Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale.

Von L. Königsberger in Wien.

In der im Journal für Mathematik Bd. 81, Heft 3 veröffentlichten Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen" zeigte ich, dass, wenn zwischen hyperelliptischen Integralen verschiedener Ordnung irgend eine in den Integralen lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht (und diese ist nach dem von mir in demselben Journale Bd. 84, Heft 4 bewiesenen allgemeinen Satze „über die algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen" der allgemeinsten algebraischen Relation zwischen jenen Integralen äquivalent), für je zwei solche in der angenommenen Beziehung vorkommende hyperelliptische Integrale

$$\int^{z_1} f(z, \sqrt{R(z)})\, dz \quad \text{und} \quad \int^{y} F(y, \sqrt{R_1(y)})\, dy,$$

in denen

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2p+1})},$$
$$\sqrt{R_1(y)} = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2\sigma+1})}$$

ist, zwischen den Differentialen der zugehörigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung die Relation stattfindet:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}, \\ \dfrac{y_1\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{y_1^{\sigma-1}\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2^{\sigma-1}\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma^{\sigma-1}\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}; \end{cases}$$

in derselben bedeuten die Functionen

$$F_0(z_1),\ F_1(z_1),\ \cdots F_{\sigma-1}(z_1)$$

ganze Functionen $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades von z_1,

$$y_1, y_2, \cdots y_\sigma$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(2)\qquad y^\sigma + f_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) = 0,$$

in welcher

$$f_1, f_2, \cdots f_\sigma$$

rationale Functionen von z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ vorstellen, und

$$\sqrt{R_1(y_1)}, \sqrt{R_1(y_2)}, \cdots \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

lassen sich mit Hülfe eben dieser Grössen z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ rational durch die resp. y in der Form

$$(3)\qquad \sqrt{R_1(y_r)} = \varphi\left(y_r, z_1, \sqrt{R(z_1)}\right)$$

ausdrücken.

Die Beziehungen zwischen den Integralgrenzen lassen sich jedoch noch vereinfachen, und die folgende Ueberlegung führt zu einem Ergebniss, welches eine weitere Einsicht in die allgemeine Transformationstheorie gestattet, und mir für die Behandlung der Frage der Integralrechnung, welche hyperelliptische Integrale irgend einer Ordnung auf solche von niederer Ordnung reducirbar sind, wesentlich zu sein scheint.

Nehmen wir eine der oben erhaltenen Differentialgleichungen

$$(4)\qquad \frac{y_1^k\, dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\, dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k\, dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_k(z_1)\, dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

und setzen

$$-\sqrt{R(z_1)} \text{ statt } \sqrt{R(z_1)},$$

so werden die Lösungen der Gleichung (2) $y_1, y_2, \cdots y_\sigma$ in die Lösungen der Gleichung

$$(5)\qquad \eta^\sigma + f_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right)\eta^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) = 0$$

übergehen, welche wir mit

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\sigma$$

bezeichnen wollen, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung

$$(6)\qquad \sqrt{R_1(\eta_r)} = \varphi\left(\eta_r, z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right)$$

bestimmt sein werden, und wenn wir die so entstehende Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{\eta_1^k\, d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} + \frac{\eta_2^k\, d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} + \cdots + \frac{\eta_\sigma^k\, d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} = -\frac{F_k(z_1)\, dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

durch Subtraction mit der Gleichung (4) verbinden, so folgt die Beziehung

$$(8)\quad \begin{array}{l} \dfrac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} \\ - \dfrac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \dfrac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \cdots - \dfrac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \end{array} = 2\,\frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

die nunmehr genauer untersucht werden soll.

