SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

Par M. **Henri Lebesgue** (Poitiers).

Adunanza del 18 agosto 1907.

I.

1. Le problème de Dirichlet s'énonce ainsi: Étant donné un domaine D et une fonction continue sur la frontière de D, démontrer qu'il existe une fonction V continue dans D, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, prenant sur la frontière de D les valeurs données et satisfaisant à l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Une telle fonction V est dite harmonique dans D.

Considérons l'intégrale

$$I(U)=\int\int_D\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

U étant une fonction satisfaisant aux conditions aux limites données; le calcul des variations montre que $I(U)$ est minimum pour $U=V$. Si donc on admet que l'intégrale $I(U)$ *atteint* son minimum le problème de Dirichlet est résolu.

Ce mode de raisonnement qui remonte à Gauss, doit surtout sa célébrité à l'application qu'en a faite Riemann à la démonstration de l'existence des fonctions de première espèce. Weierstrass en a montré l'insuffisance; l'assimilation inconsciente de $I(U)$ à une fonction continue d'une variable n'est nullement légitime. En effet, on démontre que $\varphi(x)$ continue atteint son minimum en choisissant des nombres $x_1, x_2, \ldots$ tels que les valeurs correspondantes de $\varphi(x)$ tendent vers la limite inférieure des valeurs de $\varphi(x)$ et en remarquant que si $\varphi(x)$ n'est considéré que dans un intervalle fini:

1° l'ensemble $x_1, x_2, \ldots$ a au moins une valeur limite x_0;

2° de la continuité de φ il résulte que $\varphi(x_0)$ est la limite des valeurs $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots$.

Pour opérer d'une façon analogue sur $I(U)$ il faudrait, ayant choisi des fonctions $U_1, U_2, \ldots$ telles que les valeurs correspondantes de $I(U)$ tendent vers la limite inférieure de $I(U)$, et satisfaisant au besoin à des conditions supplémentaires, effectuer les deux opérations suivantes:

O_1. *Démontrer que* U_1, U_2, ... *ont une fonction limite* V;

O_2. *Démontrer que* $I(V)$ *est la limite de* $I(U_1)$, $I(U_2)$, ... *et que* V *satisfait à l'équation aux dérivées partielles du calcul des variations.*

Or il n'est pas vrai en général qu'une suite de fonctions bornées ait une limite, d'où la nécessité, pour effectuer O_1, de tenir compte des propriétés de U_1, U_2, ..., ce qui parait devoir être fort difficile. D'autre part, l'opération O_2 est tout à fait différente de l'opération correspondante pour $\varphi(x)$, car, l'existence même des dérivées partielles de V étant en question, on ne sait quel sens doit être attribué à $I(V)$.

Ces difficultés, mises en lumière par WEIERSTRASS, étaient bien de nature à arrêter les chercheurs; c'est cependant la méthode indiquée qui a fourni à M. HILBERT une démonstration simple et rigoureuse de l'existence d'une fonction harmonique satisfaisant aux conditions aux limites données.

2. Les deux travaux que M. HILBERT a publiés à ce sujet [1]) sont assez différents sans doute, parce que, tandis que le premier semble destiné à mettre rapidement en lumière toute la portée du procédé, ce qui ne pouvait guère être fait qu'aux dépens de la précision, le second semble destiné à préciser la méthode à l'occasion du théorème d'existence des fonctions de première espèce. Dans le second mémoire c'est surtout le moyen d'effectuer l'opération O_2 qui est mis en lumière, tandis que dans le premier il n'était guère question de cette opération. Dans cette première Note, M. HILBERT exposait sa méthode sur deux exemples: l'existence de la ligne géodésique joignant deux points donnés d'une surface donnée et le problème de DIRICHLET pour un contour convexe à courbure continue. En ce qui concerne l'opération O_2, M. HILBERT se contentait de remarquer que la ligne trouvée était de longueur minimum; il ne recherchait pas si sa longueur était exprimée par l'intégrale qui donne naissance au problème du calcul des variations ou si la courbe fournissait une solution de l'équation différentielle à laquelle conduit ce calcul; pour le problème de DIRICHLET, M. HILBERT se contentait d'affirmer qu'on peut effectuer l'opération O_2. En opérant ainsi, M. HILBERT était d'accord avec lui-même, car il avait posé ce principe:

« Tout problème du calcul des variations possède une solution, pourvu que certaines hypothèses restrictives convenablement choisies relatives à la nature des conditions aux limites données soient remplies, et, nécessairement aussi, pourvu que ce que l'on entend par le mot solution éprouve une généralisation conforme au sens, à la nature des choses ».

En se plaçant à ce point de vue, on pourra presque toujours, toutes les fois qu'on aura pu effectuer O_1, dire que, par définition, elle fournit une solution, et il importe relativement peu qu'on puisse effectuer O_2. Si l'on peut effectuer O_2 on connaîtra une

---

[1]) 1°) *Über das* DIRICHLET'*sche Princip* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. VIII (1900), pp. 184-188], traduit par M. L. LAUGEL [Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XIX (1900), pp. 337-344; 2°) *Über das* DIRICHLET'*sche Prinzip* [Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901; Mathematische Annalen, t. LIX, (1904), pp. 161-186].

propriété très intéressante de la solution, mais ce résultat ne pourrait à lui seul être considéré comme une étude complète de cette solution.

