Über eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie.

Von **Emil Waelsch** in Prag.

Die Aufgabe: „In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene die Geraden zu bestimmen, deren Grund- und Kreuzriss sich decken“ scheint mir als Übungsaufgabe in der darstellenden Geometrie und als Anwendung der projectiven Geometrie zweckdienlich.

Im folgenden werden zunächst in Art. 1 durch eine einfache Betrachtung die bekannten Gebilde*) mit sich deckenden Projectionen behandelt und in Art. 2 die Geraden bestimmt, für die Grund- und Kreuzriss zusammenfallen. In Art. 3 und 4 werden dann Lösungen der obigen Aufgabe angegeben und die Bedingungen aufgestellt dafür, dass reelle Lösungen vorhanden seien.

1. Ist ein Punkt a durch seinen Grund- und Aufriss a', a'', gegeben (Fig. 1), so findet man seinen Kreuzriss a''' in bekannter Weise mit Hilfe des gezeichneten Viertelkreises. Ist H die gezeichnete Halbierungslinie zwischen der X- und Y-Axe, so kann man den Zusammenhang zwischen den drei Projectionen a', a'', a''' auch wie folgt aussprechen: Die drei Projectionen des Punktes a sind Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten parallel sind zu den Projectionsaxen und dessen vierte Ecke α auf H liegt.

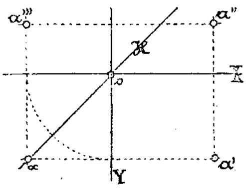

Fig. 1.

Wir nehmen nun an, dass zwei oder alle Projectionen eines Punktes zusammenfallen (Fig. 2).

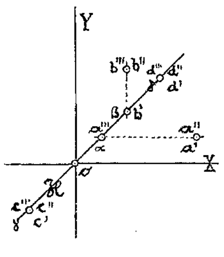

Fig. 2.

a) Fällt für einen Punkt a die Projection a' mit a'' zusammen, so muss die Rechteckseite $a'\,a''$ verschwinden, also auch die Seite $\alpha\,a'''$. Der Kreuzriss a''' des Punktes fällt daher auf H; der Punkt a liegt demnach in der Ebene H_1, welche H zur Kreuzrissspur hat und die X-Axe enthält.

*) S. z. B. Fiedler, Darstellende Geometrie I. p. ff.

b) Ist $b'' = b'''$ für einen Punkt b, so muss die Rechteckseite $b''\, b'''$ also auch die Seite $\mathfrak{z}\, b'$ verschwinden. Der Grundriss b' des Punktes fällt daher auf H; der Punkt b liegt demnach in der Ebene H_2, welche H zur Grundrissspur hat und die Y-Axe enthält.

c) Wenn alle drei Projectionen eines Punktes c zusammenfallen, werden beide Rechteckseiten verschwinden; die Projectionen des Punktes müssen daher in einen Punkt der Geraden H fallen. In der That liegt nach *a*) und *b*) ein solcher Punkt in der Schnittlinie h der Ebenen H_1, H_2 und die Projectionen dieser Schnittlinie fallen in die Gerade H.

d) Ist $d' = d'''$ für einen Punkt d, so liegt er nicht mehr in einer Ebene, wie unter *a*) und *b*); hier müssen die beiden Rechteckseiten $\mathfrak{d}\, d'$, $\mathfrak{d}\, d'''$ verschwinden, weshalb auch d'' nach $\mathfrak{d}$ fällt. Ein solcher Punkt gehört daher zu den Punkten *c*), er liegt auf h.

2. Um eine Gerade g zu bestimmen, kann man zwei ihrer drei Projectionen annehmen. Wird der Grundriss g' mit dem Aufriss g'' zusammenfallend angenommen, so hat jeder Punkt dieser Geraden zusammenfallenden Grund- und Aufriss, daher fällt sein Kreuzriss (nach 1 *a*,) in die Gerade H und es ist $g''' = H$. Ist für eine Gerade $g'' = g'''$, so ist (nach 1 *b*,) $g' = H$.