Ist σ eine *gerade* Zahl, so setze man

$$m = \frac{3\sigma}{2},$$

bezeichne mit $p(y)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von y, mit $q(y)$ eine ganze Function $m-\sigma-1^{\text{ten}}$ Grades derselben Variabeln, und bestimme in der Gleichung

$$p(y) - q(y)\sqrt{R_1(y)},$$

oder in

$$(9)\quad a_m y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0 - b_{m-\sigma-1}y^{m-\sigma-1}\sqrt{R_1(y)} \\ - b_{m-\sigma-2}y^{m-\sigma-2}\sqrt{R_1(y)} - \cdots - b_0\sqrt{R_1(y)} = 0$$

die

$$2m - \sigma + 1 = 2\sigma + 1$$

Constanten

$$a_m,\ a_{m-1},\ \cdots\ a_1,\ a_0,\quad b_{m-\sigma-1},\ b_{m-\sigma-2},\ \cdots\ b_1,\ b_0$$

so, dass dieselbe durch die 2σ Werthe

$$(\alpha)\qquad y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_\sigma,\quad \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_\sigma$$

und die dazu gehörigen Irrationalitäten

$$(\beta)\ \sqrt{R_1(y_1)},\ \sqrt{R_1(y_2)},\ \cdots \sqrt{R_1(y_\sigma)},\ -\sqrt{R_1(\eta_1)},\ -\sqrt{R_1(\eta_2)},\ \cdots -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}$$

befriedigt wird; dann weiss man nach dem Abel'schen Theorem, dass die Gleichung

$$(10)\qquad p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = 0,$$

welche vom $2m = 3\sigma^{\text{ten}}$ Grade ist, ausser den Lösungen (α) noch σ andere Wurzeln

$$(\gamma)\qquad Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

besitzt, welche mit den Grössen (α) und (β) durch die transcendente Beziehung verbunden sind,

$$(11)\quad \frac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} - \frac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \frac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \cdots - \frac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \\ = \frac{Y_1^k\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^k\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^k\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

wenn die zu den Grössen (γ) gehörigen Irrationalitäten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$(12)\qquad \sqrt{R_1(Y_1)} = \frac{p(Y_1)}{q(Y_1)},\ \cdots\ \sqrt{R_1(Y_\sigma)} = \frac{p(Y_\sigma)}{q(Y_\sigma)}.$$

Gehen wir nunmehr auf die Form der Coefficienten der Gleichung (9) näher ein; das dieselben bestimmende Gleichungssystem

$$a_m y_1^m + a_{m-1} y_1^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_1)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_1)} = 0,$$
$$a_m y_2^m + a_{m-1} y_2^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_2^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_2)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_2)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m y_\sigma^m + a_{m-1} y_\sigma^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_\sigma)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_\sigma)} = 0,$$
$$a_m \eta_1^m + a_{m-1} \eta_1^{m-1} + \cdots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_1)} + \cdots + b_0 \sqrt{R_1(\eta_1)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m \eta_\sigma^m + a_{m-1} \eta_\sigma^{m-1} + \cdots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} + \cdots + b_0 \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} = 0$$

kann, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\sqrt{R_1(y_r)} \text{ und } \sqrt{R_1(\eta_r)},$$

nach den Gleichungen (3) und (6) als rationale Functionen von y_r resp. η_r und z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ darstellbar sind, in die Form gebracht werden:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_m \left\{F_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^k + F_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
-b_{m-\sigma-1} \left\{\Phi_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^l + \Phi_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^{l-1} + \cdots\right\} - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^k + F_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
-b_{m-\sigma-1} \left\{\Phi_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^l + \Phi_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^{l-1} + \cdots\right\} - \cdots = 0, \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^k + F_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
+b_{m-\sigma-1} \left\{\Phi_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^l + \Phi_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^{l-1} + \cdots\right\} + \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^k + F_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
+b_{m-\sigma-1} \left\{\Phi_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^l + \Phi_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^{l-1} + \cdots\right\} + \cdots = 0,
\end{array}\right.$$

worin die Functionen

$$F_0,\ F_1,\ \cdots\ \Phi_0,\ \Phi_1,\ \cdots$$

ganze rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten.