Si nous adoptons le principe posé par M. HILBERT, nous devons aussi admettre que, quelque élégant que soit le procédé qu'il indique pour effectuer O_2, c'est dans la manière d'effectuer O_1 que réside le point essentiel de sa méthode. On aurait pu craindre que, pour effectuer O_1, il faille tenir compte de toutes les particularités de U_1, U_2, ... qu'il faille en particulier tenir compte du fait que $I(U_1)$, $I(U_2)$, ... convergent vers la limite inférieure de $I(U)$; or cela est inutile, c'est ce qui ressort nettement du premier travail de M. HILBERT, dans lequel on ne tient compte que de particularités très simples de U_1, U_2, ... Ces particularités permettent d'effectuer O_1 grâce à ce théorème: Si une suite de fonctions converge pour un ensemble de points partout dense et si ces fonctions ont leurs nombres dérivés tous inférieurs à un même nombre fixe, alors elle converge partout et la convergence est uniforme [2]).

Dans les deux exemples de son premier travail M. HILBERT utilise le théorème ci-dessus, mais grâce à des artifices très différents dans les deux cas. L'application du théorème, dans son second travail, est encore différente, et là le fait que $I(U_1)$, $I(U_2)$, ... convergent vers la limite inférieure de $I(U)$ intervient. Aussi, à cet égard, la seconde communication de M. HILBERT est-elle moins intéressante que la première; cependant, en rapprochant le premier exemple du premier travail de M. HILBERT de son second travail, on sera assez naturellement conduit à essayer d'effectuer O_1 en faisant intervenir seulement le fait que pour les fonctions U_1, U_2, ... les valeurs de l'intégrale $I(U)$ dont on cherche le minimum sont bornées dans leur ensemble. C'est comme on va le voir la méthode qui sera employée ici.

3. Le théorème utilisé par M. HILBERT est, on s'en rend compte immédiatement, équivalent au suivant dont l'application au problème des lignes géodésiques est immédiate [3]): Si l'on a dans un espace borné une infinité de courbes dont les longueurs sont bornées dans leur ensemble, ces courbes ont au moins une courbe limite. J'avais utilisé ce théorème — et un autre analogue qu'on peut formuler ainsi: Si l'on a dans un espace borné une infinité de surfaces simplement connexes dont les aires sont bornées dans leur ensemble, dont les contours ont au moins un contour limite et telles que tout morceau simplement connexe dont la frontière peut être enfermée dans une sphère de rayon r soit intérieure à une sphère de rayon $R(r)$, $R(r)$ tendant vers zéro avec

---

[2]) A cette occasion M. HILBERT cite BENDIXSON et TOWNSEND. La propriété était connue antérieurement; elle résulte du théorème fondamental sur les fonctions également continues {ASCOLI, *Le curve limiti di una varietà data di curve* [Memorie della classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII (1883), pp. 521-586]} et d'un caractère d'égale convergence {ARZELÀ, *Sulle funzioni di linee* [Memorie della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche, s. V, t. V (1895), pp. 225-244]}.

[3]) C'est d'ailleurs le raisonnement utilisé par M. HILBERT pour le problème des géodésiques qui montre l'équivalence des énoncés.

r, ces surfaces ont au moins une surface limite — dans des recherches sur la notion d'aire [4]) publiées alors que j'ignorais le premier travail de M. HILBERT. Après avoir pris connaissance de ce travail j'ai appliqué [5]) ces deux théorèmes à la recherche de certains minima, mais, ignorant alors le procédé qui permet à M. HILBERT d'effectuer l'opération O_2 dans le cas du problème de DIRICHLET, je n'ai appliqué mes raisonnements qu'à des formes d'intégrales ne contenant pas l'intégrale $I(U)$ précédemment définie.

Ces raisonnements fournissent cependant une solution du problème de DIRICHLET, mais cette solution est inutilement compliquée, et l'on peut effectuer l'opération O_1 grâce à cette proposition: *Une suite de fonctions monotones U_1, U_2, ... remplissant les conditions de continuité indiquées dans D et sur sa frontière, telles que les intégrales $I(U_1)$, $I(U_2)$, ... soient bornées dans leur ensemble, admet au moins une fonction limite.*

Ainsi, pour effectuer O_1 on utilise un théorème où n'intervient que l'intégrale $I(U)$ elle-même. Cela n'est d'ailleurs pas particulier à l'intégrale spéciale considérée ici, mais s'étend à une vaste catégorie d'intégrales, car le raisonnement est basé sur des relations d'inégalité. Je ne m'occuperais pas de ces généralisations, et l'équation de LAPLACE sera la seule que j'étudierai; mais j'ai essayé d'obtenir, pour cette équation, un théoréme à énoncé aussi large que possible. On sait que les méthodes de résolution du problème de DIRICHLET supposent toutes que le domaine soit particulier et, comme les restrictions imposées par ces diverses méthodes ne sont pas les mêmes, il est certain que les restrictions ne sont pas nécessaires à l'exactitude de l'énoncé. En recherchant une méthode applicable de suite au domaine le plus général, on peut espérer obtenir un raisonnement ne faisant intervenir que ce qui est essentiel dans la solution de la question. Je démontrerai ici l'existence d'une solution du problème dè DIRICHLET sans faire aucune restriction sur la nature du domaine, quand celui-ci est à connexion finie [6]), ni sur la nature de la fonction continue donnée sur la frontière du domaine. Je m'occupe surtout de l'opération O_1; peut être aurais-je plus tard la possibilité d'indiquer une méthode moins spéciale pour effectuer O_2.

