

Ueber ternäre biquadratische Formen.

(Von F. R. SCHERRER, in Frauenfeld.)

[Auszug aus der Beilage zum Programm der Thurgauischen Cantonschule von 1881.]

I. Theorie der Polaren ebener algebraischer Curven.

Setzt man die ternäre Form n^{ten} Grades der Variabeln α, β, δ

$$\sum_{qrs} \frac{n!}{q!r!s!} A_{qrs} \alpha^q \beta^r \delta^s, \quad (q + r + s = n)$$

die mit K^n bezeichnet werden mag, identisch mit

$$\sum_{i=1}^{\binom{n+2}{2}} m_i (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^n,$$

fasst x_i, y_i als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, dem die Masse m_i beigelegt ist, und α, β, δ als Coëfficienten der Gleichung

$$\alpha x + \beta y - \delta = 0$$

einer Geraden in Normalform auf, so gelangt man durch Betrachtungen, welche denen, die Herr Prof. REYE in Strassburg in seiner Arbeit: *Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen* (*) angestellt hat, ganz analog sind, zu folgenden Sätzen:

1.) Jede ternäre Form n^{ten} Grades kann auf unendlich viele Arten durch die n^{ten} Momente eines Systemes von $\binom{n+2}{2}$ Massenpunkten bezüglich aller Geraden des Ebene dargestellt werden. Die $\binom{n+2}{2}$ Punkte dürfen nicht auf

(*) CRELLE's Journal für Mathematik, Bd. 78.

einer Curve n^{ter} Ordnung, können aber sonst ganz willkürlich angenommen werden; durch ihre Lage sind die ihnen beizulegenden Massen eindeutig bestimmt.

2.) Jede beliebige Curve n^{ter} Classe kann als die n^{te} Nullcurve eines $\binom{n+2}{2}$ -punktigen Massensystems aufgefasst werden.

3.) Wenn des Moment eines Massensystems bezüglich einer Curve n^{ter} Ordnung für irgend eine Richtung den Werth Null hat, so hat es denselben auch für jede andere Richtung.

4.) Wenn ein Massensystem indifferent ist hinsichtlich seiner n^{ten} Momente, so ist sein Moment in Bezug auf jede beliebige Curve n^{ter} Ordnung gleich Null.

Oder:

5.) Wenn zwei Massensysteme äquivalent sind hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente, so sind bezüglich jeder Curve n^{ter} und niedrigerer Ordnung ihre Momente einander gleich.

Ist K^n eine Curve n^{ter} Classe von der Gleichung

$$K^n \equiv \sum_{qrs} \frac{n!}{q! r! s!} A_{qrs} \alpha^q \beta^r \delta^s \equiv \sum_{i=1}^{i=\binom{n+2}{2}} m_i (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^n = 0 \quad \left. \vphantom{\sum_{qrs}} \right\} \quad (1)$$

($q + r + s = n$)

und C^k eine Curve k^{ter} Ordnung, deren Gleichung

$$C_{(x,y)}^k \equiv \sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0 \quad (\rho + \sigma + \tau = k \text{ und } k \leq n)$$

sein mag, so verstehen wir unter der Polaren von C^k bezüglich der Curve n^{ter} Classe K^n die Curve $n-k^{\text{ter}}$ Classe Π^{n-k} , welche die Gleichung besitzt

$$\Pi^{n-k} \equiv \sum_{i=1}^{i=\binom{n+2}{2}} m_i C_{(x,y)}^k (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^{n-k} = 0. \quad (2)$$

Wenn man also

$$\Pi^{n-k} \equiv \sum_{uvw} \frac{(n-k)!}{u! v! w!} C_{uvw} \alpha^u \beta^v \delta^w \quad (u + v + w = n - k)$$

setzt, so bestehen zwischen den Coëfficienten der Formen K^n , C^n und Π^{n-k}

die folgenden Relationen:

$$C_{uvv} = \sum_{\rho\sigma\tau} (-1)^{\tau} A_{u+\rho, v+\sigma, u+\tau} B_{\rho\sigma\tau}, \quad (3)$$

aus denen sich der Satz ergibt:

6.) Durchläuft eine Curve k^{ter} Ordnung einen Curvenbüschel, so beschreibt ihre Polare eine zu dem ersteren projectivische Curvenschaar.