Addirt man jetzt die ersten σ Gleichungen des Systems (13), nachdem dieselben mit

$$1\quad 1\ \cdots\ 1,$$
$$y_1\quad y_2\ \cdots\ y_\sigma,$$

$$\begin{array}{c} y_1^2 \quad y_2^2 \quad \cdots \quad y_\sigma^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{\sigma-1} \quad y_2^{\sigma-1} \quad \cdots \quad y_\sigma^{\sigma-1} \end{array}$$

multiplicirt sind, verfährt ebenso mit den zweiten σ Gleichungen dieses Systems, und setzt:

$$y_1^r + y_2^r + \cdots + y_\sigma^r = s_r, \quad \eta_1 + \eta_2^r + \cdots + \eta_\sigma^r = S_r,$$

so folgt:

4)
$$\left\{\begin{array}{l}
\quad a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_k + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{k-1} + \cdots\} + \cdots \\
- b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_l + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{l-1} + \cdots\} - \cdots = 0, \\
\quad a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{k+1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_k + \cdots\} + \cdots \\
- b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{l+1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_l + \cdots\} - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{k+\sigma-1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{k+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots \\
- b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{l+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, s_{l+\sigma-2} + \cdots\} - \cdots = 0, \\
\quad a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_k + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{k-1} + \cdots\} + \cdots \\
+ b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_l + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{l-1} + \cdots\} + \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{k+\sigma-1} + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{k+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots \\
+ b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{l+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})\, S_{l+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots = 0.
\end{array}\right.$$

Da aber die Potenzsummen s und S der Lösungen der Gleichungen (2) und (5) sich rational durch deren Coefficienten ausdrücken lassen, und die beiden Gleichungen sich in den Coefficienten der zu berechnenden a- und b-Grössen nur durch das verschiedene Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, so werden wir das System (14) auch in die Form bringen können:

5)
$$\left\{\begin{array}{l}
a_m(A_{1m} + B_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{1m} + Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\
a_m(A_{2m} + B_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{2m} + Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m(A_{\sigma m} + B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{\sigma m} + Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\
a_m(A_{1m} - B_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{1m} - Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0, \\
a_m(A_{2m} - B_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{2m} - Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m(A_{\sigma m} - B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{\sigma m} - Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0.
\end{array}\right.$$

Wenn man nun die entsprechenden Gleichungen, welche sich nur durch das Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, durch Addition und Subtraction mit einander verbindet, so erhält man z. B. aus der 1^{ten} und $\sigma+1^{\text{ten}}$ Gleichung des Systems (15) die Gleichungen

$$2a_m A_{1m} + \cdots\cdots\cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$
$$2a_m B_{1m} \sqrt{R(z_1)} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P_{1m} - \cdots\cdots\cdots = 0,$$

oder, wenn die zweite dieser Gleichungen durch $\sqrt{R(z_1)}$ dividirt und

$$\frac{P_{1m}}{R(z_1)} = P'_{1m}\,, \text{ etc.}$$

gesetzt wird:

$$2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$
$$2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$

und es folgt somit aus (15) zur Bestimmung der a- und b-Constanten das nachstehende Gleichungssystem:

$$(16)\quad \begin{cases} 2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m A_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{2m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_m A_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{\sigma m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m B_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{2m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_m B_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{\sigma m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0. \end{cases}$$

Beachtet man nun, dass nur für die b-Grössen die Determinante des Zählers der Auflösungen den Factor $\sqrt{R(z_1)}$ einmal weniger hat als die Determinante des Nenners, so ergiebt sich, wenn, was gestattet ist, eine der a-Grössen, z. B. $a_m = 1$ gesetzt wird:

dass die a-Grössen sämmtlich rationale Functionen von z_1 sind, während die b-Grössen durch das Product von in z_1 rationalen Functionen in die Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$ dargestellt werden, oder dass die Coefficienten der Function $p(y)$ rational in z_1, die von $q(y)$ ebenso, jedoch mit dem Factor $\sqrt{R(z_1)}$ behaftet, ausgedrückt sind.

