Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. $(u,\ v)$ désignant le plus grand commun diviseur de u et v, et $F(u,\ v)$ étant une fonction quelconque de $(u,\ v)$, tâchons d'évaluer la somme des valeurs que prend $F(u,\ v)$, lorsque u et v varient séparément de 1 à n. À cet effet, observons que, pour avoir $(u,\ v)=p$, il faut et il suffit que l'on ait $u=pu'$, $v=pv'$, les entiers u' et v' étant *premiers entre eux*. Il en résulte que, dans la somme considérée, $F(p)$ entre autant de fois qu'il y a de couples de nombres premiers entre eux, non supérieurs à $\left[\frac{n}{p}\right]=q_p$. Par conséquent, si $I(x)$ est le *nombre des fractions irréductibles, dont les termes ne surpassent pas x*, on a

$$\sum F(u,\ v)=\sum_{p=1}^{p=n} F(p)\,I(q_p). \tag{1}$$

D'après des principes connus (*), si l'on pose

$$\Psi(x)=F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(x),$$

et d'autre part, si l'on représente par $i(x)$ le *nombre d*[illegible] *dont un terme au moins est égal à x*, de [illegible] que l'on ait

$$I(x)=i(1)+i(2)+i(3)+\cdots+i(x),$$

on peut écrire, au lieu de (1),

$$\sum F(u,\ v)=\sum_{p=1}^{p=n} i(p)\,\Psi(q_p). \tag{2}$$

2. Les formules (1) et (2) ne sont pas toujours faciles à utiliser d[illegible] l'étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres. Aussi,

allons-nous les transformer, de manière à pouvoir en tirer le plus grand profit possible. À cet effet, observons que la fonction $i(x)$ n'est que le double de $\varphi(x)$, sauf pour $x=1$; car $i(1)=2\varphi(1)-1$. Conséquemment

$$i(a)+i(b)+i(c)+\cdots=2n-1,$$

$a, b, c, \ldots$ étant tous les diviseurs de n. De cette identité on déduit (*) l'identité plus générale

$$\left.\begin{aligned} &F(a)i\left(\frac{n}{a}\right)+F(b)i\left(\frac{n}{b}\right)+F(c)i\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots \\ &=(2n-a)\frac{f(a)}{a}+(2n-b)\frac{f(b)}{b}+(2n-c)\frac{f(c)}{c}+\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$i(a)F\left(\frac{n}{a}\right)+i(b)F\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=(2a-1)f\left(\frac{n}{a}\right)+(2b-1)f\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots,$$

pourvu que

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=F(n).$$

Si, dans la première de ces identités, on change successivement n en $n-1$, $n-2,\ldots 3, 2, 1$, on obtient, par addition,

$$\sum_{p=1}^{p=n}F(p)I(q_p)=\sum_{p=1}^{p=n}q_p^2 f(p).$$

L'autre identité donne, par le même procédé,

$$\sum_{p=1}^{p=n}i(p)\Psi(q_p)=\sum_{p=1}^{p=n}(2p-1)\psi(q_p),$$

en posant

$$\psi(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(x).$$

On peut donc, aux identités (1) et (2), substituer les suivantes:

$$\sum F(u, v)=q_1^2 f(1)+q_2^2 f(2)+q_3^2 f(3)+\cdots+q_n^2 f(n), \tag{4}$$

$$\sum F(u, v)=\psi(q_1)+3\psi(q_2)+5\psi(q_3)+\cdots+(2n-1)\psi(q_n), \tag{5}$$

qu'il est facile d'obtenir directement, ainsi qu'on le verra dans une autre Note (**).