Wenn aber für eine Gerade $g' = g'''$ angenommen wird (Fig. 3), so sind die Projectionen a', a''' eines Punktes derselben Ecken des Rechtecks $a'\, a''\, a'''\, \alpha$. Fällt daher a' in den Schnittpunkt p der Geraden H nnd g', so fällt auch a''' nach p; die Gerade g enthält demnach einen Punkt, dessen Grund- und Kreuzriss und daher (nach 1 *c*,) auch dessen Aufriss nach p fällt, sie schneidet die Gerade h. Die Projection g'' der Geraden ist demnach durch den Punkt p und ihren zweiten Spurpunkt v'' gegeben.

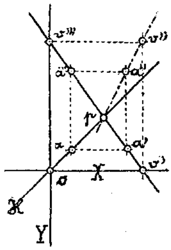

Fig. 3.

Man sieht leicht, dass es durch einen beliebigen Punkt a im Raume nur eine Gerade g gibt, für welche $g' = g'''$ ist; denn sind (Fig. 3) a', a'', a''' die Projectionen dieses Punktes, so muss $g' = g'''$ identisch mit der Verbindungslinie $a'\, a'''$ sein, worauf dann nach dem soeben Gesagten g'' bestimmt ist.

Liegt der gegebene Punkt $\mathfrak{h}$ auf h, fallen also seine drei Projectionen auf H nach p, so kann $g' = g'''$ den Punkt p enthaltend, aber sonst beliebig angenommen werden. Der Aufrisspunkt v'' der Geraden beschreibt dann eine gleichzeitige Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren Mittelpunkt der Punkt p ist, welche die X- und Y-Axe zu Asymptotenrichtungen hat und den Punkt o enthält. Die Geraden g, welche den Punkt $\mathfrak{h}$ enthalten, und für die $g' = g''$ ist, erfüllen demnach den Kegel $\mathfrak{K}$, dessen Scheitel $\mathfrak{h}$ ist und dessen Leitcurve diese Hyperbel $\mathfrak{H}$ ist.

Man kann zu diesem Kegel $\mathfrak{K}$ auch auf folgende Weise gelangen. Wenn für eine Gerade g, welche den Punkt v enthält,

$g'=g'''$ ist, so schließt die Projection der Geraden auf die Grundrissebene mit der X-Axe denselben Winkel ein, wie ihre Projection auf die Kreuzrissebene mit der Z-Axe, so dass bei den Drehungen, welche diese Projectionsebenen in die Aufrissebene bringen, die Projectionen der Geraden sich decken. Eine solche Gerade g ist demnach der Schnitt zweier Ebenen, welche die X-, resp. Y-Axe enthalten und zur Grund-, resp. Aufrissebene gleich geneigt sind. Die so möglichen Geraden g liegen demnach auf einem Kegel K zweiter Ordnung, welcher sich durch congruente Ebenenbüschel, deren Axen die X-, resp. Y-Axe sind, erzeugen lassen. Dieser Kegel berührt daher die Grundrissebene in der X-Axe, die Kreuzrissebene in der Y-Axe, er enthält die Gerade h und ist symmetrisch zur Aufrissebene.

Schneidet man nun die Projectionsebenen und die Gerade h mit einer Ebene $\mathfrak{E}$, die senkrecht zu h ist, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 4), dessen Ecken die Durchstoßpunkte mit den Projectionsaxen sind und dessen Mittelpunkt der Durchstoßpunkt mit h ist. Die obigen congruenten Ebenenbüschel schneiden diese Ebene in projectiven Strahlenbüscheln, in welchen den Strahlen xy, xz, xh die Strahlen yz, yx, yh entsprechen, welche demnach congruent sind und den gezeichneten Kreis erzeugen. Die Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet daher den Kegel K in einem Kreise k.

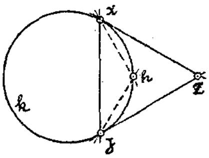

Fig. 4.

Die Geraden g, welche durch den Punkt $\mathfrak{h}$ von h gehen und die auf dem Kegel $\mathfrak{K}$ liegen, müssen parallel sein zu den Erzeugenden des Kegels K.

