

SULLA DEFORMAZIONE CONSEGUENTE AL CONTATTO DI DUE SOLIDI ELASTICI ¹⁾.

Nota di ELENA NANNEI.

1. — Il problema di assegnare i caratteri salienti della deformazione locale conseguente al mutuo contatto di due solidi elastici, premuti l'un contro l'altro, fu posto e risolto da Hertz ²⁾ in una fondamentale memoria del 1881.

Le concrete e precise conclusioni ivi stabilite furono sottoposte a controllo sperimentale nei fenomeni dell'urto e consentirono, per la prima volta, un apprezzamento scientifico della diversa durezza dei corpi.

Nella suddetta memoria, Hertz rileva anzitutto come, per effetto della mutua compressione, le superficie terminali dei due corpi (che, se questi fossero rigidi, si toccherebbero in un sol punto) subiscono un certo schiacciamento, per cui presentano una piccola area di contatto K .

Sulla forma e sulle dimensioni di quest'areola, che si può riguardare piana, influiscono essenzialmente le curvature delle due superficie e l'intensità dello sforzo normale, mentre fuori di K non c'è scambio di azioni dinamiche.

Così stando le cose, un'opportuna schematizzazione riporta il problema elastico da risolvere alla determinazione della deformazione di due semispazi S e S' di materiale eterogeneo, combacianti lungo un piano σ , che geometricamente esauriscono tutto lo spazio, ma si scambiano delle azioni solamente nell'areola K .

¹⁾ La presente nota è il riassunto di un lavoro presentato nel 1917 alla Facoltà di Scienze della R. Università di Padova, quale dissertazione di laurea in matematica.

²⁾ « *Gesammelte Werke* », B. I., pp. 154-169.

Precisando le condizioni ai limiti, che, in base alle supposte circostanze fisiche e geometriche, debbono essere soddisfatte sul piano σ , la teoria generale della deformazione elastica di un suolo isotropo permette facilmente di constatare che, *ove si riguardi conosciuta l'area K*, tutto rimane univocamente determinato.

La teoria stessa fornisce anzi le esplicite formole risolutive, mediante integrali doppi estesi a K. Le integrazioni si effettuano facilmente nel caso particolare che K abbia forma ellittica, convenientemente specificata quanto all'orientazione degli assi, ove inoltre si introduca, come fa Hertz, una speciale ipotesi circa la distribuzione locale degli sforzi, e si lascino provvisoriamente indeterminate le dimensioni dell'ellisse, riservandosi di disporne in modo da ottemperare a tutte le rimanenti condizioni.

2. — Ricordiamo intanto le più importanti formole stabilite da Hertz, che ci serviranno poi di controllo nella seconda parte della nostra ricerca.

Rappresentiamo con v lo sforzo normale che le superficie si trasmettono in ogni punto di K; con P il potenziale newtoniano $\int_K \frac{v}{r} dK$ corrispondente ad una ipotetica distribuzione di materia su K; con h e h' le costanti

$$\frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \quad , \quad \frac{\lambda' + 2\mu'}{4\pi\mu'(\lambda' + \mu')} \quad ,$$

essendo λ, μ e λ', μ' i ben noti coefficienti di elasticità che spettano ai materiali costitutivi dei due corpi, supposti entrambi isotropi.

Dalla teoria dei suoli elastici isotropi si hanno per le componenti dello spostamento (secondo la normale volta all'interno di S) le espressioni:

$$w = hP \quad , \quad w' = -h'P \quad ,$$

valide rispettivamente per gli elementi di S e per gli elementi di S'.

Hertz mostra che nei punti di K deve essere soddisfatta la condizione

$$(1) \quad w - w' = (h + h') P = \delta - Ax^2 - By^2,$$

dove i coefficienti A e B dipendono esclusivamente dalla forma geometrica delle superficie dei due solidi nell'immediata prossimità del contatto (e precisamente dalle curvature principali, che esse possedevano, prima della deformazione, in K , assimilabile a questo riguardo ad un unico punto); e δ rappresenta l'avvicinamento normale delle parti remote dei due corpi, che rimangono sensibilmente rigide.