Pour effectuer O_2 j'utilise ici la solution connue du problème de DIRICHLET pour le cas du cercle. Déjà, dans son premier travail, M. HILBERT faisait allusion à une méthode de ce genre. Cette méthode est aussi employée par M. HADAMARD au paragraphe 10 d'un travail récent [7]) qui paraissait comme j'achevais la rédaction de celui-ci.

---

[4]) *Sur la définition de l'aire d'une surface* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXXIX (2e semestre 1899), pp. 870-873 (séance du 27 novembre 1899)].

[5]) *Sur la définition de certaines intégrales de surfaces* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXXXI (2e semestre 1900), pp. 867-870 (séance du 26 novembre 1900)]; *Sur le minimum de certaines intégrales* [Ibid, id., pp. 935-937 (séance du 3 décembre 1900)]. *Voir* aussi ma Thèse: *Intégrale, Longueur, Aire* [Annali di Matematica pura ed applicata, 3e série, t. VII (1902), pp. 231-359].

[6]) Au contraire une restriction subsiste pour les domaines à connexion infinie.

[7]) *Sur quelques questions de calcul des variations* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XXIV (1907), pp. 203-231].

La méthode de M. HADAMARD ne diffère de celle que j'emploie que par le remplacement de la propriété démontrée plus loin au § 13 par un théorème équivalent analogue à celui de M. OSGOOD sur la différence des valeurs d'une intégrale pour la fonction qui la rend minimum et une autre fonction. M. HADAMARD obtient ce théorème au § 9 de son Mémoire par des calculs identiques à ceux qu'on trouvera plus loin au chapitre III. Mais, tandis que ces calculs servent seulement à M. HADAMARD à effectuer O_2, j'en déduis un caractère d'égale convergence et m'en sert pour effectuer O_1.

De ce calcul résulte aussi *que la solution du principe de* DIRICHLET *varie d'une façon continue avec la forme du domaine et les valeurs données aux limites* et encore que *la méthode alternée et la méthode du balayage s'appliquent dans tous les cas.*

Je dois m'excuser de la longueur de ce mémoire. Il est surtout allongé par le chapitre suivant dans lequel je définis les domaines et démontre quelques théorèmes les concernant. Ces propositions sont à peu près évidentes, leurs démonstrations quoique longues sont faciles et naturelles, leurs énoncés sous forme générale ne sont pas utilisés ici et même ils résultent sans démonstrations nouvelles de la solution du problème de DIRICHLET; c'est dire que j'aurais pu me dispenser de les démontrer. Cependant il m'a paru indispensable, avant de raisonner sur des domaines très généraux, de bien préciser, et par des définitions et par des exercices, ce que sont ces domaines.

4. Dans une Note récente [8]) M. HADAMARD a adressé à la méthode de M. HILBERT deux critiques qu'on peut opposer à tout essai de résolution du problème de DIRICHLET à l'aide du calcul des variations et qu'on peut formuler ainsi: Dans ces méthodes de résolution on admet:

1° qu'étant donnée une fonction continue sur la frontière d'un domaine, il existe des fonctions continues dans le domaine, y admettant des dérivées partielles, et prenant les valeurs données sur le contours.

2° on admet que, pour certaines de ces fonctions, l'intégrale $I(U)$ est finie.

J'ai l'occasion, dans le chapitre suivant, de construire des fonctions remplissant les conditions de continuité et de dérivation indiquées, mais cela est inutile. Soient F une fonction continue dans le plan et prenant les valeurs données f sur le contour du domaine, Φ_ε un polynôme représentant F à moins de ε dans le domaine et sur la frontière du domaine. Soit φ_ε la valeur de Φ_ε sur cette frontière. Si l'on cherche à résoudre le problème de DIRICHLET pour la valeur φ_ε donnée aux limites, les objections de M. HADAMARD ne portent pas, puisque $I(\Phi_\varepsilon)$ existe et est finie. Or on sait que la limite pour $\varepsilon = 0$ de cette solution du problème de DIRICHLET donnera la solution pour les valeurs données.

Ainsi, bien que la seconde critique de M. HADAMARD ait une grande portée, puisqu'il a prouvé qu'il est des cas très simples où $I(U)$ est toujours infinie, de sorte que le problème de DIRICHLET et le problème du calcul des variations qu'on y substitue ne sont pas équivalents, nous pouvons passer outre aux objections de M. HADAMARD.