3. Chacun des membres de (3) est une certaine fonction $\xi(n)$, définie

par l'une ou l'autre des égalités

$$\xi(n) = 2\sum \varphi(a) F\left(\frac{n}{a}\right) - F(n) = 2\sum a f\left(\frac{n}{a}\right) - F(n).$$

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on peut écrire

$$\sum F(u,\ v) = \xi(1) + \xi(2) + \xi(3) + \cdots + \xi(n), \tag{6}$$

de sorte qu'une *double série* se trouve mise sous la forme d'une *série simple.* Ainsi, pour $f(x) = 1$, on a d'abord

$$F(x) = \theta(x), \qquad \xi(x) = 2\int x - \theta(x) \quad (***);$$

puis:

$$\sum \theta(u,\ v) = 2\left(\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n\right) - [\theta(1) + \theta(2) + \cdots + \theta(n)].$$

De cette façon, l'évaluation moyenne des doubles sommes que nous étudions se trouve ramenée à l'évaluation moyenne des sommes simples, dont nous nous sommes occupé dans le *Premier Mémoire.* Dans le dernier exemple, on sait que, si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, on a

$$\sum \theta(u,\ v) = \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Donc, en moyenne, $\theta(u, v) = \frac{\pi^2}{6}$, c'est-à-dire que: « *Deux nombres quelconques admettent, en moyenne,* $\frac{\pi^2}{6}$ *diviseurs communs* ».

De même, soit $f(x) = x$, et, par suite,

$$F(x) = \int x, \qquad \xi(x) = 2x\theta(x) - \int x;$$

la formule (6) donne

$$\sum \int (u,\ v) = 2[\theta(1) + 2\theta(2) + \cdots + n\theta(n)] - \left(\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n\right).$$

Asymptotiquement:

$$\sum \int (u,\ v) = n^2 \log n.$$

On satisfait à cette égalité en prenant, en moyenne, $\int (u,\ v) = \log\sqrt{uv}.$

4. On peut aller plus loin, dans la dernière évaluation. Dans le *Premier Mémoire* nous avons, en effet, énoncé, sans démonstration, la proposition suivante:

« *La moyenne somme des diviseurs communs à deux nombres quelconques est égale au demi-logarithme naturel du produit de ces nombres, augmenté de la constante* 0,83196.... »

Ici, les formules (4) et (5) sont insuffisantes. Il faut avoir recours à la transformation asymptotique connue (*)

$$\sum F(u,\ v)=\sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}} q_p^2 f(p)+\sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}}(2p-1)\psi(q_p)-n\psi(\sqrt{n}). \tag{7}$$

Pour $f(x)=x$, on a d'abord

$$F(x)=\int x, \qquad \psi(x)=\frac{x(x+1)}{2};$$

puis la formule (7) devient

$$\sum\int(u,\ v)=2\sum_1^{\sqrt{n}} p q_p^2-\frac{1}{2}\sum_1^{\sqrt{n}} q_p^2+\sum_1^{\sqrt{n}} p q_p-\frac{1}{2}\sum_1^{\sqrt{n}} q_p-\frac{n^2}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, on trouve

$$\sum_1^{\sqrt{n}} p q_p^2=n^2\sum_1^{\sqrt{n}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}n^2\log n+Cn^2,$$

$$\sum_1^{\sqrt{n}} q_p^2=n^2\sum_1^{\sqrt{n}}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}n^2.$$

Les deux autres sommes sont négligeables vis-à-vis de n^2. Conséquemment

$$\sum\int(u,\ v)=n^2\log n+\left(2C-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\right)n^2. \tag{8}$$

Tâchons de satisfaire à cette égalité en posant

$$\int(u,\ v)=K\log(uv)+K'. \tag{9}$$

Faisant varier séparément u et v, dans la dernière égalité, depuis 1 jusqu'à n, on trouve, par addition,

$$\sum\int(u,\ v)=2Kn\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots\ n)+K'n^2,$$

ou bien, asymptotiquement,

$$\sum\int(u,\ v) = 2Kn^2\log n + (K' - 2K)n^2.$$

Par comparaison avec (8), on obtient

$$K = \frac{1}{2}, \quad K' = 2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}.$$

