Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen.

Von

A. Wiman in Lund.

§ 1.

Die ebenen projectiven Gruppen von endlichem Grade.

Die Gruppe, welche wir hier betrachten wollen, ist *mit den geraden Vertauschungen von 6 Dingen* holoedrisch isomorph. Da es mir aber scheint, dass die Existenz einer solchen ebenen Gruppe bisher nicht bekannt geworden ist, glaube ich die folgenden allgemeinen Erörterungen voranschicken zu dürfen.

Die Aufgabe, alle möglichen endlichen Gruppen linearer Substitutionen im *binären* Gebiete zu bestimmen, wurde bekanntlich zuerst von Herrn Klein durch geometrische Betrachtungen, dann von Herrn Gordan rein algebraisch erledigt. Sodann hat Herr C. Jordan die entsprechende Aufgabe im *ternären* Gebiete behandelt*). Die Schwierigkeit der Aufgabe bei mehr als zwei homogenen Veränderlichen erwies sich schon daraus, dass Herr Jordan in seiner ersteren Arbeit eine Gruppe von 168 Collineationen der Ebene übersehen hatte, welche inzwischen von Herrn Klein durch Betrachtung der Transformationen 7. Ordnung der elliptischen Functionen abgeleitet wurde.

Indessen vermisst man bei Herrn Jordan auch diejenige Gruppe, welche den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bilden soll. Dieselbe ist erst späterhin von Herrn Valentiner aufgestellt worden**). In der citirten Arbeit wird gezeigt, dass die fragliche Gruppe aus 45 symmetrischen Collineationen, 80 von der Periode 3, 90 von der Periode 4 und 144 von der Periode 5 besteht. Man findet nun leicht,

*) *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique*, Journal für Mathematik Bd. 84 (1878), sowie: *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire*, Atti della Reale Accademia di Napoli (1880).

**) *De endelige Transformations-Gruppers Theori*, avec un résumé en français (1889) in den Abhandlungen der Dänischen Akademie 6. Reihe V.

dass innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen die gleiche Zahl Operationen von den bezüglichen Periodenzahlen auftreten. Doch hat Herr Valentiner nicht den Schluss gezogen, dass letztere Gruppe mit der von ihm gefundenen ebenen Gruppe holoedrisch isomorph sei. Er begnügt sich statt dessen mit der Bemerkung, dass seine Gruppe die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthalte. Diese Ausdrucksweise ist nicht glücklich gewählt, weil dieselbe zu der irrthümlichen Ansicht Anlass geben kann, es handle sich hier um eine *ausgezeichnete* Ikosaedergruppe. Das wirkliche Verhältniss ist aber, wie wir weiterhin finden werden, dieses, dass die zu besprechende Gruppe *zwei Systeme von je sechs gleichberechtigten* Ikosaedergruppen enthält.

Da eine Zusammenstellung *aller möglichen endlichen Collineationsgruppen der Ebene* wohl niemals gegeben worden ist*), möge eine solche hier ihren Platz finden. Diese glauben wir durch die gleichzeitige Benutzung der Resultate der Herren Jordan und Valentiner erhalten zu können. Dass keine Gruppe der Aufmerksamkeit dieser beiden Verfasser entgangen ist, scheint nämlich um so weniger zweifelhaft, als ihre Arbeiten völlig unabhängig von einander entstanden sind. Herr Valentiner kennt nämlich die Arbeiten von C. Jordan offenbar nicht, was daraus ersichtlich ist, dass er nirgends Herrn C. Jordan citirt, und überdies einen anderenfalls leicht zu vermeidenden Fehler begeht; auf Grund einer irrigen Voraussetzung verneint er nämlich die Existenz der von geometrischer Seite her schon lange bekannten Hesse'schen Gruppe vom Grade 216**).

Bezeichnen wir nun solche Gruppen als *trivial*, bei denen entweder *eine Gerade stets in sich übergeht*, oder auch *drei Punkte sich geschlossen permutiren*, so bleiben nur noch *sechs Fälle* zu erwähnen übrig. Von diesen braucht man aber *in letzter Instanz nur drei von den Gradzahlen* 216, 168, 360 zu berücksichtigen, weil die drei übrigen bereits in ihnen als Untergruppen enthalten sind; zudem ist von den Letzteren, deren Gradzahlen $= 72, 36, 60$ sind, die G_{60} keine andere als die *ternäre* Ikosaedergruppe. Die drei Hauptfälle seien hier nun angeführt.

1) *Die Hesse'sche Gruppe von* 216 *Collineationen.*

Diese Gruppe gehört zu einem Büschel:

$$\lambda_1 F + \lambda_2 H = 0,$$

wo F eine cubische ternäre Form, H ihre Hesse'sche Covariante be-

---

*) Herr Franz Meyer giebt zwar eine solche in seinem *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I). Dort ist aber offenbar die wahre Bedeutung der von Herrn Valentiner gefundenen G_{360} nicht erkannt.

**) S. 151, 222 der citirten Arbeit.

zeichnet. F und H erfahren nämlich bei der G_{216} die linearen Substitutionen einer *Tetraedergruppe*, durch welche je 12 Curven des Büschels mit derselben absoluten Invariante in einander übergeführt werden. Von den fundamentalen Formen der Tetraedergruppe sind bekanntlich zwei von der Ordnung 4 und eine von der Ordnung 6; letzterer entspricht das System der 6 *harmonischen* Curven des Büschels, den ersteren die Systeme der 4 *äquianharmonischen* Curven und der 4 *Wendepunktsdreiecke. Die Hesse'sche Gruppe besitzt eine ausgezeichnete* G_{72}, *welche der innerhalb der Tetraedergruppe ausgezeichneten Vierergruppe zugeordnet ist.* Den symmetrischen Operationen innerhalb der Vierergruppe entsprechen *drei* G_{36}, von denen jede 2 harmonische C_3 in sich überführt; der Identität aber eine innerhalb der G_{216} *ausgezeichnete* G_{18}, bei welcher jede Curve des Büschels in sich übergeht. *Die Untergruppen* G_{72} *und* G_{36} *sind oben als nicht trivial angeführt*).*

2) *Eine Gruppe von* 168 *Collineationen.* Als ein einfaches invariantes geometrisches Gebilde tritt hier eine C_4 auf:

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0^{**}).$$

3) Die hier zu untersuchende *Gruppe von* 360 *Collineationen.* Als Eigenschaften derselben seien im voraus die folgenden mitgetheilt. Die G_{360} ist, gleichwie die G_{168}, *einfach*, und man erkennt leicht manche Analogien zwischen diesen beiden Gruppen; namentlich lassen sich ihre *vollständigen Formensysteme* in völlig übereinstimmender Weise ableiten. Die einfachste zur G_{360} gehörige Form kann man auf die folgende Gestalt bringen:

$$F_6 = 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45x^2y^2z^2 - 135xyz^4 + 27z^6.$$

Das Formensystem besteht nun aus F_6, *ihrer Hesse'schen Determinante* H, *der durch die Derivirten* H_1, H_2, H_3 *geränderten Hesse'schen Determinante* Φ *und der Functionaldeterminante* Ψ *von* F, H *und* Φ, *welche letztere, gleich Null gesetzt,* 45 *Symmetrieaxen darstellt.*

Innerhalb der G_{360} *treten zwei Systeme von je* 15 *gleichberechtigten Oktaedergruppen und zwei Systeme von je* 6 *gleichberechtigten Ikosaedergruppen auf. Durch die geraden Vertauschungen der zu den einzelnen Ikosaedergruppen eines solchen Systems gehörenden Gebilde entsteht die* G_{360}. Von anderen Untergruppen innerhalb der G_{360} erwähnen wir 10 G_{36}, *welche alle gleichberechtigt sind.* Diese G_{36} sind Collineationsgruppen von harmonischen C_3 und sind folglich schon als Untergruppen der Hesse'schen Gruppe bekannt.

---

*) Eine eingehende Behandlung der Hesse'schen Gruppe findet man in einer Abhandlung von Herrn Maschke, *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen*, Math. Ann., Bd. 33.

**) Diese Gruppe ist wiederholt und erschöpfend in Klein-Fricke's „*Modulfunctionen*" besprochen.

§ 2.

Die Oktaedergruppen innerhalb der G_{360}. Aufstellung der Substitutionen.

Die Frage, ob es in der Ebene eine umfassendere projective endliche Gruppe giebt, welche die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthält, wollen wir späterhin direct erledigen; zu dem Ende brauchen wir ja nur zu untersuchen, ob irgend welche bei der Ikosaedergruppe invariante geometrische Gebilde noch weitere Collineationen in sich gestatten. Hier sei nur vorab das Resultat mitgetheilt, dass man auf diese Weise in der That eine Gruppe von 360 Collineationen erhält, bei welcher der bei der ursprünglichen Ikosaedergruppe invariante Kegelschnitt in 5 andere übergeführt wird, und dass diese 6 Kegelschnitte bei der G_{360} alle möglichen geraden Vertauschungen erfahren. Wenn A und B die bei der Ikosaedergruppe invarianten Formen 2. bez. 6. Grades darstellen, so hat man in $A^3 + kB$ eine bei der ganzen G_{360} invariante Form, wobei k eine gewisse Constante bedeutet.