[8]) *Sur le principe de* DIRICHLET [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXIV (1906), pp. 135-138].

L'artifice indiqué est celui que M. PARAF [9]) a utilisé dans un but analogue; il a été employé récemment par M. FUBINI [10]) de la manière qui vient d'être indiquée.

II.

5. ***Domaines.*** — On donne couramment au mot *domaine* deux sens différents suivant qu'on définit les domaines par les propriétés de leurs points ou par les propriétés des points frontières du domaine. C'est ordinairement le second sens qu'on adopte dans l'étude du problème de DIRICHLET et des problèmes aux limites analogues. Voici quelle est alors la définition.

Considérons deux fonctions continues $f(t)$, $\varphi(t)$, définies dans un intervalle *fini* (a, b) et telles que les relations simultanées:

$$f(t_1)=f(t_2), \qquad \varphi(t_1)=\varphi(t_2), \qquad t_1 \neq t_2, \qquad t_1 < t_2,$$

admettent la seule solution:

$$t_1 = a, \qquad t_2 = b.$$

La courbe lieu des points $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ est alors dite une courbe fermée sans point multiple.

M. JORDAN a démontré [11]) qu'étant donnée une telle courbe C, il existe des points, que l'on appelle les points intérieurs à C, qu'on ne peut pas joindre aux points à l'infini du plan par un trait continu (une ligne brisée si l'on veut préciser) ne contenant aucun point de C. Les points intérieurs à C forment le domaine ouvert limité par C. L'ensemble des points C et des points intérieurs à C s'appelle le domaine fermé limité par C. Les points du plan ne faisant pas partie de ce domaine fermé sont les points extérieurs à C.

M. JORDAN a démontré que deux points intérieurs (ou deux points extérieurs) pouvaient être joints par une ligne brisée ne contenant que des points intérieurs (ou extérieurs).

Les domaines qui viennent d'être définis sont dits simplement connexes pour les distinguer de ceux dont je vais parler.

---

9) *Sur le problème de* DIRICHLET *et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1ère série, t. VI (1892), pp. H.1 - H.75].

10) 1°) *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII (1er semestre 1907), pp. 58-84]; 2°) (supplément) *Il principio di minimo* [Ibid., id., pp. 300-301]. Ce travail, ainsi que diverses Notes du même auteur [3°) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXII (2e semestre 1906), pp. 383-386; 4°) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI, 1er semestre 1907, pp. 162-167, 215-220, 608-614], a été publié à la suite d'un intéressant Mémoire de M. BEPPO LEVI, *Sul principio di* DIRICHLET [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXII (2e semestre 1906), pp. 293-360].

J'ai utilisé plusieurs des raisonnements de ces Auteurs.

11) *Cours d'Analyse*, 2e édition, tome I, nos 97-104.

Soit une courbe fermée sans point multiple C et des courbes analogues C_1, C_2, ..., C_n toutes intérieures à C et telles que les domaines correspondants simplement connexes D_1, D_2, ..., D_n, qui sont tous intérieurs au domaine D limité par C, soient extérieurs les uns aux autres. Alors le domaine ouvert limité par C, C_1, C_2, ..., C_n est, par définition, formé par l'ensemble des points du domaine ouvert D qui n'appartiennent pas aux domaines fermés D_1, D_2, ..., D_n. Les points de ce domaine et ceux de C, C_1, C_2, ..., C_n forment le domaine fermé correspondant. Ces domaines sont dits $n+1$ fois connexes.

Enfin, si l'on applique la définition précédente au cas où les contours C_1, C_2, ... forment une infinité dénombrable, on est conduit à la notion de domaines à connexion infinie. Cependant on introduit en général, et nous introduirons, une restriction qu'on peut formuler ainsi: pour qu'il s'agisse d'un domaine il faut qu'il existe des points intérieurs à C et extérieurs à C_1, C_2, C_3, ... qui ne soient pas points limites des points de C, C_1, C_2, ... Alors, si l'on peut joindre deux tels points quelconques de l'ensemble par une ligne brisée ne contenant que des points jouissant de la même propriété, cet ensemble est appelé le domaine ouvert limité par les courbes données. L'ensemble dérivé d'un domaine ouvert est le domaine fermé correspondant.

Je passe au second mode de définition des domaines. Un ensemble est dit *fermé*, s'il contient son dérivé, *ouvert* s'il est le complémentaire d'un ensemble fermé. Un point d'un ensemble est *intérieur* à cet ensemble, s'il n'est pas point limite de l'ensemble complémentaire de E. Tout point d'un ensemble ouvert est intérieur à cet ensemble; un ensemble peut être fermé et ne contenir aucun point intérieur.

M. JORDAN [12]) appelle domaine tout ensemble qui contient des points intérieurs; cette définition est en général trop large, j'adopterai la suivante:

Un ensemble fermé est dit un domaine fermé:

1° *S'il est l'ensemble dérivé de l'ensemble de ses points intérieurs, qui est appelé le domaine ouvert correspondant.*

2° *Si cet ensemble ouvert est formé de points tous intérieurs à une circonférence convenablement choisie.*

3° *Si cet ensemble ouvert est d'un seul tenant.*

Les points ne faisant pas partie d'un domaine fermé sont dits extérieurs au domaine; les points appartenant à un domaine fermé sans faire partie du domaine ouvert correspondant constituent la frontière de ces domaines. Ces points frontières sont points limites à la fois pour l'ensemble des points intérieurs et pour l'ensemble des points extérieurs.