Eine Curve k^{ter} Ordnung wird apolar zu der Curve n^{ten} Classe K^n genannt, wenn ihr keine bestimmte Curve $n - k^{ter}$ Classe als Polare in Bezug auf K^n entspricht, das heisst, wenn alle C_{uvv} verschwinden; eine apolare Curve k^{ter} Ordnung ist somit durch $\binom{k+2}{2} - \binom{n-k+2}{2} - 1$ beliebige Punkte bestimmt.

7.) Zwei apolare Curven k^{ter} Ordnung bestimmen einen Büschel apolarer Curven k^{ter} Ordnung.

8.) Jede Curve n^{ten} oder niedrigerer Ordnung, welche eine apolare Curve der K^n als Theil enthält, ist selbst apolar zu K^n .

9.) Wenn ein Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch r Massenpunkte ersetzt werden kann, so geht jede zur n^{ten} Nullcurve des Systems apolare C^n , welche $r - 1$ dieser Massenpunkte enthält, auch durch den r^{ten} Punkt, es sei denn, dass dessen Masse Null ist; im letzteren Falle ist das gegebene Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente äquivalent dem Systeme der $r - 1$ übrigen Massenpunkte.

10.) Werden auf einer zu K^n apolaren Curve k^{ter} Ordnung C^k beliebige $\binom{n+2}{2} - \binom{n-k+2}{2}$ Punkte angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente äquivalent sind; die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt.

11.) Werden von der Punktgruppe, in welcher sich eine apolare Curve j^{ter} und eine solche k^{ter} Ordnung schneiden, beliebige $\binom{n+2}{2} - \binom{n-i+2}{2} - \binom{n-k+2}{2} + \binom{n-i-k+2}{2}$ Punkte angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente äquivalent sind; die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt.

II. Darstellung der ternären biquadratischen Form als Summe von sechs Biquadraten.

Zufolge Satz (1) lässt sich die ternäre biquadratische Form

$$K^4 \equiv \sum_{qrs} \frac{4!}{q!r!s!} A_{qrs} \alpha^q \beta^r \delta^s \quad (q+r+s=4) \quad (4)$$

überführen in

$$K^4 \equiv \sum_{i=1}^{i=15} m_i (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^4. \quad (5)$$

Soll nun die Polare eines Kegelschnittes C^2 , dessen Gleichung

$$C_{\omega, y}^2 \equiv \sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0 \quad (\rho + \sigma + \tau = 2)$$

ist, in Bezug auf die Curve K^4 vierter Classe, welche der Gleichung

$$K^4 = 0$$

entspricht, in den doppelt gelegten Punkt x', y' zerfallen, so muss nach Gleichung (2)

$$\sum_{i=1}^{i=15} m_i C_{\alpha, y_i}^2 (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^2 \equiv \lambda (\alpha x' + \beta y' - \delta)^2$$

sein; das heisst, es müssen der Gl. (3) gemäss die sechs Gleichungen bestehen:

$$\sum_{\rho\sigma\tau} (-1)^\tau A_{u+\rho, v+\sigma, u+\tau} B_{\rho\sigma\tau} - \lambda x'^u y'^v (-1)^u = 0 \quad (u+v+w=2).$$

Fügt man zu diesen noch die nachstehende

$$\sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0,$$

so erhält man durch Elimination der $B_{\rho\sigma\tau}$ und des λ aus diesen sieben Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} 0, & x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\ x'^2, & A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{301}, & -A_{211}, & A_{202} \\ x'y', & A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{112} \\ y'^2, & A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{022} \\ x', & -A_{301}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\ y', & -A_{211}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{013} \\ 1, & A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung, deren linke Seite wir mit $C'_{(x,y)}$ bezeichnen wollen, stellt denjenigen Kegelschnitt C'^2 dar, dessen Polare in Bezug auf K^4 der doppelt gelegte Punkt x', y' ist; wir nennen daher den Kegelschnitt C'^2 und dessen Punkte *dem Punkte x', y' in Bezug auf K^4 associirt* (*).