Nun lässt sich leicht beweisen, dass innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen 2 Systeme von je 15 gleichberechtigten Oktaedergruppen auftreten. Wir erhalten eine Oktaedergruppe des einen Systems, wenn wir 4 beliebige Dinge, etwa (1234), allen möglichen Vertauschungen unterwerfen, doch so dass bei den ungeraden Vertauschungen dieser 4 Dinge auch 5 und 6 permutirt werden. Eine analoge Bildungsweise hat man aber auch für die Oktaedergruppen des anderen Systems, weil bei der G_{360} auch 6 andere Kegelschnitte alle mögliche gerade Vertauschungen erfahren, so dass die beiden Systeme von Oktaedergruppen auf 2 Systeme von je 6 Kegelschnitten oder Ikosaedergruppen bezogen sind.

Eine Oktaedergruppe besitzt bekanntlich eine ausgezeichnete Vierergruppe. Zu den 3 Operationen von der Periode 2 innerhalb dieser Vierergruppe gehören 3 Perspectivitätsaxen, welche ein bei der Oktaedergruppe ausgezeichnetes Dreieck bilden. Durch die Combination der Vierergruppe mit den Vertauschungen der Seiten dieses Dreiecks entsteht die ternäre Oktaedergruppe. Wählen wir das genannte Dreieck zum Coordinatendreieck, so können wir bewirken, dass jede bei der Oktaedergruppe invariante Form in völliger Symmetrie in Bezug auf x, y und z auftritt; zudem ist xyz die einzige bezügliche Form von ungerader Ordnung. Eine invariante Form von der Ordnung 6 kann man also in der folgenden Weise schreiben:

$$(1)\quad F_6 = x^6 + y^6 + z^6 + a(x^4y^2 + x^2y^4 + x^4z^2 + x^2z^4 + y^4z^2 + y^2z^4) + bx^2y^2z^2.$$

Man soll nun a und b so bestimmen, dass die Form F_6 nicht nur bei der Oktaedergruppe sondern auch bei einer G_{360} der fraglichen Art in sich übergeht. Zu dem Ende bemerken wir, dass bei der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen 45 Operationen von der Periode 2 auftreten, z. B. diejenige, bei welcher (1,2) und (3,4) vertauscht werden, 5 und 6 je in sich übergehen. Die Curve $F_6 = 0$ soll also 45 Symmetrieaxen besitzen. Weil aber die Curve durch 2 Systeme von je 15 Oktaedergruppen in sich übergeführt wird, muss jede Symmetrieaxe dem ausgezeichneten Coordinatendreieck von 2 Oktaedergruppen angehören; anderenfalls wären ja 90 Symmetrieaxen erforderlich.

Nun gehen durch die Coordinatendreiecke $x = y = 0$ zwei andere Symmetrieaxen: $x + y = 0$ und $x - y = 0$. Damit die obige Bedingung befriedigt werde, muss die Curve $F_6 = 0$ auch durch eine andere Oktaedergruppe in sich übergehen, bei welcher das zur ausgezeichneten Vierergruppe gehörige Dreieck aus den Geraden $z = 0$ und $x \pm y = 0$ besteht. Es soll somit möglich sein die Form F_6, auch wenn dieses Dreieck zum Grunde gelegt wird, in der Gestalt (1) zu schreiben. Wir wollen das erreichen durch die Coordinatentransformation:

$$x' = \varrho(x+y), \quad y' = \varrho(x-y), \quad z' = \varrho\sigma z\,^{*}). \tag{2}$$

Auf diese Weise geht, wenn der Factor ϱ^6 weggelassen und $\sigma^2 = \delta$ gesetzt wird, die Form F_6 in die folgende über:

$$\begin{aligned} F_6' = {} & 2(a+1)(x^6+y^6) + \delta^3 z^6 + (30-2a)(x^4y^2+x^2y^4) \\ & + (2a+b)\delta(x^4z^2+y^4z^2) + 2a\delta^2(x^2z^4+y^2z^4) \\ & + (12a-2b)\delta x^2y^2z^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Mithin können a, b und δ durch das Gleichungssystem:

$$\begin{gathered} 2(a+1) = \delta^3; \\ 30 - 2a = (2a+b)\delta = 2a\delta^2 \end{gathered} \tag{4}$$

bestimmt werden. Sehr leicht ergiebt sich nun

$$\delta^5 + \delta^3 - 2\delta^2 - 32 = (\delta-2)(\delta^2-\delta+4)(\delta^2+3\delta+4) = 0. \tag{5}$$

Wir haben also drei Fälle zu berücksichtigen.

1) $\delta = 2$. Man erhält $F_6 = (x^2+y^2+z^2)^3$. Dieser Fall interessirt uns hier nicht.

2) $\delta^2 + 3\delta + 4 = 0$. Das System der Lösungen ist hier:

$$\begin{aligned} \delta &= -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{i\sqrt{7}}{2}; \\ a &= \tfrac{5}{4}(1 \pm i\sqrt{7}); \\ b &= -5(3 \pm i\sqrt{7}). \end{aligned}$$

*) Hier bezeichnen x', y', z' die alten, x, y, z die neuen Coordinaten.

Die Curve $F_6 = 0$ *ist aber für diese Werthe von* a *und* b *keine andere als die Hesse'sche Curve einer* C_4 *mit* 168 *Collineationen in sich.* Die im vorigen Paragraphen erwähnte G_{168} besitzt ja 2 Systeme von je 7 gleichberechtigten Vierergruppen (und Oktaedergruppen), und jede G_2 innerhalb der G_{168} betheiligt sich an je einer Vierergruppe jedweden Systems*). Die Gleichung der speciellen C_4, welche durch die G_{168} in sich übergeht, kann man auf die Gestalt:

$$x^4 + y^4 + z^4 + a(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 0$$

bringen, wenn die Coordinatenaxen ein zu einer Vierergruppe gehöriges Perspectivitätsdreieck bilden. Nun findet man in analoger Weise, wie oben die Constanten in F_6 bestimmt wurden,

$$a = -\tfrac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{7}).$$

Von diesen a-Werthen gilt der eine oder der andere, je nachdem die C_4 auf eine Vierergruppe des einen oder anderen Systems bezogen wird. Es ist nun leicht zu bestätigen, dass die obenerwähnte C_6 die Hesse'sche Covariante dieser C_4 bildet.

3) $\delta^2 - \delta + 4 = 0$. Man erhält hier:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \delta &= \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{15}); \\ a &= -\tfrac{3}{4}(5 \pm i\sqrt{15}); \\ b &= 3(5 \mp i\sqrt{15}). \end{aligned}$$

Werden a *und* b *nach* (6) *bestimmt, so besitzt die Curve* $F_6 = 0$ *eine Gruppe von* 360 *Collineationen in sich.*

Die beiden in (6) erhaltenen Werthsysteme bezeichnen wir mit δ_1, a_1, b_1 und δ_2, a_2, b_2. Man findet leicht:

$$(7) \qquad \frac{15 - a_1}{a_1 + 1} = a_2; \qquad \frac{(6a_1 - b_1)\delta_1}{a_1 + 1} = b_2.$$

Aus den Gleichungen (3), (4) und (7) erschliesst man, dass das eine Werthsystem gilt, falls die Curve auf die ursprüngliche Oktaedergruppe bezogen ist, das andere aber nach der Transformation auf das zur neuen Oktaedergruppe gehörige Coordinatendreieck. *Die beiden Oktaedergruppen sind folglich nicht gleichberechtigt innerhalb der Collineationsgruppe, welche die Curve* $F_6 = 0$ *in sich überführt.* Den Oktaedergruppen ist eine diedrische G_8 gemein, bei welcher $z = 0$ in sich übergeht, und folglich auch die cyklische Untergruppe G_4. Die Gleichung der C_6 muss *ohne doppelte Zeichen* gegeben werden können, falls man die Fixpunkte bei dieser G_4 als Coordinatenecken wählt, da

*) Man sehe Klein-Fricke, *Modulfunctionen* I, S. 710.