On voit le rôle des différentes restrictions imposées dans la définition précédente;

---

[12]) *Cours d'Analyse*, 2e édition, tome I, n° 24. Dans ce qui précède je me suis écarté du langage adopté par M. JORDAN en ce qui concerne les ensembles que j'ai appelé *fermés* et que M. JORDAN appelle *ensembles parfaits*. Dans tout ce qui suit, conformément à l'usage universellement adopté maintenant, un ensemble sera dit parfait quand il sera identique à son dérivé. Un domaine parfait est un ensemble fermé.

en particulier des conditions 2 et 3. La condition 3 n'est d'ailleurs pas essentielle; on le voit facilement en remarquant que, les conditions 1 et 2 étant remplies, si la condition 3 ne l'était pas, l'ensemble ouvert considéré serait la somme d'une infinité denombrable de domaines ouverts. De sorte que, pour tout ce qui va suivre, on pourrait sans presque rien avoir à modifier, supprimer cette troisième condition.

J'insisterai un peu plus sur les restrictions provenant du fait que je ne considère que des ensembles ouverts ou fermés et associés les uns aux autres. Avec la définition de M. JORDAN tout ensemble contenant un carré est un domaine quelle que soit la disposition de l'ensemble des points autres que ceux du carré, un cercle moins son centre est un domaine, un cercle plus un point extérieur est un domaine. De sorte que, avec la définition de M. JORDAN, il existe parfois des points qui ne sont limites que de points intérieurs et qui ne font pas partie du domaine et des points qui ne sont limites que de points extérieurs et qui en font partie. Les restrictions imposées ont pour but de supprimer ces singularités, artificielles à un certain point de vue.

Les domaines qui viennent d'être définis sont dits simplement connexes, n fois connexes, à connexion infinie, suivant que l'ensemble des points extérieurs au domaine est d'un seul tenant, ou décomposable en n ensembles d'un seul tenant, ou non décomposable en un nombre fini d'ensembles d'un seul tenant.

On voit de suite, grâce au théorème de M. JORDAN, que ces nouvelles définitions comprennent les premières comme cas particuliers, mais il ne faudrait pas croire qu'elles sont identiques. Par exemple, l'ensemble des points des courbes:

$$y \leqq 0, \qquad x^2 + y^2 = 1;$$
$$-1 \leqq x \leqq +1, \qquad y = \sin^2 \frac{\pi}{x},$$

partage le plan en deux régions, dont l'une est un domaine simplement connexe d'après les secondes définitions; mais ce n'est pas un domaine au sens primitif, car l'ensemble des deux courbes précitées ne forme pas une courbe fermée sans point multiple, de la nature de celles considérées au début, et de plus les points

$$x = 0, \qquad 0 \leqq y \leqq 1,$$

sont des points frontières ne faisant pas partie de ces courbes [13]).

Relativement aux domaines à connexion infinie, je serai obligé d'introduire une restriction nouvelle. Soit P un point intérieur à un domaine D, toute courbe fermée entourant P et assez petite est toute entière formée de points intérieurs à D. Mais il faut remarquer qu'il peut arriver que, F étant un point frontière de D, on puisse tracer des courbes fermées entourant F et aussi petites qu'on le veut, qui soient formées toutes entières de points intérieurs à D. Cela est manifestement impossible pour les domaines à connexion finie, mais cela se présente avec des domaines à connexion

[13]) Dans un article de M. SCHOENFLIES, *Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physikalische Klasse, 1902, pp. 185-192], on verra comment on peut distinguer les deux espèces de domaines simplement connexes.

infinie. Par exemple, de F comme centre je trace une circonférence C et sur le rayon FA de C je marque des segments $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, ..., tous extérieurs les uns aux autres, ne contenant pas F, et dont les extrémités M_1, M'_1, M_2, M'_2, ... tendent vers F. Sur ces segments comme diamètres je trace des circonférences C_1, C_2, ...; pour le domaine limité par C, C_1, C_2, ..., F est un point frontière jouissant de la singularité indiquée.

Les raisonnements que j'emploierai me conduisent à faire cette nouvelle restriction:

4° *Si tout point qu'on peut enfermer dans des courbes fermées sans point multiple, aussi petites que l'on veut et formées de points intérieurs au domaine, est aussi point intérieur du domaine.*

Cette restriction n'intervient pas dans ce chapitre, elle sera indispensable plus loin. Cependant les résultats obtenus s'étendent à certains cas où cette condition restrictive n'est plus vérifiée.

6. ***Fonctions continues dans un domaine.*** — On dit qu'une fonction $f(P)$, définie pour les points d'un ensemble E, est continue sur E lorsque toute suite P_1, P_2, ..., formée de points de E tendant vers un point P de E, donne naissance à une suite $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., qui converge vers $f(P)$.