12.) *Geht der einem Punkte associirte Kegelschnitt durch einen gewissen andern Punkt, so geht auch der dem letzteren associirte Kegelschnitt durch den ersteren.*

13.) *Alle sich selbst associirten Punkte liegen auf einer Curve vierter Ordnung C^4 , deren Gleichung*

$$C'_{(x,y)} \equiv \begin{vmatrix} 0, & x^2, & xy, & y^2, & x & y, & 1 \\ x^2, & A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{301}, & -A_{211}, & A_{202} \\ xy, & A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{112} \\ y^2, & A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{022} \\ x, & -A_{301}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\ y, & -A_{211}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{013} \\ 1, & A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

ist.

Sind x', y' und x'', y'' zwei einander in Bezug auf K^4 associirte Punkte, C'^2 der dem ersteren, C''^2 der dem letzteren associirte Kegelschnitt, und setzt man

$$m' = \frac{\sum_{i=1}^{i=15} m_i C'_{(x_i, y_i)}^2}{C'_{(x', y')}^2} \quad (8)$$

und

$$m'' = \frac{\sum_{i=1}^{i=15} m_i C'_{(x_i, y_i)}^2}{C'_{(x'', y'')}^2},$$

wobei

$$C'_{(x,y)} = 0 \quad \text{und} \quad C'_{(x,y)} = 0$$

die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind, so wird nach Satz (12) die

(*) Vergleiche die analoge Definition des Herrn REYE in seiner Arbeit: *Darstellung quaternärer etc.*, in CRELLE's Journal, Bd. 78, pag. 124.

Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=15} m_i C_{(x_i, y_i)}^2 (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^2 - m' C_{(x', y')}^2 (\alpha x' + \beta y' - \delta)^2 - m'' C_{(x'', y'')}^2 (\alpha x'' + \beta y'' - \delta)^2 = 0$$

identisch erfüllt; sobald man $C_{(x, y)}^2$ entweder durch $C_{(x, y)}'^2$ oder $C_{(x, y)}''^2$ ersetzt; folglich sind die beiden Kegelschnitte C'^2 und C''^2 apolar zu der vierten Nullcurve des Massensystems $m_1(x_1, y_1), m_2(x_2, y_2), \dots, m_{15}(x_{15}, y_{15}), -m'(x', y'), -m''(x'', y'')$, also lassen sich nach Satz (11) den vier Schnittpunkten von C'^2 und C''^2 solche Massen beilegen, dass dieselben dem soeben genannten Massensystem hinsichtlich der vierten Momente äquivalent sind, woraus folgt:

14.) *Jedes ebene Massensystem ist hinsichtlich seiner vierten Momente durch sechs Massenpunkte ersetzbar.*

Oder:

15.) *Jede ternäre biquadratische Form ist auf dreifach unendlich viele Arten als Summe von sechs Biquadraten darstellbar.*