ja alle G_4 innerhalb der Oktaedergruppen mit einander gleichberechtigt sind. Die neuen Coordinatenaxen sind folglich $z=0$ und $x \pm yi = 0$. Setzen wir nach (6)

$$a = -\tfrac{3}{4}(5 \pm i\sqrt{15}),$$

so erhalten wir die bezweckte Transformation etwa durch die Substitutionen:

$$\xi = (x+yi)\sqrt{\frac{a}{30}}\,\sqrt[4]{\pm i};$$

$$\eta = (x-yi)\sqrt{\frac{a}{30}}\,\sqrt[4]{\mp i};$$

$$\zeta = z,$$

wobei die Wurzeln in der Weise gewählt sind, dass $\sqrt[4]{\pm i}\,\sqrt[4]{\mp i} = 1$. Als resultirende Normalgleichung der C_6 erhalten wir:

$$\begin{aligned}(8)\qquad \zeta^6 + 30\zeta^4\xi\eta - 150\zeta^2\xi^2\eta^2 + 100\xi^3\eta^3 \\ + 15\sqrt{15}(\zeta^2+2\xi\eta)(\xi^4-\eta^4) = 0.\end{aligned}$$

Dass diese C_6 360 Collineationen in sich besitzt, folgt schon daraus, dass 15 Oktaedergruppen jeder Art existiren; eine Oktaederconfiguration kann ja durch 24 Collineationen in eine beliebige andere gleichberechtigte übergeführt werden. Es erübrigt also noch jene geschlossenen Systeme von je 15 Oktaedergruppen aufzusuchen. Nun kommt man immer nach (2) von je einer Oktaedergruppe des einen Systems zu dreien des anderen Systems, welche je eine Operation der ausgezeichneten Vierergruppe mit derselben gemein haben. Geht man folglich von einer bestimmten Oktaedergruppe des Systems S_1 aus, so kommt man zunächst zu drei Gruppen des Systems S_2; von diesen gelangt man zu 6 neuen Gruppen des Systems S_1 und von hier zu 12 neuen Gruppen des Systems S_2; geht man so fort, so könnte es scheinen, als ob man von den 12 letzterwähnten Gruppen noch zu 24 Gruppen des Systems S_1 gelangen würde. Es erweist sich aber, dass diese 24 Gruppen *zu je dreien zusammenfallen.* Daraus folgt unmittelbar, dass die Systeme S_1 und S_2 geschlossen sind und aus je 15 Oktaedergruppen bestehen.

Wir haben bereits erwähnt, dass innerhalb der G_{360} auch 2 Systeme von je 6 Ikosaedergruppen existiren. Diese Systeme sind den beiden Oktaedersystemen in der folgenden Weise zugeordnet:

Je 2 Ikosaedergruppen desselben Systems haben mit einander eine Tetraedergruppe gemein. Auf diese Weise erhält man 15 Tetraedergruppen, welche Untergruppen eines entsprechenden Systems von Oktaedergruppen sind.

Bezeichnen wir desshalb die Ikosaedergruppen des Systems S_1 mit $1_1, \ldots, 6_1$, so ergeben sich für das entsprechende System Oktaedergruppen die Bezeichnungen $(1, 2)_1, \ldots, (5, 6)_1$. Ein Analoges gilt natürlich für das System S_2.

Von der Ausgangsgruppe mit den Axen x, y, z kommen wir nach (2) zu einer Gruppe mit den Axen $\frac{x \pm y}{\sigma_1}$, z, und von dieser zu zwei neuen mit der ersten gleichberechtigten Gruppen mit den Axen:

$$\frac{z \pm \frac{x+y}{\sigma_1}}{\sigma_2}, \quad \frac{x-y}{\sigma_1}; \qquad \frac{z \pm \frac{x-y}{\sigma_1}}{\sigma_2}, \quad \frac{x+y}{\sigma_1}$$

und so fort. Nun hat man $\sigma_1^2 = \delta_1$, und wir nehmen in (6)

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{15}),$$

so dass man

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{5} - i\sqrt{3}}{4}$$

und in gleicher Weise

$$\frac{1}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}{4}$$

setzen kann.

Gleichwie man die Oktaedergruppe durch die Substitutionen erhält, welche aus der Combination der Zeichenwechsel und Vertauschungen von x, y und z hervorgehen, so erhält man die ganze G_{360}, wenn man x, y und z in analoger Weise durch die Axen der mit der Ausgangsgruppe gleichberechtigten Oktaedergruppen ersetzt.

Es ist aber nicht möglich eine mit der Collineationsgruppe G_{360} holoedrisch isomorphe Gruppe von 360 ternären homogenen Substitutionen herzustellen. Dies folgt schon daraus, dass nach Herrn C. Jordan die entsprechende Möglichkeit schon für die Untergruppe G_{36}, welche die Collineationsgruppe der harmonischen C_3 bildet, nicht besteht. Auch findet man, dass es bei der obigen Aufsuchung der Axen der Oktaedergruppen nicht möglich ist, das System so zu schliessen, dass man für die Axen einer Oktaedergruppe blos eine Ausdrucksweise (abgesehen von den Zeichenwechseln) erhält; es kommt nämlich die Multiplication mit den dritten Einheitswurzeln hinzu.

Die G_{360} ist aber mit einer homogenen G_{1080} meriedrisch isomorph; der Identität innerhalb der G_{360} entspricht eine ausgezeichnete G_3, welche durch die Operation

$$x' = jx, \quad y' = jy, \quad z' = jz \qquad (j = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

erzeugt wird.

Jetzt wollen wir die Mittel liefern, um die verschiedenen Oktaedergruppen und mithin die ganze G_{360} herzustellen. Zu dem Zwecke brauchen wir nur diejenigen Ausdrücke anzugeben, welche gleich Null gesetzt, die Axendreiecke der bezüglichen Gruppen definiren. Es ist natürlich nicht nöthig, die bei der homogenen Substitutionsgruppe auftretende Multiplication dieser Ausdrücke mit j, bez. j^2 besonders hinzuzuschreiben.

$$(1,2)_1:\quad x,\ y,\ z,$$

$$(1,2)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x\pm y),\ z,$$

$$(3,4)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z\pm x),\ y,$$

$$(5,6)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y\pm z),\ x,$$

$$(3,4)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z\pm\frac{1}{2}(x+y),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x-y),$$

$$(5,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z\pm\frac{1}{2}(x-y),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x+y),$$

$$(3,5)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y\pm\frac{1}{2}(z+x),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z-x),$$

$$(4,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y\pm\frac{1}{2}(z-x),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z+x),$$

$$(3,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x\pm\frac{1}{2}(y+z),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y-z),$$

$$(4,5)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x\pm\frac{1}{2}(y-z),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y+z),$$

$$(3,5)_2:\quad \frac{z}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x+y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x-y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z-\frac{1}{2}(x+y),$$

$$(4,6)_2:\quad \frac{z}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x+y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x-y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1}{2}(x+y),$$

$$(3,6)_2:\quad \frac{z}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x-y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x+y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z-\frac{1}{2}(x-y),$$

$$(4,5)_2:\quad \frac{z}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x-y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x+y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1}{2}(x-y),$$

$$(1,5)_2:\quad \frac{y}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z+x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z-x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{2}(z+x),$$

$$(2,6)_2:\quad \frac{y}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z+x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z-x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{2}(z+x),$$

$$(2,5)_2:\quad \frac{y}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z-x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z+x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{2}(z-x),$$

$$(1,6)_2:\quad \frac{y}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z-x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z+x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{2}(z-x).$$

$$(1,3)_2:\quad \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y+z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y-z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}(y+z),$$

$$(2,4)_2:\quad \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y+z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y-z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}(y+z),$$

$$(1,4)_2:\quad \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y-z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y+z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}(y-z),$$

$$(2,3)_2:\quad \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y-z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y+z).$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}(y-z),$$

$$(1,5)_1:\quad -\frac{1+\sqrt{5}}{4}j^2z-j\frac{x}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}y,\ -\frac{1-\sqrt{5}}{4}jz-\frac{1+\sqrt{5}}{4}x+\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}j^2x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}jy,$$

$$(2,6)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{1-\sqrt5}{4}x-\frac{jy}{2},\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{j^2x}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}jx+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y.$$

$$(2,5)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{1-\sqrt5}{4}x+\frac{jy}{2},\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{j^2x}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}jx-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y.$$

$$(1,6)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2x+\frac{jx}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}y,\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{1+\sqrt5}{4}x-\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x+\frac{1+\sqrt5}{4}jy,$$

$$(1,3)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{jx}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}y,\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{1+\sqrt5}{4}x-\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x+\frac{1+\sqrt5}{4}jy,$$