Un domaine fermé, ou la frontière d'un pareil domaine, sont des ensembles à distance finie, fermés et même parfaits. Un domaine est de plus d'un seul tenant en ce sens que, A et B étant deux points d'un tel ensemble, on peut trouver une suite formée de points A, M_1, M_2, ..., M_p, B de l'ensemble, telle que la distance de deux points consécutifs soit inférieure à un nombre positif arbitrairement donné [14]). Sur des ensembles possédant ces propriétés la continuité est uniforme, de plus les fonctions continues atteignent leurs limites supérieure et inférieure et, pour les ensembles d'un seul tenant, elles ne peuvent passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires [15]).

Considérons le domaine simplement connexe défini au début du paragraphe précédent; on voit de suite que, pour qu'une fonction définie sur sa frontière soit continue il faut et il suffit que ce soit une fonction continue du paramètre t. Ce résultat s'étend aux domaines à connexion multiple limités par un nombre fini de courbes, mais il est évident que, pour un domaine limité par une infinité dénombrable de courbes, s'il est toujours vrai qu'une fonction continue sur la frontière du domaine est, sur chacune des courbes frontières, une fonction continue du paramètre qui servit à définir cette courbe, la réciproque n'est plus vraie.

La propriété suivante est fondamentale: *Étant donnée une fonction continue f sur la frontière E d'un domaine fermé D, il existe une fonction F continue dans D qui est égale à f sur E.* Dans la démonstration qui suit on utilisera seulement les propriétés

---

[14]) C'est la définition générale des ensembles d'un seul tenant; elle est tirée du n° 31 du *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

[15]) Pour les démonstrations voir Jordan, loc. cit., n^os^ 62 à 64.

suivantes de E: E est tout entier à distance et est fermé. F sera définie dans tous le plan, d'où une extension possible de l'énoncé précédent qui montrerait qu'il y a identité entre les fonctions continues sur les ensembles bornés et fermés et les fonctions définies sur de tels ensembles par les fonctions continues dans le plan.

Je considère une division du plan en carrés à l'aide de parallèles aux axes distantes entre elles de l'unité de longueur par exemple; c'est la division D_1. La division D_2 est obtenue en subdivisant, par des parallèles aux axes, chaque carré de D_1 en quatre carrés; D_3 est obtenue de même en subdivisant les carrés de D_2, et ainsi de suite.

En un sommet P de l'un de ces carrés on prendra F égale à la limite inférieure des valeurs que prend f aux points de E, qui sont à la plus petite distance possible de P. Cependant nous ne nous occuperons que des sommets de ceux des carrés d'une division, la division D_i par exemple, qui sont intérieurs à un carré de la division précédente, la division D_{i-1} contenant à son intérieur et sur son périmètre certains points de E. Ce sont ces carrés de D_{i-1} qui seront appelés les carrés utilisés.

Sur les côtés des carrés utilisés, F est connu maintenant en certains points. Sur ces côtés nous prendrons F linéaire entre les points où elle est connue. Ainsi sur le périmètre d'un carré utilisé, F varie linéairement, sauf en certains points; par ces points nous mènerons des parallèles aux axes qui divisent le carré en rectangles partiels. Sur les côtés parallèles à Ox non confondus avec les côtés du carré, on prendra F linéaire en x; enfin dans chaque rectangle on prendra F linéaire en x et y.

F est maintenant partout définie, il est évident qu'elle est partout continue. La définition de F est bien évidemment inutilement précise, mais cela rendra peut être plus claires les transformations ultérieures.

7. *Fonctions monotones.* — On désigne ainsi, quand il s'agit de fonctions d'une seule variable, les fonctions qui ne sont jamais décroissantes ou jamais croissantes. Ces fonctions sont donc celles qui, considérées dans un intervalle quelconque, atteignent leurs limites supérieure et inférieure dans l'intervalle aux extrémités de cet intervalle. Par analogie, je dirai *qu'une fonction de deux variables est monotone si la fonction admet les mêmes limites inférieures et supérieures dans un domaine fermé et sur sa frontière, et cela quel que soit le domaine considéré.*

Les fonctions continues monotones, les seules que je considérerai, atteindront leurs maximum et minimum dans un domaine en des points de la frontière du domaine.

Les fonctions monotones sont quelquefois appelées fonctions sans maximum ni minimum parce que la valeur d'une fonction monotone en un point P est toujours atteinte en d'autres points que P dans tout cercle entourant P. Il se peut d'ailleurs que la valeur en P égale la plus grande ou la plus petite des valeurs que prend la fonction dans le cercle, c'est-à-dire qu'une fonction monotone peut avoir des maximum et minimum au sens ordinaire du mot. Mais ce sont des maximum et minimum tout spéciaux; dans beaucoup de questions on trouve avantage à réserver le nom de maximum ou minimum à des points plus particuliers.

La définit ion des fonctions monotones peut être donnée pour les fonctions définies dans tout le plan, ou pour les fonctions définies dans un certain domaine dont on s'interdit de sortir, ou pour les fonctions définies dans des ensembles plus généraux encore.