Posto

$$(2) \quad q = \frac{3}{4} \pi (h + h') p,$$

dove $p = \int_K v dK$ rappresenta la compressione totale che si scambiano tra loro i due corpi, la trattazione di Hertz porta in definitiva a tre relazioni atte a determinare le incognite a , b , (semiassi dell'ellisse K) e δ , in funzione delle costanti A , B , q , che sono combinazioni opportune dei dati della questione. Queste relazioni sono

$$(3) \quad q \int_0^\infty \frac{du}{R} = \delta, \quad q \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)R} = A, \quad q \int_0^\infty \frac{du}{(b^2 + u)R} = B,$$

R designando il radicale $\sqrt{u(a^2 + u)(b^2 + u)}$, preso, s'intende, in valore assoluto.

3. — Nel caso della simmetria delle due superficie che vengono in contatto, rispetto alla normale comune, vengono a coincidere per ciascuna di esse, i due raggi principali di curvatura, e si ha in particolare, designando detti raggi rispettivamente con R ed R' ,

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

D'altra parte (l'ellisse di schiacciamento riducendosi necessariamente ad un cerchio) si ha pure $a = b$.

Con ciò, a norma delle (3), il raggio a di K rimane definito dalla equazione

$$q \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^2 \sqrt{u}} = A .$$

L'integrale, che sta nel primo membro, è calcolabile con mezzi elementari, essendo funzione razionale della variabile corrente d'integrazione, e di un radicale quadratico. — Si trova in definitiva:

$$(4) \quad a^3 = \frac{1}{2} \frac{q}{A} ,$$

relazione che dà il vincolo dinamico e geometrico cui deve sottostare il raggio del circolo di schiacciamento.

4. — Nelle (3), e per conseguenza anche nella (4) che si riferisce al caso della simmetria, c'è di mezzo, come già fu rilevato al n. 1, un'ipotesi complementare circa la distribuzione degli sforzi (oltre all'assunzione della forma ellittica di K , assunzione che diviene superflua nel caso della simmetria, rimanendo imposta dalla natura delle cose la forma circolare).

Dal punto di vista speculativo non si può disconoscere che le ipotesi addizionali di Hertz sono perfettamente gratuite, per quanto appariscano ragionevoli a titolo d'assaggio e, a posteriori, feconde di conseguenze concrete.

In realtà ci si trova di fronte, anche dopo introdotte le schematizzazioni di cui al n. 1, ad un vero e proprio caso di indeterminazione statica, rimanendo arbitraria la scelta di K .

Il criterio determinante va chiesto, in questo come in problemi analoghi, a quello stesso principio concettuale, da cui in sostanza discende tutta la teoria dell'elasticità, principio che, nella forma più adatta al caso, diremo del minimo lavoro di deformazione.

5. — Consideriamo all'uopo il lavoro E complessivo della deformazione conseguente al contatto di due solidi elastici, lavoro che sarà dato da

$$(5) \quad E = \int_K v w dK - \int_K v w' dK = (h + h') \int_K P dK .$$

Per togliere l'indeterminazione relativa alla forma e alle dimensioni di K , ricorrendo al suaccennato principio, siamo condotti a render minimo l'integrale:

$$\int_K v P dK,$$

in cui P è il potenziale

$$\int_K \frac{v}{r} dK.$$

Si vede subito la difficoltà che s'incontrerebbe nel voler trattare il problema in tutta la sua generalità, perchè, essendo incognito il campo d'integrazione, ci si trova di fronte ad una complicata questione di carattere funzionale. Ci limiteremo, quindi, alla considerazione del caso simmetrico rispetto alla normale comune dei due corpi in contatto, caso in cui, rimanendo necessariamente imposta dalla simmetria la forma circolare di K , tutto si riduce a determinarne le dimensioni, ossia, in sostanza, il valore numerico del raggio, e quindi si rientra nell'ambito di un ordinario problema di minimo.