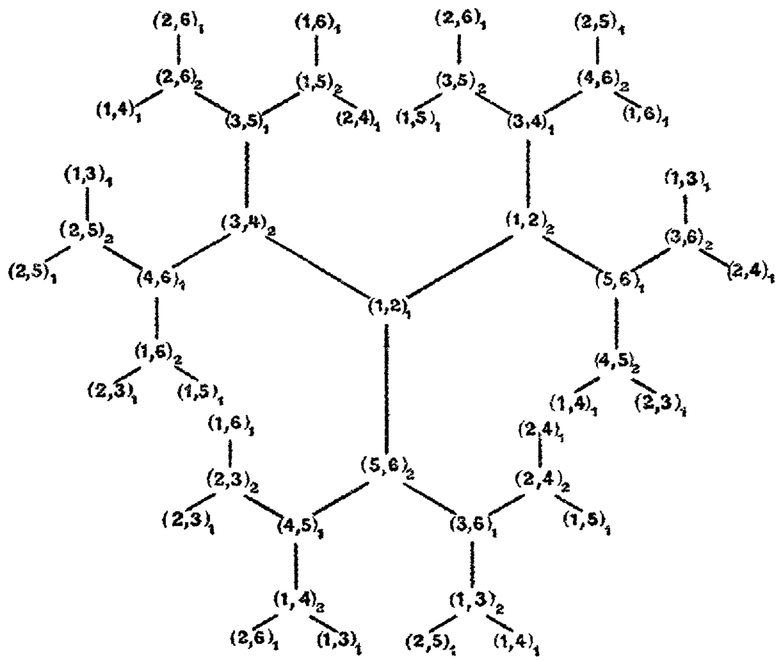
$$(2,4)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{1-\sqrt5}{4}x+\frac{jy}{2},\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{j^2x}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}jx-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y,$$

$$(2,3)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{1-\sqrt5}{4}x-\frac{jy}{2},\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{j^2x}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}jx+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y,$$

$$(1,4)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{jx}{2}+\frac{1-\sqrt5}{4}y,\ -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{1+\sqrt5}{4}x+\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x-\frac{1+\sqrt5}{4}jy.$$

Hier ist jede Oktaedergruppe nach den beiden Ikosaedergruppen bezeichnet, denen ihre ausgezeichnete Tetraedergruppe angehört. Dabei stand es natürlich von vornherein völlig frei, unter den Ikosaedergruppen jedes Systems die Reihenfolge 1, 2, ... 6 in beliebiger Weise zu vertheilen. Ausserdem haben wir noch verschiedene einfache Hülfsmittel angewandt, um die den einzelnen Oktaedergruppen zugehörigen Bezeichnungen (i, k), wo $i < k \leq 6$, zu ermitteln.

Es wäre nun nicht schwer sowohl die Ikosaedergruppen als auch andere Untergruppen innerhalb der G_{360} aufzustellen. Wir verweilen aber hierbei nicht weiter. Hier wollen wir nur noch durch das folgende Schema den Zusammenhang der verschiedenen Oktaedergruppen mit einander veranschaulichen. Je 2 Gruppen, welche durch einen Strich verbunden sind, haben eine diedrische G_8 gemein.



§ 3.

Die in der G_{360} enthaltenen Untergruppen G_{36}.

Innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen befinden sich 10 Untergruppen von der Ordnung 18. Als Beispiel einer solchen nehmen wir diejenige, bei welcher (1, 2, 3) und (4, 5, 6) als zwei geschlossene Systeme von 3 Dingen permutirt werden. Diese G_{18} hat dieselbe Structur wie die Collineationsgruppe der allgemeinen C_3. Betrachten wir nun die umfassendere Untergruppe, bei welcher jene Systeme (1, 2, 3) und (4, 5, 6) auch mit einander vertauscht werden, so erhält man $10\,G_{36}$, welche sich mit der Collineationsgruppe der harmonischen C_3 holoedrisch isomorph erweisen. Bei letzterer Gruppe werden nämlich die vier Wendepunktsdreiecke zu je zweien mit einander vertauscht, und in den Ecken zweier solcher Dreiecke erhält man 6 Dinge, welche Vertauschungen der erwähnten Art erleiden.

Wir wollen jetzt die C_6 mit 360 Collineationen in sich als *Covariante der harmonischen* C_3 darstellen. Die Gleichung der C_3 sei

$$(1) \qquad F_3 = 3z^2y + 3xy^2 + x^3 = 0.$$

wir bilden so die Gleichung der Hesse'schen Curve*)

$$(2)\qquad H_3 = \begin{vmatrix} x, & y, & 0 \\ y, & x, & z \\ 0, & z, & y \end{vmatrix} = -z^2x + x^2y - y^3 = 0.$$

Die Invariante 6. Grades T verschwindet, und für die Invariante 4. Grades hat man

$$(3)\qquad S = 1.$$

Ferner giebt es eine unabhängige Covariante 6. Ordnung, welche nicht durch F_3 und H_3 zusammengesetzt werden kann. Als solche wählen wir die durch die Differentialquotienten von H_3 geränderte Hesse'sche Determinante. Wir schreiben also

$$(4)\qquad \Theta_6 = \begin{vmatrix} x, & y, & 0, & 2xy - z^2 \\ y, & x, & z, & x^2 - 3y^2 \\ 0, & z, & y, & -2zx \\ 2xy - z^2, & x^2 - 3y^2, & -2zx, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -z^6 + 9z^4xy + z^2(8x^4 - 30x^2y^2 - 6y^4) + xy(x^4 - 6x^2y^2 + 21y^4).$$

Unter den Covarianten 6. Ordnung in den Veränderlichen hat man nun einen Büschel

$$(5)\qquad \Theta_6 + \lambda S F_3 H_3$$

vom 8. Grade in den Coefficienten. Man soll den Parameter λ so bestimmen, dass man für die Form mit 360 Collineationen in sich

$$F_6 = \Theta_6 + \lambda S F_3 H_3$$

erhält. Zu dem Ende bemerken wir gleich, dass die Eckpunkte des Coordinatendreiecks Fixpunkte bei einer cyklischen G_4 innerhalb der G_{36} sind. Bei der Gleichung (8) des vorigen Paragraphen bleiben auch die Eckpunkte fest bei einer cyklischen G_4. Man hat somit das linke Glied dieser Gleichung mit der oben geschriebenen Form (5) zu identificiren. Nun hat man

$$\begin{aligned} -(\Theta_6 + \lambda S F_3 H_3) = {} & z^6 + (3\lambda - 9)z^4xy + 30z^2x^2y^2 + (6 - 2\lambda)x^3y^3 \\ & + z^2[x^4(\lambda - 8) + y^4(3\lambda + 6)] \\ & - xy[x^4(1 + \lambda) + y^4(21 - 3\lambda)]. \end{aligned}$$

Diese Form soll vermittelst einer Substitution

$$\zeta = z, \quad \xi = \alpha x, \quad \eta = \beta y$$

in die Form

$$\zeta^6 + 30\zeta^4\xi\eta - 150\zeta^2\xi^2\eta^2 + 100\xi^3\eta^3 + 15\sqrt{15}\,(\zeta^2 + 2\xi\eta)(\xi^4 - \eta^4)$$

*) Was die Normirung der folgenden Ausdrücke anbetrifft, vergleiche man Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, 2. Aufl., S. 243.

übergehen. Man erhält daher unmittelbar die Bedingung

$$(\lambda-8)(21-3\lambda)-(3\lambda+6)(1+\lambda)=0,$$

woraus

$$\lambda=3\pm 2i\sqrt{5}. \tag{6}$$

Für α und β ergiebt sich dann

$$15\sqrt{15}\alpha^4=-5\pm 2i\sqrt{5},\quad 5\sqrt{15}\beta^4=-5\mp 2i\sqrt{5}$$

unter der hinzutretenden Bedingung, dass

$$\alpha\beta=\pm\frac{i}{\sqrt{5}}\cdot$$

Damit sind aber auch alle erforderlichen Bedingungen erfüllt.

Die Gleichung

$$\Theta_6+(3\pm 2i\sqrt{5})\,S F_3 H_3=0 \tag{7}$$

definirt demnach zwei covariante Gebilde der harmonischen C_3 *mit* 360 *Collineationen in sich.* Dieselben sind nach der Terminologie des Hrn. Klein symmetrisch, ob zwar aus der C_3 zunächst unter imaginärer Form hergeleitet.

Dass wir in (6) zwei λ-Werthe gefunden haben, könnte uns leicht zur Ansicht veranlassen, es existiren innerhalb der G_{360} 2 Systeme gleichberechtigter G_{36}. Dem ist aber nicht so, wie durch die folgende Ueberlegung auseinandergesetzt wird. F_3 und H_3 sind Hesse'sche Covarianten zu einander. Nun kann man natürlich, statt von F_3, auch von H_3 ausgehen. Dann kommen wir zunächst zur Hesse'schen Covariante F_3 und darauf zu einer Covariante 6. Ordnung Θ_6', welche eine andere als Θ_6 ist. Man muss ersichtlich auch von diesem Ausgangspunkte die 2 λ-Werthe (6) erhalten. Man findet aber, dass *die* λ*-Werthe, welche derselben Curve* (7) *zugetheilt sind, verschieden sind, jenachdem man von* F_3 *oder* H_3 *ausgeht.*

Von diesem Resultate sei noch die folgende Anwendung gegeben. Die harmonische C_3 hat in Bezug auf zwei Wendepunktsdreiecke, welche bei ihrer G_{36} vertauscht werden, dieselbe Gleichung wie ihre Hesse'sche Curve in Bezug auf die zwei anderen Wendepunktsdreiecke. Daraus folgt aber nach dem obigen Satz, dass, wenn die C_6 mit 360 Collineationen in sich auf ein solches Dreieck bezogen wird, ihre Gleichung für die zwei ersteren und die zwei letzteren verschieden ausfällt. Nun giebt es innerhalb der G_{36} für jedes der vier Dreiecke eine G_3, bei welcher ihre Eckpunkte fest bleiben. Was soeben entwickelt wurde, bedeutet offenbar für diese G_3, dass dieselben auch in der umfassenderen Gruppe G_{360} nicht alle gleichberechtigt sind. Hiermit haben wir bestätigt, dass *es innerhalb der* G_{360} 2 *Systeme* G_3 *giebt, welche nicht mit einander gleichberechtigt sind.*

§ 4.