Die Geraden g, für die $g'=g'''$ ist, bilden demnach eine Strahlencongruenz erster Ordnung zweiter Classe.

3. Eine Ebene E schneidet die Ebene H_1 in einer Geraden h_1, deren Grund- und Aufriss zusammenfallen; die Ebene H_2 schneidet sie in einer Geraden h_2, deren Auf- und Kreuzriss sich decken. Die beiden Geraden h_1, h_2 schneiden sich in dem Punkt $\mathfrak{h}$ dieser Ebene, dessen drei Projectionen zusammenfallen. Sei (Fig. 5) die Ebene durch ihre beiden Spuren E', E'' gegeben, so kann der Punkt $\mathfrak{h}$ als Durchstoßpunkt der Ebene E mit der Geraden h, deren sämmtliche Projectionen nach H fallen, gefunden werden; man hat dann nur den Punkt $\mathfrak{h}'$ mit den beiden Punkten ξ und η der Spuren E' E'' zu verbinden, um die Projectionen der Geraden h_1, h_2 zu erhalten.

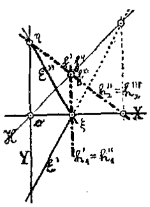

Fig. 5.

Durch den Punkt $\mathfrak{h}$ der Ebene E müssen nun nach Obigem die in der Ebene eventuell vorhandenen Geraden h_3 geben, für die $h'_3=h_3'''$ ist. Um sie zu finden, bestimmen wir ihre Aufrisspunkte v''. Dieselben liegen nach Art. 1 auf der gleichseitigen

Hyperbel $\mathfrak{H}$; die Punkte, in welchen $\mathfrak{H}$ die Spur E'' schneidet, sind die gesuchten Aufrisspunkte. Es gibt zwei solche Gerade h_3^1, h_3^2, deren Projectionen leicht gefunden werden können.

Eine zweite Construction kann mit Hilfe eines Kreises ausgeführt werden, indem man den Kegel K des vorigen Art. benützt. Legt man durch o die zu E parallele Ebene E, so schneidet diese den Kegel K in zwei Erzeugenden η_3, welche parallel sind zu den Geraden h_3 der Ebene E. Um die Geraden η_3, wenn die Ebene E gegeben ist, zu bestimmen, lege man die Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht zu h, für die alle drei Spuren zusammenfallen. Dann lege man den Kreis k (Art. 2) um die Spur $\mathfrak{E}''$ in die Aufrissebene um und ebenso die Schnittlinie s der Ebenen $\mathfrak{E}$ und E u. s. w.

4. Man kann die Projectionen h'_3 auch als Doppelstrahlen projectiver Strahlenbüschel oder einer Strahleninvolution erhalten.

Die Projectionen l' der Geraden l des Strahlenbüschels (l) in der Ebene E mit dem Centrum $\mathfrak{h}$ bilden ein Büschel (l'), das projectiv (l) ist. Ebenso ist $(l''') \overline{\wedge} (l)$, daher $(l') \overline{\wedge} (l''')$. In den letzten projectiven Büscheln entsprechen den Geraden h_1'', H die Geraden H, h_2'' und die parallele Gerade zur X-Axe der parallelen zu Y-Axe. Die Doppelstrahlen h_3' dieser Büschel können daher in bekannter Weise construiert werden, indem man die projectiven Büschel mit einem Kreise schneidet, der durch den Punkt $\mathfrak{h}'$ geht.

Betrachten wir nun das Büschel (g'), dessen Centrum o ist, so kann es aufgefasst werden als Grundriss eines Büschels (g) der Ebene E. Das Büschel (g''') ist projectiv zu (g'); ziehen wir durch o die Geraden γ''' parallel zu g''', so erhalten wir ein Büschel (γ''') das projectiv (g') ist. Werden die durch o gehenden zu E', E''' parallelen Geraden mit ε', ε''' bezeichnet, so ist für $g' = X$, Y, ε' resp. $g''' = Y$, ε''', X, daher $\gamma' = Y$, ε''', X. Man hat daher die folgenden entsprechenden Strahlen der Büschel: ε', X; X, Y; $Y \varepsilon'''$.