Les fonctions continues monotones dans un domaine simplement connexe jouissent de la propriété caractéristique suivante : quel que soit le point P du domaine, l'ensemble des points en lesquels la fonction prend la même valeur qu'en P est formé de parties d'un seul tenant avec la frontière. Les fonctions continues monotones dans un domaine multiplement connexe ne jouissent pas nécessairement de cette propriété, mais elles possèdent la propriété caractéristique suivante :

Quel que soit le nombre n, l'ensemble des points en lesquels la fonction n'est pas inférieure à n (ou supérieure à n) se décompose en ensembles d'un seul tenant, tels que chacun d'eux contient un point au moins de la frontière du domaine considéré D.

Cette condition est suffisante, car si elle est remplie pour f continue dans D, quel que soit le point P dans D, P fait partie d'un ensemble d'un seul tenant avec la frontière de D et sur lequel F n'est pas inférieure (ou supérieure) à $f(P)$; donc, sur la frontière de D et sur la frontière de tout domaine contenu dans D et contenant P, il y a des points où f n'est pas inférieure à $f(P)$ et aussi des points pour lesquels f n'est pas supérieure à $f(P)$; cela à cause de la continuité de f.

La condition est nécessaire ; dire qu'elle n'est pas remplie pour la fonction f, c'est dire qu'il existe un ensemble E d'un seul tenant en tout point duquel f n'est pas inférieure (ou supérieure) à un nombre n et tel que tous les points dont la distance à E ne surpasse pas un certain nombre ε, ou bien font partie de E ou bien donne à f une valeur inférieure (ou supérieure) à n. Or, ces points forment un domaine Δ à l'intérieur duquel f prendrait une valeur inférieure (ou supérieure) à l'une quelconque de celles que f atteint sur la frontière de Δ [16]).

On pourrait préciser davantage et montrer que, *P étant un point quelconque du domaine D, f, continue dans D, y sera monotone si, et seulement si, l'on peut trouver une courbe de la nature de celles dont il a été parlé au paragraphe 5, dont les deux extrémités sont aussi voisines qu'on le veut de la frontière de D, passant aussi près de P qu'on le veut, et le long de laquelle f est monotone.* Je ne démontrerai pas cette proposition, qui paraît à peu près évidente [17]), mais dont la démonstration exigerait quelques développements ; cette proposition ne sera d'ailleurs pas utilisée.

Voici une autre propriété caractéristique, à peu près évidente, des fonctions continues monotones : *pour qu'une fonction continue dans un domaine y soit monotone, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun domaine sur la frontière duquel la fonction est constante et à l'intérieur duquel la fonction n'est pas constante.*

---

[16]) On voit que la continuité de f n'intervient pas dans cette seconde partie du raisonnement ; elle était indispensable pour démontrer que la condition est suffisante. Je répète que les fonctions continues sont les seules étudiées ici.

[17]) Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer qu'elle ne serait plus vraie, si l'on assujettissait la courbe à passer par P.

La condition est évidemment nécessaire, je montre qu'elle est suffisante. Si f n'est pas monotone dans D, c'est qu'on peut trouver un domaine Δ à l'intérieur duquel f a un maximum supérieur à celui qu'elle atteint sur la frontière de Δ ou un minimum inférieur à celui qu'elle a sur sa frontière. Si l'on est dans le premier cas, à l'intérieur de Δ il y a un point P tel que $f(P)$ soit supérieur à la limite supérieure L de f sur la frontière de Δ. Soit α compris entre L et $f(P)$ et soit A l'ensemble des points où l'on a $f \geqq \alpha$. Cet ensemble est fermé; P est intérieur à A. Soit B l'ensemble des points intérieurs à A, soit C la partie de B qui est d'un seul tenant et qui contient P. C est évidemment un domaine ouvert sur la frontière duquel f est égale à α en tout point; à l'intérieur de C, f n'est pas constante, le théorème est démontré, car C est intérieur à D.

On aperçoit maintenant comment, étant donnée une fonction continue F dans un domaine D, on pourra en déduire une fonction continue et monotone dans D et égale à F sur la frontière de D. Rangeons les valeurs rationnelles en une suite infinie $u_1, u_2, \ldots$; F_1 désignera la fonction continue égale à u_1 à l'intérieur des domaines, s'il en existe qui soient intérieurs a D, dans lesquels F n'était pas constante tout en étant constante et égale à u_1 sur leur frontière; F_1 sera égale à F aux autres points; F_2 se déduit de F_1 comme F_1 de F, u_2 remplaçant u_1 et ainsi de suite.