Die in der G_{360} auftretenden Ikosaedergruppen oder zehnfach Brianchon'schen Sechsecke.

Bei der ternären Ikosaedergruppe bleibt bekanntlich ein Kegelschnitt invariant*). Da es keine höhere endliche *lineare* Gruppe giebt, welche die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthält, so muss jener Kegelschnitt, falls die Ikosaedergruppe als Untergruppe einer ebenen Collineationsgruppe G_{360} auftritt, mit fünf anderen vertauschbar sein. Diese 5 C_2 schneiden den ersterwähnten Kegelschnitt in 20 Punkten, welche eine bei der Ikosaedergruppe invariante Schaar bilden sollen. Von solcher Art giebt es aber nur eine einzige Schaar, welche (in übertragenem Sinne) die Ecken des Pentagon-Dodekaeders darstellt. Den 5 Kegelschnitten muss ersichtlich auch ein System von 5 (und nur 5) gleichberechtigten Untergruppen innerhalb der Ikosaedergruppe zugeordnet sein. Die einzigen diesbezüglichen Systeme sind aber bekanntlich 5 Tetraedergruppen oder die in diesen enthaltenen 5 ausgezeichneten Vierergruppen. Jene Tetraedergruppen sind nun der Art, dass die Ecken der zugehörigen Würfel paarweise in den 20 Ecken des Pentagon-Dodekaeders zusammenfallen**). Die 8 zu einer Tetraedergruppe gegehörigen Würfelecken zerlegen sich nun in die Ecken zweier Tetraeder, und man findet die 20 Ecken des Pentagon-Dodekaeders auf 2 Weisen in die Ecken von 5 Tetraedern zerlegt. Die Schnittpunkte der 5 oben besprochenen C_2 mit dem Fundamentalkegelschnitte kann man also auch auf 2 Weisen wählen. Da wir die Existenz der G_{360} schon früher kennen, können wir jetzt die Folgerung ziehen, dass *jede ebene Ikosaedergruppe als Untergruppe in 2 Collineationsgruppen G_{360} enthalten ist.* Nun ist bekanntlich die Ikosaedergruppe mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph. Als diese 5 Dinge können wir ersichtlich die 5 erwähnten Kegelschnitte betrachten. Da aber diese 5 Kegelschnitte in der G_{360} mit dem Fundamentalkegelschnitte vertauschbar sind, erhalten wir bei dieser Gruppe 6 gleichberechtigte C_2, und bei der G_{360} erleiden offenbar diese Kegelschnitte alle möglichen geraden Vertauschungen. *Die G_{360} ist also mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen holoedrisch isomorph.*

Wir bezeichnen weiterhin jene C_2 als *ein System von 6 gleichberechtigten Ikosaederkegelschnitten.* Die gegenseitigen Verhältnisse dieser C_2 zu einander sind in vieler Hinsicht sehr merkwürdig. Je

*) Bezüglich der ternären Ikosaedergruppe verweisen wir auf Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder* II: 4 und Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* II: 1, S. 578.

**) Man sehe Klein a. a. O., S. 19.

zwei von ihnen schneiden einander in 4 Punkten, welche auf beiden die Verschwindungspunkte einer Tetraederform, mithin mit äquianharmonischem Doppelverhältnisse, liefern. Dies besagt in der Sprache der Invariantentheorie, dass *die simultanen Invarianten für jedes Paar der 6 Ikosaederkegelschnitte verschwinden*)*. Diese Eigenschaft reicht in der That hin, um das ganze System projectivisch zu definiren.

Betrachten wir zwei Ikosaederkegelschnitte, etwa 1 und 2, so haben wir erwähnt, dass jeder in sich bei einer Tetraedergruppe übergeht, welche den beiden Ikosaedergruppen 1 und 2 gemein ist. Vertauschen wir noch 1 und 2, so kommen wir zu einer jene Tetraedergruppe enthaltenden *Oktaedergruppe*, welche wir aus sofort verständlichem Grunde schon im 2. Paragraphen mit (1, 2) bezeichnet haben. Beziehen wir nun die Oktaedergruppe auf ein ausgezeichnetes Coordinatendreieck, so erhalten wir dieselbe durch die Combination der Zeichenwechsel und Vertauschungen der Coordinaten; bei der Tetraederuntergruppe tritt die Beschränkung hinzu, dass die Coordinatenaxen nur cyklisch vertauscht werden. Wir erhalten folglich bei der Oktaedergruppe einen invarianten Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

bei der Tetraedergruppe aber existiren noch deren zwei:

$$x^2 + jy^2 + j^2z^2 = 0, \quad x^2 + j^2y^2 + jz^2 = 0,$$

welche bei der Oktaedergruppe vertauscht werden. Nur diese 3 Kegelschnitte können bei der Tetraedergruppe in sich übergehen. Diese Gruppe enthält ja 4 G_3, bei deren jeder 3 Punkte der Ebene fest bleiben. Ein Kegelschnitt muss aber bei jeder Collineation in sich 2 feste Punkte besitzen. Jene 12 Fixpunkte bei den G_3 zerlegen sich in 3 bei der Tetraedergruppe sich geschlossen permutirende Systeme von je 4. Die 3 invarianten Kegelschnitte gehen durch je 2 von diesen Systemen. Man kann so von der Tetraedergruppe zu 3 Oktaedergruppen hinaufsteigen, bei denen je ein System von 4 Punkten geschlossen bleibt, die beiden anderen aber sich vertauschen lassen. In dem oben erwähnten Falle enthält der Ikosaederkegelschnitt 1 acht von jenen Fixpunkten, welche wir als Dodekaederecken bezeichneten; der Ikosaederkegelschnitt 2 geht durch 4 von diesen und noch 4 andere, die Pole der Verbindungsgeraden zu derselben G_3 gehöriger Dodekaederecken in Bezug auf 1. Durch letztere Punkte und die 4 anderen Dodekaederecken geht der Oktaederkegelschnitt (1, 2). Man ersieht hieraus, dass, wenn die Ikosaedergruppe 1 gegeben ist, man auf völlig bestimmte Weise die Ikosaederkegelschnitte 2, . . ., 6 und die Oktaederkegelschnitte (1, 2), . . ., (1, 6) herleitet, dass aber diese Systeme nicht

*) Man sehe Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 5. Aufl. S. 668.

wesentlich verschieden sind. *Vielmehr liefern bei der anderen* G_{360}, *welche die Ikosaedergruppe* 1 *enthält*, (1, 2), . . ., (1, 6) *Ikosaederkegelschnitte und* 2, . . ., 6 *Oktaederkegelschnitte.*

Haben wir somit gefunden, dass jeder Ikosaederkegelschnitt zu 5 Oktaederkegelschnitten des zugehörigen Systems die Beziehung hat, dass die simultanen Invarianten verschwinden, so tritt hierzu der nicht minder merkwürdige Satz, dass *der Ikosaederkegelschnitt von den* 10 *anderen Oktaederkegelschnitten doppelt berührt wird.* In der That wird jener Kegelschnitt von diesen in 40 Punkten geschnitten, und es giebt auf jenem kein anderes bei der Ikosaedergruppe invariantes System von 40 Punkten als die Dodekaederecken, doppelt gezählt. Die besprochene Thatsache erläutern wir am besten durch das folgende Beispiel. Die Ikosaedergruppe 1 und die Oktaedergruppe (2, 3) haben mit einander eine cyklische G_3 gemein, bei welcher die Kegelschnitte 1, 2, 3 fest bleiben, und die Kegelschnitte 4, 5, 6 cyklisch vertauscht werden. Bei dieser G_3 bleiben also die Kegelschnitte 1, 2, 3, (1, 2), (1, 3), (2, 3) invariant. Jeder von diesen muss durch 2 von den 3 Fixpunkten bei der G_3 gehen, wobei die Tangenten den 3. Fixpunkt enthalten. Je 2 von den 6 Kegelschnitten sollen also einander doppelt berühren. Die einzige mögliche Zuordnung in dieser Hinsicht ist: 1, (2, 3); 2, (1, 3) und 3, (1, 2), was auch daraus ersichtlich wird, dass z. B. die Gruppen 1 und (2, 3) noch 3 Operationen von der Periode 2 gemein haben, bei welchen die Kegelschnitte 2 und 3 und auch die beiden gemeinsamen Fixpunkte bei der G_3 permutirt werden.