Wird von X, resp. Y der vierte harmonische Strahl bezüglich ε', Y resp. ε''', X bestimmt, so erhält man den Strahl $\mathfrak{X}$, resp. $\mathfrak{Y}$. Die beiden Strahlenpaare $X\mathfrak{X}$, $Y\mathfrak{Y}$ trennen (nach einem bekannten Satze über projective Gebilde) die Doppelstrahlen der projectiven Büschel harmonisch. Die beiden Strahlenpaare $X\mathfrak{X}$, $Y\mathfrak{Y}$ bestimmen daher eine quadratische Involution, deren Doppelstrahlen die beiden Geraden η_3^1, η_3^2 sind, welche zu den Geraden h''_3 parallel sind.

Die Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ können auf folgende Weise gefunden werden. Man bestimme den Punkt $\left.\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{x}_2\end{matrix}\right\}$ so, dass $\left.\begin{matrix}\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}_1 = 2\,\mathfrak{o}\,\xi_1\\ \mathfrak{o}\,\mathfrak{x}_2 = 2\,\mathfrak{o}\,\xi_2\end{matrix}\right\}$ ist; dann ist die Verbindungslinie $\left.\begin{matrix}E_1\\ E_3\end{matrix}\right\}$ des Punktes $\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}$ mit $\left.\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{x}_2\end{matrix}\right\}$ parallel zu $\left.\begin{matrix}X\\ \mathfrak{Y}\end{matrix}\right\}$.

Die Doppelstrahlen η_3 also auch die Geraden h_3 sind dann reell, wenn die Strahlenpaare $X\mathfrak{X}$, $Y\mathfrak{Y}$ sich nicht übergreifen, im Gegenfalle imaginär; sie fallen zusammen, wenn die Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ coincidieren und die eine Gerade h_3, die hier auftritt, ist (Fig. 8) parallel zu E_1 parallel E_2 [1]).

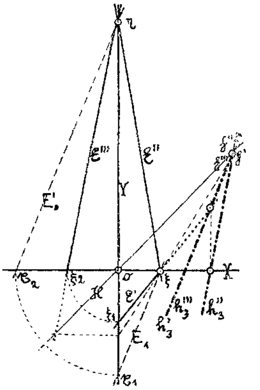

Fig. 6.

Um im ersten Falle die Doppelstrahlen zu construieren (Fig. 6), beschreiben wir den Kreis mit dem Mittelpunkt ξ_1, welcher den Punkt $\mathfrak{o}$ enthält und bestimmen die zwei Punktepaare der Punktinvolution, welche die Paare $X\mathfrak{X}$, $Y\mathfrak{Y}$ der Strahleninvolution aus ihm ausschneiden. Das eine Punktepaar wird von der Geraden E_1 ausgeschnitten, das andere von der durch den Punkt $\mathfrak{x}$ auf die Gerade E_3 gefällten Senkrechten. Die Construction gestaltet sich daher in folgender Weise: Die Senkrechte vom Punkte ξ_1 auf E_1 schneidet die X-Axe in einem Punkte σ; die Parallele zu E_3 schneidet im Punkte τ die Tangente des Kreises im Punkte $\mathfrak{x}_1$. Die Gerade $\sigma\,\tau$ schneidet den Kreis in den Punkten der Geraden η_3.

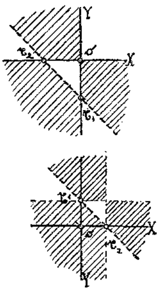

Fig. 7 und 7′.

[1]) Man kann dieses Kriterium in verschiedener Weise ausdrücken z. B.: Wenn der Schnittpunkt der Geraden E_1, E_2 in einem der schraffierten Ebenentheile liegt (Fig. 7 und 7′), so sind die Geraden h_3 reell. Liegt er im Unendlichen, so fallen sie zusammen, und fällt er auf eine der Übergangslinien, so wird die Ebene E, resp. zur Grundrissebene, zur Kreuzrissebene und zur Ebene, die den Kegel K längs h berührt.