3	1,09	1,03	2,6	4,5	0,42	6
5	5	1,35	1,24	2,6	5,4	0,50	5
6	8	1,45	1,52	2,7	6,6	0,61	5
7	10	2,04	1,72	3,0	7,5	0,70	3
8	12	2,40	1,91	3,3	8,3	0,77	3
9	15	3,38	2,30	3,9	10,0	0,93	2
10	16	3,86	2,44	4,1	10,6	0,98	2
11	18	5,10	2,69	4,5	11,7	1,08	2
12	20	—	—	—	—	—	1

Paragonando i presenti valori di F con quelli delle due serie precedenti relativi alle stesse profondità, si vede che la forza di smorzamento è ora all'incirca quadruplicata. Lo smorzamento è già rilevante prima che l'appendice giunga ad affondarsi fra le branche della calamita (α negativo), e cresce rapidamente avvicinandosi al limite di aperiodicità già per $\alpha = 18$. Del resto l'andamento dei detti valori di F procede all'incirca con la stessa legge. Le osservazioni si compiono qui con rapidità, e l'ago è già sensibilmente immobile dopo pochi secondi.

Per potere, nelle attuali condizioni della calamita e dell'appendice, sperimentare con moto oscillatorio a profondità maggiori, allo scopo di determinare il massimo valore di F, non volendo accrescere ulteriormente la forza di torsione, mi son servito di un altro ago avente un maggior momento, cioè $M = 9,4$ col quale la durata dell'oscillazione libera τ è cresciuta a 3,3 sec.; ed ho fatto con questo la serie di esperienze, i cui risultati appariscono nel prospetto seguente.

PROSPETTO D
Calamita e Appendice come sopra.

$$M = 9,4 \quad \tau = 3,3$$

Numero d'ordine	I	II	III	IV	V	VI	VII
	α	λ	σ	T	F	α	n
1	10	1,49	1,33	3,5	7,6	0,40	5
2	15	1,80	1,56	3,8	9,8	0,52	4
3	17	2,40	1,91	4,0	10,9	0,58	3
4	20	2,87	2,12	4,4	12,1	0,64	3
5	23	3,23	1,25	4,7	12,8	0,68	2
6	25	3,35	2,29	4,8	13,1	0,70	2
7	27	3,50	2,34	4,9	13,4	0,71	2
8	30	3,69	2,39	5,0	13,7	0,73	2
9	33	3,76	2,42	5,2	13,8	0,73	2
01	35	3,76	2,42	5,1	13,8	0,73	2

Il massimo si raggiunge verso la profondità di 33 mm. come con la calamita semplice, ed è di $F = 13,8$ non molto lontano dal limite pratico di aperiodicità che calcolato per $\lambda = 6$, $\sigma = 2,8$ sarebbe $F_1 = 16$ circa.

Riporterò insieme con questo i valori massimi di F trovati sperimentando allo stesso modo con alcune altre appendici, tutte della stessa altezza di 35 mm., e con la calamita rinforzata, cioè:

piastrina di alluminio predetta di sezione $3 \times 6,5$ mm.	13,8	c. g. s.	
piastrina precedente (serie A e B) » $2,4 \times 6$ »	9,5		»
cilindro di alluminio del diametro di » 5,8 »	12,2		»
cilindro di rame » 4,8 »	11		»

Tutto ciò che ho riferito non rappresenta che una piccola parte delle osservazioni da me fatte: ma mi sembra sufficiente allo scopo attuale che è, lo ripeto, di mostrare il valore pratico di questo metodo di smorzamento.

In sostanza apparisce chiaro dalle esperienze addotte che l'azione di quel che ho chiamato più sopra *freno elettromagnetico* si esercita regolarmente e con efficacia. E quanto all'efficacia si può giudicarne guardando ai valori ottenuti per la forza

di smorzamento, indicati dagli ultimi numeri, e confrontandoli con la espressione generale

$$2\pi \frac{M}{\tau}$$

della forza corrispondente al limite di aperiodicità, avuto riguardo all'ordinaria grandezza di M e τ negli elettrometri.

Nelle serie da me riportate il momento d'inerzia è già molto più grande di quel che generalmente si usi, e il rapporto M/τ parimente più grande dell'ordinario: e ho scelto queste appunto per presentare i casi meno favorevoli allo smorzamento. Per $M=1$ (valore non superiore a quello che si ha nella maggior parte degli elettrometri), il detto limite diviene

$$\frac{2\pi}{\tau}:$$

e si vede che, a meno che τ non sia straordinariamente piccolo — ciò che non accadrà mai per gli elettrometri sensibili, nei quali la forza di torsione non può essere troppo grande — basteranno valori di F molto minori di quelli da me ottenuti per conseguire praticamente l'aperiodicità, riducendo l'osservazione alla prima oscillazione. E in questo caso, come si è visto, la durata dell'osservazione sarà di poco più di 2τ . Se poi τ è molto piccolo, come potrà darsi con elettrometri destinati alla misura di potenziali elevati, occorreranno forse per una osservazione più oscillazioni; ma la durata dell'osservazione che è data da ω/α , cioè, essendo per $M=1$ $\alpha = F/2$, da

$$\frac{2\omega}{F},$$

ovvero prendendo $\omega = 6$, da $12/F$ sec. prossimamente, risulterà piccola anche per valori di F molto inferiori ai precedenti. E però si conclude che in ogni caso si potrà conseguire uno smorzamento sufficiente a tutte le esigenze.