In den bisherigen Erörterungen spielen die 60 Schnittpunkte der Ikosaederkegelschnitte 1, . . ., 6 eine ausgezeichnete Rolle. Dieselben erhalten wir als Fixpunkte derjenigen cyklischen G_3, bei denen 3 Kegelschnitte fest bleiben, und die 3 anderen sich cyklisch vertauschen. Nun giebt es in der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen auch ein anderes System von 20 G_3; bei diesen permutiren sich die die 6 Dinge cyklisch zu je drei, und keine bleiben fest. Letzteres G_3-System steht aber in genau derselben Beziehung zu dem anderen System von Ikosaedergruppen und Oktaedergruppen, welches in der G_{360} enthalten ist.

Zwei Ikosaederkegelschnitte, welche verschiedenen Systemen angehören, berühren einander doppelt. Die einzigen Systeme von 6 gleichberechtigten Untergruppen innerhalb einer Ikosaedergruppe hat man nämlich in 6 G_5 oder in 6 diedrischen G_{10}; diese müssen also in der G_{360} den 6 Ikosaedergruppen des anderen Systems zugeordnet sein. Das einzige System von 4 invarianten Punkten bei einer solchen G_5 oder G_{10} erhält man in den doppelt gezählten Fixpunkten bei der G_5, welche wir (nach räumlichem Analogon) Ikosaederecken nennen. Daraus ergiebt sich unmittelbar der obige Satz, welchen wir dahin präcisiren können, dass *ein Ikosaederkegelschnitt von den 6 Ikosaederkegelschnitten des anderen Systems in je 2 zu derselben* G_5 *gehörigen Ikosaederecken berührt wird.*

Ein leichtes Mittel, um die vorhergehenden Resultate zu bestätigen und neue abzuleiten, gewährt uns der 2. Paragraph. Wir haben nämlich dort die Ausdrücke X, Y, Z, welche, gleich Null gesetzt, die Axendreiecke der verschiedenen Oktaedergruppen definiren, zusammengestellt. Die zugehörigen Oktaederkegelschnitte werden nun durch die Gleichungen

$$X^2+Y^2+Z^2=0$$

bestimmt, und die Ikosaederkegelschnitte durch

$$X^2+jY^2+j^2Z^2=0, \qquad X^2+j^2Y^2+jZ^2=0,$$

wobei aber jeder Ikosaederkegelschnitt 6 Mal erhalten wird. Da wir also die Gleichungen der Kegelschnitte kennen, können wir folglich leicht ihre Beziehungen zu einander analytisch studiren.

Bei der ternären Ikosaedergruppe sind die invarianten Gebilde niedrigster Ordnung der Fundamentalkegelschnitt

(1) $$A=xy+z^2=0$$

und die Bring'sche Curve*)

(2) $$B=x^3y^3-z(x^5+y^5)-2z^2x^2y^2+8z^4xy=0,$$

wobei die Ecken des Coordinatendreiecks Fixpunkte bei einer cyklischen G_5 liefern. Statt (2) wählen wir das aus 6 Geraden (Verbindunglinien je zweier Ikosaederecken) bestehende Gebilde

(3) $$A^3-B=B_1=z(x^5+y^5+5zx^2y^2-5z^3xy+z^5)=0.$$

Wir fragen nun nach einem Gebilde

(4) $$A^3+\lambda B_1=0,$$

welches 360 Collineationen in sich gestattet. Zu dem Ende bemerken wir, dass es in der That 2 Gebilde dieser Art geben muss, weil, wie oben hervorgehoben wurde, man von der Ikosaedergruppe zu 2 Gruppen G_{360} aufsteigen kann. Weil aber in der G_{360} alle G_5 mit einander gleichberechtigt sind, müssen jene 2 Gebilde mit Beibehaltung des Coordinatendreiecks in einander übergeführt werden können. Wir sollen also λ_1 und λ_2 so bestimmen, dass die Form

$$x^3y^3+\lambda_1z(x^5+y^5)+(3+5\lambda_1)z^2x^2y^2+(3-5\lambda_1)z^4xy+(1+\lambda_1)z^6$$

durch eine Substitution

$$x'=\alpha x, \quad y'=\beta y, \quad z'=\gamma z$$

in die Form

$$x'^3y'^3+\lambda_2z'(x'^5+y'^5)+(3+5\lambda_2)z'^2x'^2y'^2+(3-5\lambda_2)z'^4x'y' \\ +(1+\lambda_2)z'^6$$

*) Vgl. Klein a. a. O., S. 217.

übergeführt wird. Setzen wir

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \delta,$$

so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (3+5\lambda_2)\delta &= 3+5\lambda_1, \\ (3-5\lambda_2)\delta^2 &= 3-5\lambda_1, \\ (1+\lambda_2)\delta^3 &= 1+\lambda_1. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems geben wir hier:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta &= \frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{8}, \\ \lambda_2 &= \frac{-9 \mp 3i\sqrt{15}}{20}, \\ \lambda_1 &= \frac{-9 \pm 3i\sqrt{15}}{20}. \end{aligned}$$

Alle übrigen Bedingungen finden wir erfüllt, wenn

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

weil eben

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \delta.$$

Haben wir nun in (4) $\lambda = \lambda_1$ oder λ_2, so können wir diese Gleichung durch die Substitution

$$(7)\qquad z' = \frac{10\lambda_1 z}{9} \quad \text{bez.} \quad \frac{10\lambda_2 z}{9}$$

auf eine Gestalt mit lauter reellen Coefficienten bringen. Wir ersetzen zunächst z' durch z und erhalten hiernach *die folgende Normalgleichung der C_6 mit 360 Collineationen in sich*

$$(8)\qquad 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45z^2x^2y^2 - 135z^4xy + 27z^6 = 0.$$

Betrachten wir nun die Gleichung (8), so ist es zunächst unbestimmt, durch welche der Substitutionen (7) man dieselbe erhalten habe. Gehen wir zu den inversen Substitutionen zurück, so erhält man 2 Fundamentalkegelschnitte (1)

$$100\lambda^2 xy + 81z^2 = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2)$$

oder nach Einführung der durch (6) gegebenen λ-Werthe

$$(9)\qquad 6z^2 - (1 \pm i\sqrt{15})\,xy = 0.$$

Hier haben wir 2 Ikosaederkegelschnitte, welche innerhalb der G_{360} nicht gleichberechtigt sind. Die zugehörigen Ikosaedergruppen können wir (nach den zu Anfang dieses Paragraphen citirten Abhandlungen) direct aufschreiben, und sodann durch Combination derselben die ganze G_{360}.

Wir wünschen nun die obige Gleichung (8) auf die Form (8) des 2. Paragraphen zu reduciren. Zu dem Ende bemerken wir, dass die Gerade $x-y=0$ eine Symmetrieaxe und der Punkt $x+y=z=0$ das zugehörige Centrum für die Curve (8) liefern. Wir benutzen deshalb zuerst die Substitutionen:

$$2x'=x+y,\quad 2y'=x-y,\quad z'=z,$$

und erhalten darnach die Gleichung

$$(10)\quad \begin{aligned}&(2x'^2+6x'z'-3z'^2)(5x'^4-6x'^3z+3x'^2z'^2-18x'z'^3-9z'^4)\\&+y'^2(-30x'^4+180x'^3z'+90x'^2z'^2+135z'^4)\\&+y'^4(30x'^2+90x'z'-45z'^2)-10y'^6=0.\end{aligned}$$

Wir haben nun als neue Coordinatenecken auf $y'=0$ die Punkte $2x'^2+6x'z'-3z'^2=0$ zu wählen. Sodann bringt man die Gleichung der Curve auf die gewünschte Form (abgesehen von einem numerischen Factor) durch die Substitutionen:

$$(11)\quad \xi=\alpha[2x'+z'(3-\sqrt{15})],\quad \eta=\beta[2x'+z'(3+\sqrt{15})],\quad \zeta=y',$$

wobei die Bedingungen:

$$(12)\qquad \alpha^4=\frac{4+\sqrt{15}}{1600},\quad \beta^4=\frac{4-\sqrt{15}}{1600},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{40},$$

gelten. Damit ist dann die Identität der auf völlig unabhängige Weisen abgeleiteten Gleichungen der C_6 mit 360 Collineationen in sich bestätigt.

§ 5.

Weitere Eigenschaften der zur G_{360} gehörigen Configuration.