Da nun aber die Gleichung (10) die Form hat:

$$(17)\cdot\cdot\; p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma) \times (y-Y_1)(y-Y_2)\cdots(y-Y_\sigma),$$

ferner:

$$(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma)$$

als Product der linken Seiten der Gleichungen (2) und (5), wie unmittelbar daraus zu erkennen, dass

$$f_k(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + f_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)}) f_{k-1}(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + \cdots$$
$$+ f_{k-1}(z_1, -\sqrt{R(z_1)}) f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + f_k(z_1, -\sqrt{R(z_1)})$$

eine rationale Function von z_1 ist, in der Form darstellbar ist

$$y^{2\sigma} + \psi_1(z_1) y^{2\sigma-1} + \cdots + \psi_{2\sigma-1}(z_1) y + \psi_{2\sigma}(z_1) = 0,$$

worin

$$\psi_1(z_1), \ \psi_2(z_1), \cdots \psi_{2\sigma}(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sind, so werden nach (17) *die Coefficienten des Polynoms*

$$(y - Y_1)(y - Y_2) \cdots (y - Y_\sigma) = y^\sigma + \chi_1(z_1) y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sein, während die zu den Grössen Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_σ gehörigen Irrationalitäten nach den Gleichungen (12), *wie aus der oben gefundenen Eigenschaft der Coefficienten der Polynome $p(y)$ und $q(y)$ hervorgeht, rationale Functionen der zugehörigen Grössen Y und der Grösse z_1, multiplicirt mit der Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$, sein werden.*

Es bedarf kaum einer weiteren Erläuterung, dass sich dasselbe Resultat auch für den Fall des ungeraden σ ergiebt; denn setzt man

$$3\sigma = 2m - 1,$$

und bildet, wenn α eine Lösung der Gleichung $R_1(y) = 0$ bezeichnet, den Ausdruck

$$(\delta) \qquad (y - \alpha) P(y) - Q(y) \sqrt{R_1(y)},$$

in welchem $P(y)$ ein Polynom

$$m - 1 = \frac{3\sigma - 1^{\text{ten}}}{2}$$

Grades, $Q(y)$ vom

$$m - \sigma - 1 = \frac{\sigma - 1^{\text{ten}}}{2}$$

Grade ist, so wird man wieder die

$$\frac{3\sigma - 1}{2} + \frac{\sigma - 1}{2} + 1 = 2\sigma$$

Constantenquotienten so bestimmen können, dass der Ausdruck (δ) für die Werthecombinationen

$$y_1, \sqrt{R_1(y_1)}, \cdots y_\sigma, \sqrt{R_1(y_\sigma)}, \qquad \eta_1, -\sqrt{R_1(\eta_1)}, \cdots \eta_\sigma, -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}$$

verschwindet, und es werden nunmehr alle weiteren Schlüsse dieselben bleiben, so dass sich wieder vermöge der Beziehung

$$(y - \alpha)^2 P(y)^2 - Q(y)^2 R_1(y)$$
$$= (y - \alpha)(y - y_1) \cdots (y - y_\sigma)(y - \eta_1) \cdots (y - \eta_\sigma)(y - Y_1) \cdots (y - Y_\sigma)$$

die Grössen

$$Y_1, \; Y_2, \cdots Y_\sigma$$

als Lösungen einer Gleichung ergeben, deren Coefficienten rational aus z_1 zusammengesetzt sind.

Hieraus folgt,

dass das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen sich in allen Fällen durch das folgende:

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_0(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{Y_1 dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2 dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_1(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Y_1^{\sigma-1} dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1} dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1} dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_{\sigma-1}(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1, \; Y_2, \cdots Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)}, \; \sqrt{R_1(Y_2)}, \cdots \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1 ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$,

ein Satz, der auch aus der Transformation der ϑ-Functionen der hyperelliptischen Integrale hergeleitet werden kann.

Wie die eben besprochene Vereinfachung des Transformationsproblems zur Herstellung beliebig vieler hyperelliptischer Integrale verwendet werden kann, die auf ebensolche Integrale niederer Ordnung reducirt werden können, ist leicht einzusehen; ich zeige in einer nächstens in Borchardt's Journal für Mathematik erscheinenden Arbeit die Anwendung des obigen Satzes auf die Ermittelung von hyperelliptischen Integralen, welche auf elliptische Integrale zurückführbar sind.

Wien, im März 1878.