Liesse sich das Massensystem $m_1(x_1, y_1), m_2(x_2, y_2), \dots, m_{15}(x_{15}, y_{15})$ hinsichtlich seiner vierten Momente durch fünf Massenpunkte ersetzen, so wäre der durch diese fünf Punkte gelegte Kegelschnitt C^2 apolar zu K^4 , was den Gleichungen (3) gemäss nur dann möglich ist, wenn die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{331}, & -A_{244}, & A_{202} \\ A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{244}, & -A_{124}, & A_{112} \\ A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{124}, & -A_{034}, & A_{022} \\ -A_{304}, & -A_{244}, & -A_{124}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\ -A_{244}, & -A_{124}, & -A_{034}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{013} \\ A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wenn umgekehrt A gleich Null ist, so besitzt die K^4 einen apolaren Kegelschnitt C^2 , dessen Gleichung

$$C_{(x, y)}^2 = 0$$

sein mag. Bezeichnet man nun mit K_0^4 die vierte Nullcurve des um einen beliebigen Massenpunkt $m_0(x_0, y_0)$ vermehrten Massensystems m_1, m_2, \dots, m_{15} , so ist C^2 der dem Punkte x_0, y_0 in Bezug auf K_0^4 associirte Kegelschnitt, somit lässt sich das um $m_0(x_0, y_0)$ vermehrte ursprüngliche Massensystem hinsichtlic^h

seiner vierten Momente durch sechs Massenpunkte ersetzen, von denen $m_0(x_0, y_0)$ einer ist, während die fünf übrigen auf C^2 liegen; folglich lässt sich die ursprüngliche Form durch die vierten Momente der fünf letzten Massenpunkte auf C^2 darstellen, woraus der Satz folgt:

16.) Eine ternäre biquadratische Form lässt sich stets und auch nur dann als eine Summe von fünf vierten Potenzen linearer Formen darstellen, wenn die Determinante A verschwindet; und zwar ist dann die Darstellung auf unendlich viele Arten möglich. Die betreffenden linearen Formen stellen, wenn die Variablen als Liniencoordinaten interpretirt werden, fünf Punkte eines von der dargestellten Form allein abhängigen Kegelschnittes dar, auf welchem einer der Punkte beliebig gewählt werden darf (*).

Dieser Kegelschnitt tritt übrigens doppelt gelegt an die Stelle von C^4 im Falle A verschwindet.

17.) Eine ternäre biquadratische Form lässt sich stets und nur dann als eine Summe von vier vierten Potenzen linearer Formen darstellen, wenn die sämtlichen ersten Unterdeterminanten der Determinante A verschwinden (**).

Die Polare eines Kegelschnittes, der durch fünf von sechs Massenpunkten geht, durch deren vierte Momente die Form K^4 darstellbar ist, reducirt sich auf den doppelt gelegten sechsten Punkt; somit ist jedem der sechs Punkte der Kegelschnitt associirt, welcher durch die fünf übrigen Punkte geht, und wir nennen daher eine Gruppe von sechs Massenpunkten, durch deren vierte Momente K^4 darstellbar ist, ein *Sextupel associirter Punkte in Bezug auf K^4* . Jedem Punkte eines solchen Sextupels gehört eine ganz bestimmte Masse zu, welche mit Hülfe der Gleichung (8) berechnet wird und von den übrigen Punkten des Sextupels unabhängig ist.

Ist C^3 eine durch drei Punkte eines Sextupels gehende zu K^4 apolare Curve dritter Ordnung, so bildet sie mit der Geraden, welche zwei der übrigen Punkte des Sextupels verbindet nach Satz (8) eine apolare Curve vierter Ordnung, die nach Satz (9) auch durch den letzten Punkt des Sextupels gehen muss. Das heisst:

(*) Diesen Satz bewies schon, wenn auch in ganz anderer Weise, Herr LÜROTH, Mathematische Annalen, Bd. 1, pag. 41, und wenigstens theilweise CLEBSCH in seiner Abhandlung Ueber Curven vierter Ordnung, CRELLE's Journal, Bd. 59, pag. 143.

(**) Vergleiche LÜROTH, Mathematische Annalen, Bd. 1, pag. 52.

18.) Geht eine in Bezug auf K^4 apolare Curve dritter Ordnung durch drei Punkte eines Sextupels associirter Punkte in Bezug auf K^4 , so geht sie auch durch die übrigen.