6. — In tal caso $A = B$ per cui, indicando con u la distanza dal centro di K , si ha dalla (1),

$$(6) \quad P = \frac{\delta - A u^2}{h + h'},$$

valida in tutti i punti di K .

Sappiamo che il P del primo membro non è altro che $\int_K \frac{v}{r} dK$, ossia il potenziale di masse distribuite (simmetricamente) su K con densità v , funzione a priori incognita di u .

Dacchè la (6) assegna i valori di P sul disco potenziente K , le classiche ricerche di Beltrami sui potenziali simmetrici permettono agevolmente di ricavare v .

All'uopo ricorriamo alla formola generale ¹⁾.

$$(7) \quad M(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{V(t) t dt}{\sqrt{s^2 - t^2}}$$

¹⁾ Opere di E. Beltrami, T. III, pag. 350.

nella quale $V(t)$ designa la funzione potenziale, $M(u)$ è la quantità di materia compresa tra l'orlo del disco e la circonferenza di raggio u , e a il raggio del disco.

Per definizione di $M(u)$, la quantità di materia compresa tra le circonferenze di raggio u e $u + du$ è espressa da:

$$M(u) - M(u + du) = - \frac{dM}{du} du.$$

Questa stessa quantità, per mezzo della densità ν , è data da $2\pi u du \nu(u)$. Ne consegue

$$(8) \quad \nu(u) = - \frac{1}{2\pi u} \frac{dM}{du}.$$

7. — Nella (7) poniamo $t = s \sin \xi$, con che $dt = s \cos \xi d\xi$, $\sqrt{s^2 - t^2} = s \cos \xi$. Abbiamo:

$$(7') \quad M(u) = \frac{2}{\pi} \int_u^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}} \frac{d}{ds} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(s \sin \xi) s \sin \xi d\xi,$$

che, applicata ai due casi

$$V_1(t) = 1, \quad V_2(t) = t^2,$$

porge rispettivamente:

$$M_1(u) = \frac{2}{\pi} \int_u^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - u^2},$$

$$M_2(u) = \frac{2}{\pi} \int_u^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}} 3s^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \xi d\xi = \frac{4}{\pi} \int_u^a \frac{s^3 ds}{\sqrt{s^2 - u^2}}.$$

L'espressione di $M_2(u)$ con una integrazione per parti (assumendo $\frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}}$ quale fattore differenziale) può essere scritta:

$$M_2(u) = \frac{4}{\pi} \left\{ a^2 \sqrt{a^2 - u^2} - 2 \int_u^a s ds \sqrt{s^2 - u^2} \right\}.$$

Dopo ciò, applicando la (8), si ricavano per le corrispondenti densità v_1 , v_2 le espressioni:

$$(9) \quad v_1 = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}},$$

$$(10) \quad v_2 = \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} - 2 \int_u^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - u^2}} \right\} =$$

$$\frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} - 2 \sqrt{a^2 - u^2} \right\} = 2(2u^2 - a^2) v_1.$$

Se $V(u)$ è funzione lineare di $V_1(u) = 1$, $V_2(u) = u^2$, la corrispondente v si ha formando la stessa funzione lineare di v_1 , v_2 . Per il nostro $P = \frac{\delta}{h+h'} - \frac{A}{h+h'} u^2$, risulta in conformità

$$(11) \quad v = \frac{\delta v_1 - A v_2}{h+h'}.$$

8. — Ritorniamo ora all'espressione del lavoro E di deformazione, sostituendo a P il valore trovato; avremo:

$$E = (h+h') \int_K v P dK = \delta \int_K v dK - A \int_K u^2 v dK.$$

Consideriamo, negli integrali estesi al disco K , il contributo di una generica corona circolare di raggi u , $u+du$. Sarà $dK = 2\pi u du$, e quindi:

$$E = 2\pi \delta \int_0^a u v du - 2\pi A \int_0^a u^3 v du,$$

ossia, sostituendo a v il suo valore (11),

$$E = \frac{2\pi\delta}{h+h'} \int_0^a u (\delta v_1 - A v_2) du - \frac{2\pi A}{h+h'} \int_0^a u^3 (\delta v_1 - A v_2) du.$$