Wir wollen hier die verschiedenen ausgezeichneten Punkt- oder Geraden-Systeme betrachten, welche bei der G_{360} auftreten. Im Allgemeinen permutiren sich 360 Punkte oder Gerade in der Ebene als ein geschlossenes System; solche Punkte aber, welche bei n Collineationen der G_{360} fest bleiben, geben zu einem System von $\frac{360}{n}$ n-fach gezählten Punkten Anlass, und ein Gleiches gilt natürlich für die Geraden. Um dergleichen Systeme zu ermitteln, suchen wir die Beschaffenheit der Fixpunkte bei den cyklischen Gruppen.

In der G_{360} treten 36 cyklische G_5 auf; es gehören nämlich deren 6 zu jeder Ikosaedergruppe, und zwei solche G_{60} desselben Systems haben keine G_5 gemein. Man erhält dieselben durch die cyklischen Vertauschungen von 5 unter den 6 Fundamentalkegelschnitten. Bei diesen 36 G_5 hat man insgesammt 108 Fixpunkte, welche zwei sich geschlossen permutirende Systeme von 72 bez. 36 Punkten bilden. Von den 3 Fixpunkten bei einer G_5 sind nämlich 2 gleichberechtigt und permutiren sich bei den symmetrischen Collineationen einer diedrischen G_{10}. *Jene 72 Punkte bilden die Ikosaederecken der Fundamentalkegelschnitte. Dieselben sind auch nach Gl.* (8) *des vorigen Paragraphen Wendepunkte der Fundamentalen* C_6, *wobei stets je eine Tangente in* 2 *Wendepunkten berührt. Die* C_6 *besitzt folglich* 36 *doppelte stationäre Tangenten.* Man beweist auch leicht nach den Plücker'schen Formeln, dass eine C_6 ohne Punktsingularitäten genau 72 Wendepunkte besitzt.

Im geschlossenen System von 36 Punkten bleibt jeder bei einer diedrischen G_{10} fest. Jeder Ikosaedergruppe sind 6 von diesen Punkten zugeordnet, welche ein zehnfach Brianchon'sches Sechseck bilden. *Den beiden Systemen von je* 6 *Ikosaedergruppen entspricht die merkwürdige Eigenschaft, dass jene* 36 *Punkte auf zwei Weisen in sechs zehnfach Brianchon'sche Sechsecke zerlegt werden können. Dabei ist ein Punkt für je zwei zu verschiedenen Systemen gehörende Sechsecke gemein.* In ähnlicher Weise bilden die bei den G_5 festen Geraden 2 Systeme von 72 bez. 36 Geraden, welche sich gegenüber den 360 Collineationen geschlossen permutiren. Das System von 36 Linien besteht aus den oben erwähnten doppelten stationären Tangenten der C_6; dasselbe kann auf 2 Weisen in 6 zehnfach Pascal'sche Sechsseite zerlegt werden.

Die G_{360} enthält ferner 2 Systeme von je 20 cyklischen G_3. Jede G_3 ist innerhalb der G_{360} mit einer G_{18} vertauschbar, welche die Collineationsgruppe einer allgemeinen ebenen C_3 liefert. Man folgert leicht, dass die 60 festen Punkte oder Geraden, welche bei den einzelnen G_3 jedes Systems auftreten, alle mit einander gleichberechtigt sind. Wir haben hier sonach 2 *Systeme von je* 60 *bei der* G_{360} *sich geschlossen permutirenden Punkten oder Geraden.* Jeder von diesen Punkten (bez. Geraden) bleibt bei einer diedrischen G_6 fest. Man beweist leicht, dass die fraglichen Fixpunkte nicht auf der fundamentalen C_6 liegen. Von denselben befinden sich nämlich 20 (die Dodekaederecken) auf jedem Ikosaederkegelschnitte, und die C_6 kann aus diesem Kegelschnitte nur 12 Punkte (die Ikosaederecken) ausschneiden.

Endlich haben wir 45 Collineationen von der Periode 2. Die zugehörigen Perspectivitätscentren und Axen sind im 2. Paragraphen gegeben. Jede G_2 ist Untergruppe einer cyklischen G_4, bei welcher ausser dem Perspectivitätscentrum noch 2 Punkte auf der Perspectivitätsaxe fest bleiben. Wir haben ebenfalls im § 2 gefunden, dass letztere Punkte auf der fundamentalen C_6 liegen. Die 270 Punkte der C_6, welche auf den 45 Perspectivitätsaxen liegen, zerlegen sich also in zwei bei der G_{360} sich geschlossen permutirende Systeme. Das eine System besteht aus 180 *Punkten*, das andere aus 90 *Punkten*, welche letztere die Fixpunkte bei den cyklischen G_4 darstellen.

Nach Cayley liegen auf einer allgemeinen ebenen Curve n^{ter} Ordnung $n(12n - 27)$ Punkte, in denen ein Kegelschnitt mit der C_n 6 consecutive Schnittpunkte haben kann*). Solcher Punkte, welche man auch *sextactische Punkte* nennt, giebt es also auf der C_6 270. Da die C_6 sich zu jeder Perspectivitätsaxe symmetrisch verhält, ist es leicht zu zeigen, dass die 270 auf diesen Axen liegenden Punkte sextactisch sind.

Durch die Operationen der nun aufgezählten cyklischen Gruppen zusammen mit der Identität ergiebt sich die Gesammtzahl der 360 Collineationen. Wir haben in der That für die Perioden 2, 3, 4, 5 die bezügliche Zahl der Collineationen: 45, 80, 90, 144.

Wir haben auch das Resultat gewonnen, dass *es auf der fundamentalen C_6 3 besonders ausgezeichnete Systeme von Punkten giebt, welche sich bei der G_{360} geschlossen permutiren. Dieselben bestehen aus den 72 Wendepunkten und aus 2 Systemen sextactischer Punkte, für deren Zahl wir soeben 90 und 180 gefunden haben.* Alle anderen der G_{360} gegenüber geschlossenen Punktsysteme der C_6 bestehen aus 360 getrennten Punkten.

An *Diedergruppen* giebt es innerhalb der G_{360} 36 G_{10}, zwei Systeme von je 60 G_6 und 45 G_8. Dazu kommen noch als Untergruppen dieser G_8 zwei Systeme von je 15 Vierergruppen. Um diese Zahlen aufzufinden, brauchen wir nur die cyklischen ausgezeichneten Untergruppen der fraglichen Diedergruppen zu betrachten. Von den 3 festen Punkten (oder Geraden) bei jenen cyklischen Gruppen müssen 2 bei der Diedergruppe vertauscht werden, der dritte aber muss fest bleiben. Wir haben die diedrischen G_{10} auf die 36 doppelten Wendetangenten der fundamentalen C_6 bezogen, und gleicherweise die diedrischen G_6 auf die 120 festen Geraden bei den G_3 und die diedrischen G_8 auf die 45 Perspectivitätsaxen. Die Collineationen innerhalb der fraglichen Diedergruppen, welche nicht jenen cyklischen Untergruppen angehören, sind von der Periode 2, und es ist sofort geometrisch einleuchtend, dass ihre Perspectivitätscentren auf der bei der bezüglichen Diedergruppe festen Geraden liegen müssen.

Man erhält nun den Satz, dass *die 45 Perspectivitätscentren so geordnet sind, dass jede Gerade, welche zwei Centren zusammenbindet, wenigstens ein drittes enthält.* Den Diedergruppen entsprechend haben wir ja 36 Gerade durch 5 Centren, 120 durch 3 und 45 durch 4 Centren. Diese müssen

$$10 \cdot 36 + 3 \cdot 120 + 6 \cdot 45 = \frac{44 \cdot 45}{2}$$

Verbindungsgerade je zweier Centren liefern. Das ist aber auch die Gesammtzahl solcher Geraden. Der dualistisch entsprechende Satz gilt natürlich für die Perspectivitätsaxen. Man erweist auch, dass durch jedes Perspectivitätscentrum 4 Gerade gehen, welche 4 andere

*) Philosophical Transactions 155 (1854), S. 545.

Centra enthalten, und gleicherweise 8 bez. 4 Gerade, welche durch 2 bez. 3 andere Centra gehen, oder dass jede G_2 als Untergruppe in 4 diedrischen G_{10} und 8 diedrischen G_6 und (nicht ausgezeichnet) in 4 Diedergruppen G_8 enthalten ist.

§ 6.

Die fundamentale C_6. Das System der Covarianten. Schlussbemerkungen.