L'égalité moyenne (9) devient donc

$$\int(u,\ v) = \frac{1}{2}\log(uv) + 2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2},$$

ou bien, approximativement,

$$\int(u,\ v) = \log\sqrt{uv} + 0{,}83196\ldots \tag{10}$$

5. On pourrait chercher directement la moyenne somme des diviseurs de $(u,\ v)$, multiples de α. À cet effet, après avoir fait $f(x) = x$, pour x multiple de α, et $f(x) = 0$, dans les autres cas, on trouverait d'abord

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{x}{\alpha}\right]\left\{\left[\frac{x}{\alpha}\right] + 1\right\},$$

et l'on emploierait, ensuite, la formule (7), ainsi qu'il a été fait dans le paragraphe précédent. Mais nous suivrons une voie indirecte, beaucoup plus aisée, et nous résoudrons, en même temps, une question plus générale. Soit

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x \text{ est un multiple de } \alpha \\ +x, \text{ si } x \text{ a la forme } \mathfrak{M}\alpha + r \\ \ \ 0, \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ici, et, en général, dans tous les cas où il s'agit de trouver une valeur moyenne *constante,* la formule (4) suffit. Elle donne

$$\sum\int_r(u,\ v) - \sum\int_\alpha(u,\ v) = rq_r^2 - \alpha q_\alpha^2 + (\alpha + r)q_{\alpha+r}^2 - 2\alpha q_{2\alpha}^2 + \cdots$$

Nous désignons par $\int_r x$ la somme des diviseurs de x, qui, divisés par α, donnent le reste r: nous supposons, en outre, que r soit toujours *positif,* de sorte que les multiples de α répondent au cas de $r = \alpha$. Asymptotiquement, la dernière formule devient

$$\sum_r \int(u,\ v) - \sum_\alpha \int(u,\ v) = n^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + r} - \frac{1}{2\alpha} + \cdots\right).$$

Donc, en moyenne,

$$\int_r (u,\ v) - \int_\alpha (u,\ v) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{r}{\alpha}\right), \tag{11}$$

pourvu que l'on représente par $H(x)$ la *fonction harmonique,* c'est-à-dire la fonction

$$\int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi}\, d\varphi = 1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + \cdots,$$

dont il a été question dans le *Premier Mémoire.* Le second membre de (11) peut aussi être mis sous la forme

$$-\frac{1}{\alpha} H\left(\frac{r-\alpha}{\alpha}\right).$$

On en déduit que: « *Si l'on considère les diviseurs communs à deux nombres quelconques, l'excès de la somme de ceux qui, divisés par α, donnent le reste r, sur la somme de ceux qui sont divisibles par α, est égal, en moyenne, à*

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}}{1-\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}}\ .\text{ »}$$

Par exemple, pour $\alpha = 2$, $r = 1$, on a:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-\varphi^{\frac{1}{2}}}{1-\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}} = \log 2.$$

Par conséquent: « *La somme des diviseurs impairs, communs à deux nombres quelconques, surpasse, en moyenne, de* 0,6931... *la somme des diviseurs pairs.* »

6. On a aussi, en vertu de propriétés connues (*),

$$\int_r - \int_{\alpha - r} = \frac{1}{\alpha}\left\{H\left(-\frac{r}{\alpha}\right) - H\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)\right\} = \frac{\pi}{\alpha}\cot\frac{\pi r}{\alpha}\,.$$

De là, une nouvelle proposition.

7. Reprenons la formule (11). En y faisant varier r, de 1 à α, on obtient, par addition,

$$\left(\int_1 + \int_2 + \cdots + \int_\alpha\right) - \alpha \int_\alpha = H(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\left\{H\left(\frac{1}{\alpha}\right) + H\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \cdots + H\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\right\},$$

c'est-à-dire (*):

$$\int(u,\ v) - \alpha \int_\alpha (u,\ v) = \log\alpha;$$

d'où, en tenant compte de (10),

$$\int_\alpha (u,\ v) = \frac{1}{\alpha}\log\sqrt{uv} + \frac{1}{\alpha}\left(2\,C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} - \log\alpha\right). \tag{12}$$

Telle est la *moyenne somme des multiples de α, diviseurs communs de deux nombres quelconques.* Ainsi, pour $\alpha = 2$, on trouve que: « *la somme moyenne des diviseurs pairs, communs à deux nombres, est égale au quart du logarithme naturel du produit des deux nombres, augmenté de la constante* 0,06940... » Il reste, pour la *moyenne somme des diviseurs impairs,* le quart du logarithme, augmenté de la constante 0,76254...