Introdotta per v_1 il suo valore (10), si può anche scrivere

$$\begin{aligned} \frac{h+h'}{2\pi} E &= \delta \int_0^a v_1 \left[u\delta - 2Au(2u^2 - a^2) \right] du - \\ &- A \int_0^a v_1 \left[u^3\delta - 2Au^3(2u^2 - a^2) \right] du = \\ &= (\delta^2 + 2A\delta a^2) \int_0^a uv_1 du - (5A\delta + 2A^2a^2) \int_0^a v_1 u^3 du + 4A^2 \int_0^a v_1 u^5 du. \end{aligned}$$

I tre integrali definiti si calcolano con tutta facilità, ponendo

$$u = a \sin z.$$

Si ottiene così dopo ovvie riduzioni:

$$\frac{h+h'}{2\pi} E = \frac{1}{\pi^2} \left(a\delta^2 - \frac{4}{3} A\delta a^2 + \frac{4}{5} A^2 a^5 \right).$$

9. — Per avere l'espressione finale di E in funzione di a , ci resta ancora da ricavare il valore di δ dalla relazione

$$\int_{\kappa} v dK = p.$$

Sostituiamo a v il suo valore (11), tenendo in pari tempo presente la (10). Si ha

$$p(h+h') = 2\pi \int_0^a u v_1 \left\{ \delta - 2A(2u^2 - a^2) \right\} du$$

da cui, calcolando l'integrale colla solita sostituzione ($u = a \sin z$), si ricava

$$\pi p(h+h') = 2 \left(a\delta - \frac{2}{3} A a^3 \right).$$

Colla posizione (2),

$$\frac{3}{4} p \pi(h+h') = q,$$

di cui già ci siamo valse richiamando i risultati di Hertz, si può scrivere più semplicemente:

$$a\delta = \frac{2}{3}(q + \Lambda a^3);$$

quindi sostituendo nell'espressione di E e semplificando, si ha

$$(12) \quad (h + h')E = \frac{8}{9\pi} \left\{ \frac{4}{5} \Lambda^2 a^5 + \frac{q^2}{a} \right\}.$$

10. — Le costanti h , h' , Λ e q dipendono direttamente dai dati della questione, e devono quindi ritenersi conosciute. La (12) definisce quindi l'energia elastica totale E (lavoro di deformazione) in funzione dell'unico elemento tuttora incognito, il raggio a dell'area (circolare) K di schiacciamento. La (12) stessa mostra che E differisce soltanto per un fattore costante dal binomio

$$\eta = \frac{4}{5} \Lambda^2 a^5 + \frac{q^2}{a}.$$

Dacchè

$$\frac{\partial \eta}{\partial a} = 4 \Lambda^2 a^4 - \frac{q^2}{a^2},$$

in condizioni di minimo dovrà essere:

$$4 \Lambda^2 a^4 - \frac{q^2}{a^2} = 0$$

cioè:

$$4 \Lambda^2 a^4 = \frac{q^2}{a^2}$$

da cui:

$$a^3 = \frac{1}{2} \frac{q}{\Lambda}.$$

A questa stessa espressione [vedi formola (4)] arriva Hertz, quando, tutto essendo simmetrico attorno alla normale comune, la sua ellisse si riduce ad una circonferenza.

Rimane così dimostrato che, almeno nel caso simmetrico, le conclusioni di Hertz sono completamente giustificate.

Sarebbe evidentemente di grande interesse il potere estendere l'indagine al caso generale, ma bisognerebbe trovare la via per renderla accessibile al calcolo.