Le esperienze riferite bastano adunque a stabilire l'attuabilità e l'efficacia del processo. Quanto al resto dei numerosi dati ottenuti, io mi riservo di completarli con altre esperienze, intese

a meglio precisare e determinare separatamente l'influenza delle singole condizioni, per costituire poi il materiale ad uno studio esatto del fenomeno nei suoi vari aspetti. Il quale può, credo, riuscire di qualche interesse, e forse dar luogo a qualche utile applicazione, quale per esempio quella di servire alla misura dell'intensità di un campo magnetico. Ma su ciò non aggiungo altro per ora.

Accennerò soltanto ad una circostanza, già menzionata più indietro, di cui occorre tener conto nella pratica del metodo; all'influenza cioè della temperatura sulla grandezza dello smorzamento, che ho riscontrata nelle mie esperienze. Nelle serie che ho riportato essa è stata almeno in gran parte eliminata; poichè, come ho già avvertito, le esperienze stesse sono state fatte prossimamente alla stessa temperatura. Ma ciò non facendo, essa, si manifesta assai sensibilmente. Col crescere della temperatura il grado di smorzamento, a parità di altre circostanze, diminuisce: tanto che in un ambiente soggetto alle fluttuazioni della temperatura esterna conveniva nelle ore più calde del giorno affondare di qualche millimetro l'appendice nel campo magnetico, per ricondurre il grado di smorzamento al valore osservato nel mattino. A questa diminuzione concorrono certamente le tre cause seguenti: 1) la diminuzione di conducibilità del metallo dell'appendice; 2) la diminuzione del magnetismo della calamita; 3) la variazione dell'apertura delle branche, la quale determina alla sua volta una variazione di intensità del campo magnetico. Ma per sceverare la parte che spetta separatamente a ciascuna di queste cause non ho ancora dati sufficienti, e mi occorrono ulteriori esperienze.

Ritornando al lato pratico della quistione, osserverò che fra i pregi di questo metodo di smorzamento vi ha quello di essere generalmente applicabile. Esso può adattarsi senza difficoltà a tutte le forme di elettrometri, e anche ad ogni altro istrumento le cui indicazioni si fondino sulle oscillazioni di un sistema mobile o ago. Presentemente io sto adattando in modo permanente questo sistema al mio elettrometro: al quale uopo non fo altro che sostituire alle parti che si trovano nello scompartimento C', corrispondente alla porzione mobile della cassa, un sistema ana-

logo a quello che costituisce la parte inferiore dell'apparecchio di studio.

Io mi sono valso per comodità della sospensione unifilare; ma il metodo può applicarsi ugualmente al caso della sospensione bifilare, anche conservando le comunicazioni dal basso a mezzo dell'acido solforico. Basterà che il prolungamento inferiore dell'ago sia formato di un filo di platino ricoperto per un certo tratto da un tubo di vetro, il quale passi attraverso l'appendice *s* in direzione assiale, e la punta del filo vada ad immergersi verticalmente nell'acido solforico. Soppressa la laminetta di platino che si muove in seno al liquido, spariranno almeno in gran parte gl'inconvenienti dovuti all'effetto della viscosità sul movimento dell'ago.

Ma la qualità più importante di questo metodo si è quella di permettere di regolare a piacere il grado di smorzamento. Questo può farsi sia alzando od abbassando l'appendice, come nel mio apparecchio di studio, sia facendo mobili le estremità polari che limitano il campo magnetico, in guisa che la loro distanza possa regolarsi mediante un movimento micrometrico; con che si otterrà di poter allargare e restringere il campo magnetico e così graduarne l'intensità.



SUI FENOMENI ELETTRICI PROVOCATI DALLE RADIAZIONI; MEMORIA
DEL PROF. AUGUSTO RIGHI ¹⁾.

(*Memorie della R. Acc. d. Sc. dell'Istit. di Bologna*. Ser. IV, Tomo IX, 1898).

CAP. IV.

*Sviluppo di elettricità positiva nei corpi che ricevono
radiazioni ultraviolette.*

Per constatare questo nuovo fenomeno, che è ben distinto da quello della dispersione dell'elettricità negativa prodotta dalle radiazioni, bisogna impiegare un'intensa luce ultravioletta. Può

1) *Continuazione e fine*. V. pag. 11.