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres:

19.) Durch die zwölf Punkte irgend zweier Sextupel associirter Punkte in Bezug auf K^4 lässt sich stets eine Curve dritter Ordnung legen; dieselbe ist apolar zu K^4 (*).

III. Das System der Kegelschnitte, welche den Punkten der Ebene in Bezug auf K^4 associirt sind.

Ist

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden ξ mit den homogenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 und diejenige eines Punktes x mit den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 , ferner

$$K^4 \equiv \sum a_{iklm} \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m \quad \begin{pmatrix} i \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

und setzt man voraus, dass sich a_{iklm} nicht ändert, wenn die vier Indices beliebig vertauscht werden, so erhält der Kegelschnitt $C_{x'}^2$, welcher dem Punkte x' in Bezug auf die Curve vierter Classe, deren Gleichung

$$K^4 = 0$$

lautet, associirt ist, in homogenen Coordinaten die Gleichung:

$$C_{x'}^2 = \begin{vmatrix} 0, & x_1^2, & x_1 x_2, & x_2^2, & x_2 x_3, & x_3^2, & x_3 x_1 \\ x_1^2, & a_{1111}, & a_{1112}, & a_{1122}, & a_{1123}, & a_{1133}, & a_{1131} \\ x_1' x_2', & a_{1211}, & a_{1212}, & a_{1222}, & a_{1223}, & a_{1233}, & a_{1231} \\ x_2^2, & a_{2211}, & a_{2212}, & a_{2222}, & a_{2223}, & a_{2233}, & a_{2231} \\ x_2' x_3', & a_{2311}, & a_{2312}, & a_{2322}, & a_{2323}, & a_{2333}, & a_{2331} \\ x_3^2, & a_{3311}, & a_{3312}, & a_{3322}, & a_{3323}, & a_{3333}, & a_{3331} \\ x_3' x_1', & a_{3111}, & a_{3112}, & a_{3122}, & a_{3123}, & a_{3133}, & a_{3131} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

(*) Diesen Satz bewies auch Herr ROSANES in seinem Aufsatz: *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen*, CRELLE, Bd. 76, pag. 328.

Ist endlich

$$A = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1122} & a_{1123} & a_{1133} & a_{1131} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1222} & a_{1223} & a_{1233} & a_{1231} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2222} & a_{2223} & a_{2233} & a_{2231} \\ a_{2311} & a_{2312} & a_{2322} & a_{2323} & a_{2333} & a_{2331} \\ a_{3311} & a_{3312} & a_{3322} & a_{3323} & a_{3333} & a_{3331} \\ a_{3111} & a_{3112} & a_{3122} & a_{3123} & a_{3133} & a_{3131} \end{vmatrix} \quad (11)$$

und

$$A_{ik,lm} = \frac{\partial A}{\partial a_{iklm}},$$

wobei die beiden ersten Indices ik die Zeile und die beiden letzten lm die Colonne bezeichnen, welcher das Element a_{iklm} in der Determinante A angehört, so ist

$$C^2_{i'} \equiv \sum_{ik} \sum_{lm} A_{ik,lm} x'_i x'_k x_l x_m \quad \left(\begin{matrix} ik \\ lm \end{matrix} \right) = 11, 12, 22, 23, 33, 31).$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung unter Weglassung des obren Index der x gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$C^4 \equiv \sum_{ik} \sum_{lm} A_{ik,lm} x_i x_k x_l x_m = 0 \quad (12)$$

der Curve der sich selbst associirten Punkte.

20.) Die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf den ihm associirten Kegelschnitt ist zugleich die dritte Polare desselben Punktes in Bezug auf C^4 .

Und:

21.) Jeder Kegelschnitt, welcher einem auf ihm liegenden Punkt associirt ist, berührt in diesem die C^4 .