8. En tenant compte de (12), la formule (11) donne

$$\int_r (u,\ v) = \frac{1}{\alpha}\log\sqrt{uv} + \frac{1}{\alpha}\left(2\,C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} - \log\alpha - \int_0^1 \frac{1 - \varphi^{\frac{r}{\alpha}-1}}{1-\varphi}\,d\varphi\right).$$

Par exemple, pour $\alpha = 4$,

$$\int_r (u,\ v) = \frac{1}{4}\left[\log\sqrt{uv} + 2\,C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi r}{2} - \left\{(-1)^r + \cos\frac{\pi r}{2}\right\}\log 2\right].$$

Faisant successivement $r = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, on trouve les égalités moyennes suivantes:

$$\int_1 (u,\ v) = \frac{1}{4}\log\sqrt{uv} + 0{,}77397\ldots$$

$$\int_2 (u,\ v) = \quad \text{»} \quad + 0{,}20799\ldots$$

$$\int_3 (u,\ v) = \quad \text{»} \quad - 0{,}01142\ldots$$

$$\int (u,\ v) = \quad \text{»} \quad - 0{,}13858\ldots$$

9. Nous avons dit que la formule (4) suffit pour la recherche des valeurs moyennes constantes. Pour en donner encore un exemple, nous ferons $f(x)=\frac{1}{x^m}$, de manière que $F(x)$ représente la somme $\theta_{-m}(x)$ des inverses des $m^{\text{èmes}}$ puissances des diviseurs de x. La formule (4) donne

$$\sum \theta_{-m}(u,\ v)=n^2 s_{m+2},$$

s_m désignant toujours la somme de la série $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots$ Donc, en moyenne, $\theta_{-m}(u,\ v)=s_{m+2}$. Ainsi, pour $m=1$, on trouve que: « *la somme des inverses des diviseurs, communs à deux nombres, est moyennement égale à* 1,202056... » La dernière égalité moyenne peut prendre cette autre forme:

$$\frac{\theta_m(u,\ v)}{(u,\ v)^m}=s_{m+2},$$

$\theta_m(x)$ étant la somme des $m^{\text{èmes}}$ puissances des diviseurs de x; mais on ne pourrait en déduire l'expression moyenne de $\theta_m(u,\ v)$, même en connaissant celle de $(u,\ v)^m$.

10. Dans bien des cas, on peut employer, pour le calcul d'une expression moyenne, la formule (5), alors que la formule (4) est insuffisante. Nous allons prendre comme exemple la recherche de l'expression moyenne de $\theta_m(u,\ v)$. La formule (4) donne

$$\sum \theta_m(u,\ v)=\sum_1^n p^m q_p^2.$$

Or, on a:

$$n^2p^{m-2}-2np^{m-1}+p^m<p^m q_p^2<n^2p^{m-2};$$

puis, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^{m+1},

$$n^{m+1}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{2}{m}+\frac{1}{m+1}\right)<\sum \theta_m(u,\ v)<\frac{n^{m+1}}{m-1}\cdot$$

Il est donc impossible d'obtenir, par cette voie, l'expression cherchée. Employons, au contraire, la formule (5). Elle donne

$$\sum \theta_m(u,\ v)=\sum_1^n (2p-1)\sigma_m(q_p), \tag{13}$$

en posant

$$\sigma_m(x)=1^m+2^m+3^m+\cdots+x^m.$$

Remarquons d'abord, que l'on a

$$\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right)-\frac{n^m}{p^m}<\sigma_m(q_p)\overline{<}\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right).$$