Wir haben bereits verschiedentlich eine Curve der 6. Ordnung gefunden, welche bei der Gesammtheit der 360 Collineationen in sich übergeht. Da diese C_6 keine Doppelpunkte besitzt, ist ihr Geschlecht $p = 10$. Damit ist freilich noch nicht bewiesen, dass bei der G_{360} keine Curve von niedrigerem Geschlechte in sich übergeführt wird. Indessen lässt sich das fragliche Resultat vermittelst von Hrn. Hurwitz gegebener Beweismethoden leicht herleiten*). Wir können also den Satz aussprechen, dass *die Gruppe der* 360 *geraden Vertauschungen von* 6 *Dingen zum Geschlechte* $p = 10$ *gehört.*

Die Gleichung unserer C_6 haben wir im 4. Paragraphen durch

$$(1)\quad F_6 = 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45z^2x^2y^2 - 135z^4xy + 27z^6 = 0$$

gegeben. Wollen wir diese Curve mit Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse untersuchen, so substituiren wir zunächst für x und y die Ausdrücke $x + iy$ bez. $x - iy$ und erhalten die Gleichung

$$(2)\quad 10(x^2+y^2)^3 + 18zx(x^4-10x^2y^2+5y^4) - 45z^2(x^2+y^2)^2 \\ - 135z^4(x^2+y^2) + 27z^6 = 0.$$

Diese Curve besitzt zwei reelle Züge. Betrachten wir $z = 0$ als die unendlich ferne Gerade, so erhalten wir ein inneres fast kreisförmiges Oval und einen äusseren dasselbe umschliessenden Zug, zu welchem 5 gewöhnliche Doppeltangenten und 5 in je 2 Punkten stationär berührende Tangenten mit reellen Berührungspunkten gehören. Man erschliesst hieraus, dass die Gleichung (2) auf 5 Weisen durch *reelle* projectivische Transformation in die Form (1) übergeführt werden kann.

Die Form F_6 bleibt bei der ganzen Gruppe der 1080 homogenen Substitutionen von der Determinante 1 *schlechthin invariant*, d. h. erhält auch keinen hinzutretenden numerischen Factor. Wir wissen ja von vornherein, dass dieser Satz bei jeder in der Gesammtgruppe enthaltenen Oktaedergruppe oder Ikosaedergruppe gilt. Weil aber die G_{1080} durch Combination zweier solcher Gruppen erzeugt werden kann, muss der Satz allgemein wahr sein.

Natürlich muss nun auch jede Covariante der C_6 bei der Collineationsgruppe G_{360} unverändert erhalten bleiben. Eine solche Covariante

*) Man sehe Hurwitz, *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*. Math. Ann. Bd. 41.

ist erstlich die Hesse'sche Determinante der Form F_6, für welche wir die Bezeichnung einführen wollen:

(3)
$$20250\,H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Lassen wir F_6 durch (1) gegeben sein, so erhalten wir in ausgerechneter Form:

(4)
$$\begin{aligned} H = {} & 38x^6y^6 + 468z^2x^5y^5 - 3375z^4x^4y^4 + 1080z^6x^3y^3 \\ & - 1215z^8x^2y^2 - 4374z^{10}xy - 729z^{12} \\ & + z(x^5+y^5)\,[-90x^3y^3 - 1080z^2x^2y^2 + 324z^4xy - 2916z^6] \\ & + (x^{10}+y^{10})\,[-6xy + 9z^2]. \end{aligned}$$

Die Hesse'sche Curve $H = 0$ schneidet bekanntlich auf der C_6 die 72 Wendepunkte aus. Wir haben auch im vorigen Paragraphen gefunden, dass diese Punkte das einzige gegenüber der G_{360} invariante System von 72 Punkten auf der C_6 bilden. Man hat folglich keine andere unabhängige Covariante 12. Ordnung. Nun kennen wir ja schon in den beiden Systemen von je 6 Ikosaederkegelschnitten 2 derartige covariante Gebilde. Diese müssen wir also durch 2 Gleichungen von der Form

(5)
$$H + \mu F_6^2 = 0$$

definiren können. Um die fraglichen μ-Werthe zu bestimmen, bemerken wir, dass durch die Gleichung (9) des 4. Paragraphen

$$6z^2 - (1 \pm i\sqrt{15})\,xy = 0$$

ein Kegelschnitt jedes Systems gegeben ist. Damit einer von diesen Kegelschnitten in (5) enthalten sei, muss

(6)
$$\mu = \frac{-3 \mp i\sqrt{15}}{36}$$

sein. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Für diese μ-Werthe enthält natürlich (5) auch die 5 anderen Kegelschnitte des bezüglichen Systems.

Wir bilden uns ferner die Covariante:

(7)
$$\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, & \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{\partial H}{\partial z}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Der Complicirtheit halber geben wir diese Covariante nicht in ausgerechneter Form. Jedenfalls überzeugt man sich leicht, dass $\Phi = 0$ nicht durch den Punkt $x = z = 0$ geht, und dass also Φ nicht als eine Function von F und H ausgedrückt werden kann. Die Curve $\Phi = 0$ ist von der 30. Ordnung und muss demnach die fundamentale C_6 in einem gegenüber der G_{360} invarianten System von 180 Punkten schneiden. Von derartigen Punktsystemen kennen wir aber zwei, nämlich das System von 180 sextactischen Punkten und das doppelt gezählte System von 90 sextactischen Punkten. Weil die sextactischen Punkte auf den Perspectivitätsaxen belegen sind, muss ersichtlich jede bei der G_{360} invariante Curve, welche auf der C_6 ein System von sextactischen Punkten ausschneidet, in diesen Punkten entweder Doppelpunkte besitzen oder auch die Tangente durch das bezügliche Perspectivitätscentrum schicken, es sei denn, dass die fragliche Curve alle 45 Perspectivitätsaxen enthält. Da Letzteres offenbar hier nicht der Fall sein kann, so ersehen wir, dass *die Curve* $\Phi = 0$ *die* C_6 *im System von* 90 *sextactischen Punkten berühren* (oder auch dortselbst Doppelpunkte besitzen) muss.

Eine neue Covariante finden wir in der Functionaldeterminante von F, H und Φ:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{\partial H}{\partial z}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Die Curve $\Psi = 0$ *stellt die* 45 *Perspectivitätsaxen dar.* Dies folgt einfach daraus, dass die zu den Curven des Netzes

$$\alpha F^{10} + \beta H^5 + \gamma \Phi^2 = 0$$

gehörigen Tangenten, deren Berührungspunkte auf jenen Axen liegen, stets durch die zugehörigen Perspectivitätscentren gehen.

Wir behaupten nun, *dass durch* F, H, Φ *und* Ψ *das vollständige System der Covarianten gegeben sei.* Man kann ersichtlich die Constante λ so bestimmen, dass die Curve

$$H^5 + \lambda \Phi^2 = 0 \tag{9}$$

ein beliebiges gegenüber der G_{360} sich geschlossen permutirendes System von 360 Punkten auf der C_6 ausschneidet. Wir können nun einer beliebigen covarianten Curve $\Omega = 0$ ein Aggregat von der Form

$$\sum = H^\alpha \Phi^\beta \Psi^\gamma \prod_{i=1}^{i=r} (H_i^5 + \lambda_i \Phi^2)^{k_i} = 0 \tag{10}$$

zuordnen, welches dieselben Schnittpunkte mit der C_6 besitzt. Darauf bestimmen wir die Constante μ in der Weise, dass die Curve

$$\Omega - \mu \Sigma = 0 \tag{11}$$

noch einen weiteren Schnittpunkt mit der C_6 erhält. Weil aber das System der Schnittpunkte schon vorher vollständig gegeben war, muss die C_6 in irgend welcher Multiplicität einen Bestandtheil der Curve (11) bilden. Wir erhalten demnach

$$\Omega = \mu \Sigma + F_6{}^\delta \Omega_1 . \tag{12}$$

In ähnlicher Weise können wir jetzt die Form Ω_1 zerlegen. Fahren wir fort, so müssen wir schliesslich die Form Ω durch F, H, Φ und Ψ ausgedrückt erhalten. Hiermit ist aber auch die behauptete Vollständigkeit des Formensystems erwiesen.

Für einen gewissen Werth von λ, sagen wir $\lambda = \lambda_1$, berührt die Curve (9) die C_6 im System der 180 sextactischen Punkte. Unter Beibehaltung der obigen Beweismethode können wir nun Ψ^2 durch F, H und Φ ausdrücken. Dabei ist das von F unabhängige Glied von der Form;

$$\mu_1 \Phi (H^5 + \lambda_1 \Phi^2).$$

Zwischen den vier Formen des vollständigen Systems besteht also eine identische Relation, welche Ψ^2 durch die 3 anderen ausdrückt.

Durch die innerhalb der G_{360} auftretenden gleichberechtigten Untergruppen von je 6 Ikosaedergruppen, 10 G_{36} und je 15 Oktaedergruppen wird die Aufmerksamkeit auf gewisse Normalgleichungen von der 6., 10. und 15. Ordnung hingelenkt. Weil aber die Aufstellung der betreffenden Gleichungen nicht ohne Schwierigkeit zu sein scheint, und überdies verschiedene interessante Fragestellungen hinzukommen, wollen wir dieselben erst in späteren Untersuchungen behandeln.

Lund, November 1895.