Hieraus ergibt sich mit Berücksichtigung des Satzes (12):

22.) Durch jeden Punkt P der Ebene gehen acht Punkten der C^4 associirte Kegelschnitte; dieselben berühren die C^4 in den Schnittpunkten der letzteren mit dem Kegelschnitt, welcher dem Punkte P associirt ist.

Der dem Punkte x' associirte Kegelschnitt hat in Liniencoordinaten die

Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 2 \sum A_{11, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{12, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{31, ik} x'_i x'_k, & \xi_1 \\ \sum A_{12, ik} x'_i x'_k, & 2 \sum A_{22, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{23, ik} x'_i x'_k, & \xi_2 \\ \sum A_{31, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{23, ik} x'_i x'_k, & 2 \sum A_{33, ik} x'_i x'_k, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Diese Gleichung liefert mit Zuhülfenahme des Satzes (12) den nachstehenden:

23.) Die Punkte, denen Kegelschnitte associirt sind, welche eine gegebene Gerade g berühren, liegen auf einer Curve C^4 vierter Ordnung; dieselbe ist die Enveloppe derjenigen Kegelschnitte, welche den Punkten der Geraden g associirt sind.

Der dem Punkte x' in Bezug auf K^4 associirte Kegelschnitt zerfällt in ein Geradenpaar, wenn seine Discriminante

$$C^6 \equiv \begin{vmatrix} 2 \sum A_{11, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{12, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{31, ik} x'_i x'_k \\ \sum A_{12, ik} x'_i x'_k, & 2 \sum A_{22, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{23, ik} x'_i x'_k \\ \sum A_{31, ik} x'_i x'_k, & \sum A_{23, ik} x'_i x'_k, & 2 \sum A_{33, ik} x'_i x'_k \end{vmatrix} \quad (14)$$

verschwindet, woraus folgt:

24.) Alle Punkte, welchen in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte associirt sind, erfüllen eine Curve sechster Ordnung C^6 (*).

Wenn die Invariante A (11) gleich Null ist, so zerfällt C^6 in den dreifach gelegten Kegelschnitt (**), welcher in diesem Falle an die Stelle von C^4 tritt.

Sind P_1, P_2, P_3 Punkte eines Sextupels associirter Punkte in Bezug auf K^1 , dessen drei übrige Punkte auf einer Geraden g liegen, und bezeichnen wir im Dreieck $P_1 P_2 P_3$ die der Ecke P_i gegenüberliegende Seite mit g_i , dann ist dem Punkte P_i das Geradenpaar gg_i und jedem Punkte von g ein Kegelschnitt associirt, welcher durch die drei Punkte P_i geht; es participirt somit die Gerade g an drei und, wie sich leicht zeigen lässt, auch nur an drei zerfallenden associirten Kegelschnitten. Der irgend einem Punkte P der Ebene

(*) Dieser Satz ist gleichbedeutend mit demjenigen, welchen CLEBSCH in seinem Aufsatz: *Ueber Curven vierter Ordnung* (CRELLE, Bd. 59, pag. 135) bewiesen hat. Es ist indessen der Ausdruck für ψ erwähnten Ortes unrichtig, wodurch die Betrachtungen in § 5 der citirten Arbeit unmöglich werden.

(**) CLEBSCH in CRELLE, Bd. 59, pag. 145.

associirte Kegelschnitt C^2 schneidet die C^6 (14) in zwölf Punkten, welchen zerfallende durch P gehende Kegelschnitte associirt sind; ist g eine durch P gehende Gerade, welche einem dieser Schnittpunkte associirt ist, so participirt dieselbe an drei zerfallenden Kegelschnitten, die Schnittpunkten der C^2 und C^6 associirt sind; es gehen demnach durch jeden Punkte der Ebene bloß vier Geraden, welche Theile von associirten Kegelschnitten sind, woraus der Satz folgt:

25.) *Alle Punkten der Ebene associirten Geradenpaare umhüllen eine Curve K'^4 vierter Classe; jede Tangente derselben participirt an drei associirten Geradenpaaren, deren zweite Geraden sich in den Ecken eines der Curve C^6 eingeschriebenen Dreiecks schneiden, welches die Eigenschaft hat, dass jeder Ecke desselben die gegenüberliegende Seite und die allen drei Paaren angehörende Tangente von K'^4 associirt ist. Es existiren somit unendlich viele Dreiecke, welche gleichzeitig der Curve C^6 ein- und der Curve K'^4 umgeschrieben sind; durch die Eckpunkte von irgend zwei solchen Dreiecken lässt sich ein Kegelschnitt legen, welcher die Eckpunkte von noch zwei weiteren Dreiecken derselben Art enthält.*

Es lässt sich unschwer darthun, dass die Polare K^3 einer Tangente von K'^4 in Bezug auf K^4 als dritte Nullcurve eines dreipunktigen Massensystems aufgefasst werden kann; es zerfällt daher die Polare der Verbindungslinie zweier dieser Punkte in Bezug auf K^3 in den doppelt gelegten dritten Punkt, also bilden diese drei Punkte die HESSE'sche Curve von K^3 , welche bekanntlich nur dann in drei Punkte zerfällt, wenn die in symbolischer Form geschriebene Invariante

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd)$$

verschwindet (*); folglich besitzt die Curve K'^4 die Gleichung

$$(abc)(abd)(acd)(bcd)a_{\xi}b_{\xi}c_{\xi}d_{\xi} = 0 \quad (15)$$

welche schon Herr LÜROTH (**) angegeben hat.

Irgend einem Schnittpunkte der C^4 (12) und der C^6 (14), welchen wir mit P bezeichnen wollen, ist ein Geradenpaar gg' associirt, dessen eine Gerade g' in P die C^4 berührt; die Polare von g' in Bezug auf die Polare von g zerfällt somit in den doppelt gelegten Punkt P ; der letztere ist daher ein Wen-

(*) CLERSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, herausgegeben von LINDEMANN, Bd. 1, pag. 553.

(**) *Mathematische Annalen*, Bd. 1, pag. 45.

depunkt der Polaren von g in Bezug auf K^4 und g' die zugehörige Wendetangente, wesshalb sie auch die HESSE'sche Curve von K^4 berührt. Hieraus ergibt sich der Satz:

26.) *Die vierundzwanzig Schnittpunkte von C^4 und C^6 sind die Wendepunkte der ersten Polaren von K^4 und die in ihnen an C^4 gelegten Tangenten die zugehörigen Wendetangenten; die letzteren berühren die K^4 sowie die Hesse'sche Curve von K^4 (*).*

27.) *Die Doppelpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche Punkten der Ebene associirt sind und zerfallen, liegen auf einer Curve zwölfter Ordnung C^{12} .*

Einem gemeinsamen Punkte der Curven C^6 und C_g^4 (13) ist ein Geradenpaar associirt, welches die Gerade g berührt, dessen Doppelpunkt also auf g liegt; da aber g die C^{12} nur in zwölf Punkten schneidet, so können C^6 und C_g^4 nicht vierundzwanzig sondern nur zwölf von einander verschiedene gemeinsame Punkte besitzen; das heisst.

28.) *Alle Curven C_g^4 berühren die Curve C^6 zwölfmal.*

Frauenfeld, im December 1880.

(*) In der schon mehrfach citirten Abhandlung von CLEBSCH: *Ueber Curven vierter Ordnung* in CRELLE's Journal, Bd. 59 findet sich der diesem Satze dualistisch entsprechende ebenfalls; jedoch sind dort die Gleichungen (15) sowie die Gestalt von Ω (oben C^4) unrichtig und ergeben nur desshalb ein richtiges Resultat, weil in der Endgleichung diese Unrichtigkeiten herausfallen.