Par conséquent, en vertu de (13),

$$\sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right) - n^m \sum_1^n \frac{2p-1}{p^m} < \sum \theta_m(u,\ v) < \sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right)\cdot$$

La différence entre les deux limites étant d'un ordre inférieur à celui de n^{m+1}, tant que $m > 1$, on peut la négliger. Donc, asymptotiquement,

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right)\cdot$$

Cela revient à prouver que, dans la formule (13), il est permis de remplacer q_p par $\frac{n}{p}\cdot$ En outre, à cause de

$$\sigma_m(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \frac{m\,x^{m-1}}{12} + \cdots,$$

on peut écrire, asymptotiquement,

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \frac{n^{m+1}}{m+1} \sum_1^\infty \frac{2p-1}{p^{m+1}} = \frac{n^{m+1}}{m+1}(2s_m - s_{m+1}). \tag{14}$$

Il est donc permis de poser l'égalité moyenne

$$\theta_m(u,\ v) = K(\sqrt{uv})^{m-1},$$

qui donne

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \frac{4K}{(m+1)^2}\, n^{m+1}.$$

De la comparaison avec (14) résulte la valeur de K; puis:

$$\theta_m(u,\ v) = \frac{m+1}{4}(2s_m - s_{m+1})(\sqrt{uv})^{m-1}.$$

Par exemple:

$$\theta_2(u,\ v) = \frac{\pi^2 - 3\cdot 1{,}202056\ldots}{4}\sqrt{uv}.$$

Ainsi: « *la somme des carrés des diviseurs, communs à deux nombres, est moyennement égale à la moyenne géométrique de ces nombres, multipliée par la constante* 1,56585... »

11. Les conséquences qu'il est possible de tirer des identités (4) et (5) sont tellement nombreuses, les moyens d'y parvenir sont si faciles à entrevoir, que nous ne croyons pas utile d'y insister davantage, d'autant plus que nous nous proposons de donner, dans une Note ultérieure, des développements d'une

plus grande généralité (**). Cependant, nous ajouterons encore quelques considérations sur la manière dont on pourrait traiter les questions analogues aux précédentes, mais relatives au *plus petit commun multiple* $[u, v]$ des nombres u et v. On sait que

$$(u, v)[u, v] = uv. \tag{15}$$

Cela étant, cherchons de combien de manières il est possible d'avoir $[u, v] = n$. Il faut d'abord que (u, v) soit égal à un diviseur de n: soit a ce diviseur. L'égalité (15) devient $an = uv$. On sait, en outre, que les quotients $\frac{u}{a}$, $\frac{v}{a}$, dont le produit est $\frac{n}{a}$, doivent être *premiers entre eux*. Le système des équations

$$[u, v] = n, \qquad (u, v) = a,$$

admet donc autant de solutions qu'il y a de manières de décomposer $\frac{n}{a}$ en un produit de deux facteurs, premiers entre eux. Fidèles à nos notations habituelles, nous désignerons par $\omega(x)$ le *nombre de manières de décomposer x en un produit de deux facteurs, premiers entre eux;* ou, ce qui revient au même, le *nombre des diviseurs de x, qui n'admettent pas de diviseurs carrés,* autres que l'unité. Cela posé, si l'on égale successivement (u, v) à tous les diviseurs $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$, de n, on trouve que le nombre des solutions de l'équation $[u, v] = n$ est

$$\omega(a) + \omega(b) + \omega(c) + \cdots = \theta(n^2).$$

Conséquemment: « *la quotité des couples de nombres, qui admettent n pour plus petit commun multiple, est égale au nombre des diviseurs de n^2* ». Par exemple, les seuls couples de nombres, qui admettent 10 pour plus petit multiple commun, sont

$$[1, 10], \quad [2, 5], \quad [2, 10], \quad [5, 2], \quad [5, 10],$$
$$[10, 1], \quad [10, 2], \quad [10, 5], \quad [10, 10].$$

Leur nombre est égal à 9, nombre des diviseurs de 100.

12. On peut démontrer autrement le même théorème. Soit $f(n)$ le nombre des solutions de l'équation $[u, v] = n$. Il est évident que la somme

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

exprime la quotité des couples de nombres, qui admettent n pour *multiple* *commun,* ou, ce qui revient au même, le nombre des manières dont on peut accoupler deux diviseurs quelconques de n, égaux ou inégaux. Or, ce nombre est évidemment $\theta^2(n)$. Par conséquent

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=\theta^2(n),$$

d'où, par comparaison avec une formule connue (*),

$$f(n)=\theta(n^2).$$

13. Si l'on veut développer la somme $\sum F[u, v]$, on voit qu'une première partie est $\sum_1^n \theta(p^2)F(p)$, mais l'autre partie, correspondant aux valeurs de $[u, v]$, supérieures à n, paraît assez difficile à évaluer. Pour le moment, nous devons nous borner à faire observer que, si la fonction $F(x)$ est constamment positive, on a

$$\sum_1^n \theta(p^2)F(p)<\sum F[u, v]<\sum_1^{n^2}\theta(p^2)F(p).$$

On peut donc écrire, asymptotiquement,

$$\sum F[u, v]=\theta(1)F(1)+\theta(4)F(2)+\theta(9)F(3)+\cdots,$$

toutes les fois que la série du second membre est convergente. Soit, par exemple, $F(x)=\frac{1}{x^m}\cdot$ On trouve

$$\sum\frac{1}{[u, v]^m}=\sum_1^\infty\frac{\theta(p^2)}{p^m}=\frac{s_m^3}{s_{2m}}\quad (*).$$

Or, si l'on pose

$$\frac{1}{[u, v]^m}=\frac{K}{(uv)^m},$$

on obtient

$$\sum\frac{1}{[u, v]^m}=Ks_m^2.$$

Il en résulte, d'abord, $K=\frac{s_m}{s_{2m}}$; puis, on voit que l'on peut écrire, moyennement,

$$\frac{1}{[u, v]^m}=\frac{s_m}{s_{2m}}\cdot\frac{1}{(uv)^m}.$$

En particulier:

$$\frac{1}{[u, v]^2}=\frac{15}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(uv)^2}.$$

Conséquemment: « *le carré de l'inverse du plus petit multiple, commun à deux nombres, est égal, en moyenne, au carré de l'inverse du produit des deux nombres, multiplié par la constante* 1,5198... »

14. En tenant compte d'autres formules connues, on trouve que, si r ne peut recevoir que les valeurs

$$1,\ 4,\ 6,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 24,\ 25,\ldots,$$

composées d'un nombre *pair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux, et si l'on ne donne à s que les valeurs

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ldots,$$

composées d'un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux, on a

$$\sum'' \frac{1}{[u,\, v]^m} - \sum' \frac{1}{[u,\, v]^m} = \sum \frac{\theta(r^2)}{r^m} - \sum \frac{\theta(s^2)}{s^m} = \frac{s_{2m}^2}{s_m^3},$$

les sommes $\sum''$, $\sum'$ se rapportant respectivement aux valeurs $[u,\, v]$, qui appartiennent à la première ou à la seconde des séries ci-dessus. La combinaison des formules

$$\sum'' + \sum' = \frac{s_m^3}{s_{2m}}, \qquad \sum'' - \sum' = \frac{s_{2m}^2}{s_m^3},$$

donne

$$\sum'' = \frac{s_m^6 + s_{2m}^3}{2\, s_{2m}\, s_m^3}, \qquad \sum' = \frac{s_m^6 - s_{2m}^3}{2\, s_{2m}\, s_m^3}.$$

Par exemple:

$$\sum'' \frac{1}{[u,\, v]^2} = \frac{133}{600}\pi^2, \qquad \sum' \frac{1}{[u,\, v]^2} = \frac{117}{600}\pi^2.$$

Ainsi: « *la somme des inverses des carrés des plus petits communs multiples de tous les couples de nombres possibles est* 4,11233.... *Les* $\frac{133}{250}$ *de cette somme, c'est-à-dire* 2,18776..., *se rapportent aux plus petits multiples, composés d'un nombre pair de facteurs premiers, égaux ou inégaux. Il reste* 1,92457... *pour les plus petits multiples, composés d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux.* »

15. Le développement de $\sum F[u,\, v]$ n'est pas absolument nécessaire pour le calcul des expressions moyennes, relatives au plus petit multiple commun de deux nombres quelconques. Bien souvent, les formules (4) et (5), ou des formules analogues, suffisent, pourvu que l'on ait égard à la relation (15). Ainsi,

par exemple, par un procédé analogue à celui qui nous a servi pour établir la relation (4), nous trouvons

$$\sum uvF(u,\ v) = \frac{1}{4}\sum_1^n p^2 q_p^2 (q_p + 1)^2 f(p). \tag{16}$$

En particulier, pour $f(x) = \frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$ (***), on a $F(x) = \frac{1}{x}$ (*), et la dernière formule devient

$$\sum \frac{uv}{(u,\ v)} = \frac{1}{4}\sum_1^n q_p^2 (q_p + 1)^2 \pi(p)\varphi(p),$$

ou bien, en vertu de (15), et asymptotiquement,

$$\sum [u,\ v] = \frac{n^4}{4}\sum_1^\infty \frac{\pi(p)\varphi(p)}{p^4}.$$

Or, on sait (*) que

$$\sum_1^\infty \frac{\pi(p)\varphi(p)}{p^m} = \frac{s_{m-1}}{s_{m-2}}.$$

Donc

$$\sum [u,\ v] = \frac{3 s_3}{2\pi^2} n^4.$$

D'autre part, si l'on pose $[u,\ v] = Kuv$, on trouve

$$\sum [u,\ v] = K\cdot(1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{K}{4} n^4.$$

On doit donc prendre $K = \frac{6 s_3}{\pi^2}$, et l'on peut dire que: « *Le plus petit multiple, commun à deux nombres, est égal, en moyenne, au produit de ces nombres, multiplié par la constante* 0,73076... »

16. En général, on a

$$\sum u^m v^m F(u,\ v) = \sum_1^n p^{2m} \sigma_m^2(q_p) f(p). \tag{17}$$

Supposons que la fonction f soit telle que l'on ait toujours

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = \frac{1}{n^m}. \tag{18}$$

Alors $F(x) = \frac{1}{x^m}$, et la formule (17) devient

$$\sum [u,\ v]^m = \sum_1^n p^{2m} \sigma_m^2(q_p) f(p). \tag{19}$$

Or, on sait que

$$\sigma_m^2(x) = \frac{x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{x^{2m+1}}{m+1} + \frac{2m+3}{12(m+1)} x^{2m} + \cdots$$

On peut donc, au lieu de (19), écrire la formule asymptotique

$$\sum [u, v]^m = \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2} \sum_1^\infty \frac{f(p)}{p^2},$$

parceque les ordres de $\sum\limits_1^n \frac{f(p)}{p}$, $\sum\limits_1^n f(p)$, etc.... sont respectivement inférieurs à ceux de n, n^2, etc....

Cela est évidemment vrai pour $m = 0$, comme pour $m = 1$, et, à plus forte raison, pour toute valeur positive de m. D'après les principes exposés dans le *Premier Mémoire,* l'identité (18) donne lieu à la formule

$$s_r \sum_1^\infty \frac{f(p)}{p^r} = s_{m+r}.$$

Par conséquent

$$\sum [u, v]^m = \frac{6\, s_{m+2}}{\pi^2} \cdot \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2}.$$

Or, si l'on pose

$$[u, v]^m = K(uv)^m,$$

on trouve

$$\sum [u, v]^m = K\sigma_m^2(n) = K \cdot \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2}.$$

Donc, moyennement,

$$[u, v]^m = \frac{6\, s_{m+2}}{\pi^2} (uv)^m.$$

Par exemple:

$$[u, v]^2 = \frac{\pi^2}{15} (uv)^2,$$

c'est-à-dire que: « *le carré du plus petit commun multiple de deux nombres est moyennement égal au carré du produit des deux nombres, multiplié par la constante* 0,65797... »

17. Il y a plusieurs autres manières de développer $\sum F[u, v]$, parmi lesquelles nous signalerons la suivante: — Il est clair que les quotients, par n, des nombres

$$[1, n], \quad [2, n], \quad [3, n], \ldots \quad [n, n],$$

sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres premiers avec les diviseurs de n, et respectivement inférieurs ou égaux à ces diviseurs. Il en résulte que, si l'on pose

$$g_n(x) = F(n\alpha) + F(n\beta) + F(n\gamma) + \cdots,$$

où α, β, γ,... sont les nombres non supérieurs et premiers à x, on a

$$\sum_{p=1}^{p=n} F[p, n] = g_n(a) + g_n(b) + g_n(c) + \cdots$$

En particulier, si la fonction F est telle que l'on ait

$$F(xy) = F(x)F(y),$$

et si l'on pose

$$G(x) = F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \cdots,$$

on a:

$$\sum_{p=1}^{p=n} F[p, n] = F(n)\{G(a) + G(b) + G(c) + \cdots\}.$$

Par conséquent, si l'on représente par $\Psi(x)$ la somme $\sum_1^x F(p)$, on peut écrire

$$\sum F[u, v] = 2\sum_{p=1}^{p=n} G(p)F(p)\Psi(q_p) - \Psi(n).$$

18. En particulier, pour $F(x) = x^m$, on a $\Psi(x) = \sigma_m(x)$, $G(x) = \varphi_m(x)$, et la dernière formule devient

$$\sum [u, v]^m = 2\sum_1^n p^m \varphi_m(p)\sigma_m(q_p) - \sigma_m(n). \tag{20}$$

Mais celle-ci ne se prête pas, aussi facilement que la formule (19), aux transformations asymptotiques. Par exemple, pour $m = 1$, on trouve

$$\sum [u, v] = \frac{1}{2}\sum_1^n p^2 q_p(q_p + 1)\varphi(p).$$

Asymptotiquement:

$$\sum [u, v] = \frac{n^2}{2}\sum_1^n \varphi(p) + \varepsilon\frac{n}{2}\sum_1^n p\varphi(p),$$

ε étant moindre que l'unité, en valeur absolue. Ici, le second terme n'est pas négligeable, car nous avons démontré ailleurs (*) les égalités asymptotiques

$$\sum_1^n \varphi(p) = 3\frac{n^2}{\pi^2}, \qquad \sum_1^n p\varphi(p) = \frac{n^3}{\pi^2}.$$

Conséquemment:

$$\sum[u, v] = \frac{3+\varepsilon}{2\pi^2} n^4.$$

C'est tout ce que l'on peut affirmer. Comme vérification, comparons ce résultat à celui qui a été trouvé dans le paragraphe précédent. Nous trouvons

$$\varepsilon = 3(1 - s_3) = 0,60616\ldots$$

Enfin, il est intéressant de comparer les égalités (19) et (20). On retrouve, à l'aide de quelques trasformations simples, les propriétés des *fonctions* ζ, étudiées dans le *Premier Mémoire.*

(*) Voyez *Premier Mémoire d'Arithmétique.*

(**) *Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.*

(***) Dans cette Note et dans les suivantes, $\theta(x)$ désignera constamment le *nombre des diviseurs de x*, et $\pi(x)$ le *produit des facteurs de x*, chacun d'eux étant pris négativement.