Je dis que les fonctions $F, F_1, F_2, \ldots$ ont une limite Φ. Soit P un point quelconque, et soit F^1 la première des F_i pour laquelle on n'ait pas $F_i(P) = F_{i-1}(P)$. Alors F^1 égale u^1 dans un certain domaine D^1 contenant P. Soit F' la fonction qui suit F^1, comparons $F^1(P)$ et $F'(P)$. Soit d'abord $F^1(P) = F'(P)$; alors je dis que, dans tout D^1, $F^1 = F' = F^1(P)$. S'il en était autrement en effet, si l'on avait $F^1(\varphi) \neq F'(\varphi)$, φ étant point de D^1, c'est que φ serait intérieur à un domaine $\mathfrak{D}$ à l'intérieur duquel F^1 ne serait pas constante tout en étant constante sur la frontière de $\mathfrak{D}$; par suite $\mathfrak{D}$ contiendrait D^1 et l'on aurait $F'(P) = F'(\varphi) \neq F^1(\varphi) = F^1(P)$. Nous prouvons en même temps que $F^1(P) \neq F'(P)$ entraîne $F^1(\varphi) \neq F'(\varphi)$. Par suite si F^2 est la première fonction après F^1, pour laquelle on n'ait pas $F^2 = F^1$ en P, on aura $F^2 = u^2$ dans tout un domaine D^2 contenant D^1. On définiera de même F^3, u^3, D^3 et ainsi de suite.

S'il n'y a qu'un nombre fini de fonctions F^i, l'existence de Φ est évidente. Supposons qu'il y en ait une infinité et désignons par PA un segment d'origine P, dont l'extrémité est sur la frontière de D et dont tous les points, sauf A, sont intérieurs à D. A^i désignera celui des points de rencontre de PA avec la frontière de D^i qui est le plus voisin de A. On a $F^i(P) = F^i(A^i) = F(A^i)$; la première de ces deux égalités est évidente, la seconde résulte de ce que tout point en lequel on n'a pas $F^i = F$ est *intérieur* à un domaine dans lequel F^i diffère de F. Les A^i tendent vers un point limite α; donc $F^i(P) = F(A^i)$ tend vers la valeur limite $\Phi(P) = F(\alpha)$.

La convergence des F_i vers Φ est d'ailleurs uniforme, puisque, le passage de F_i à F_{i+k} n'augmentant l'oscillation dans aucun intervalle, les F_i sont également continues; donc Φ est continue et la convergence est uniforme. De là résulte encore que le maximum de $|F_{i+k} - F_i|$ tend vers zéro quand i croît indéfiniment.

Or, supposons qu'on puisse trouver un domaine Δ, à l'intérieur duquel le maximum de F_i surpasse le maximum de F_i sur la frontière, ou encore à l'intérieur duquel le minimum de F_i sur la frontière surpasse le minimum de F_i à l'intérieur de Δ; il résulte d'un raisonnement précédent, qu'on peut trouver un nombre β, rationnel et faisant partie de la suite $u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots$, tel qu'il existe un domaine C à l'intérieur duquel F_i n'est pas constante tout en étant constante sur la frontière de C. Si l'on a $u_m = \beta$, F_m diffère de F_i, en certains points, et si l'on choisit convenableme u_m, $|F_m - F_i|$ sera aussi voisine que l'on veut de la valeur absolue de la différence, supposée existante, entre les maximum, ou minimum, de F_i à l'intérieur de Δ et sur sa frontière. Par suite cette différence tend vers zéro quand i croît indéfiniment.

Il en résulte que Φ est monotone dans D; soit en effet Δ un domaine quelconque. La différence entre les maximum (ou minimum) de Φ sur la frontière de Δ et dans Δ est la limite des différences analogues pour F_i, laquelle tend vers zéro. D'après la seconde propriété caractéristique des fonctions continues monotones on en déduit que Φ est monotone; *donc étant donnée une fonction continue f sur la frontière E d'un domaine fermé D, il existe une fonction Φ continue et monotone dans D qui est égale à f sur E.*

On pourrait facilement étudier des ensembles E plus généraux; je me contenterai de faire observer que, E étant la frontière d'un domaine, si l'on voulait s'occuper des points extérieurs au domaine, il suffirait de remarquer qu'une inversion convenable fait correspondre à ces points les points intérieurs d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines.

8. ***Fonctions indéfiniment dérivables dans un domaine.*** — On appelle ainsi toute fonction continue ayant, en tout point *intérieur* au domaine, des dérivées partielles de tous les ordres. L'existence de ces dérivées, implique leur continuité et la possibilité d'intervertir l'ordre des dérivations.

Je vais modifier la fonction Φ du paragraphe précédent de manière à obtenir *une fonction continue, monotone et indéfiniment dérivable dans le domaine, prenant les valeurs continues données à la frontière du domaine.* Je suppose d'abord que Φ a été construite à partir de la fonction F du paragraphe 6. F est linéaire en x et y dans chacun des rectangles qui ont servi à sa construction. Si, en un point P, Φ diffère de F c'est que Φ est constante dans un domaine contenant P. Ce domaine sera limité par une courbe le long de laquelle F est constante; cette courbe est donc formée d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de segments parallèles aux axes et d'arcs d'hyperboles équilatères asymptotes à des parallèles aux axes.

En d'autres termes, si R est un rectangle utilisé (voyez § 6), R sera divisé en 3 domaines, dans l'un $F = \Phi$, dans les deux autres Φ est constante. Ces domaines n'existent pas nécessairement tous trois. Les frontières de ces 3 domaines sont le périmètre du rectangle et 0, 1 ou 2 arcs d'hyperboles. Dans chaque domaine Φ est linéaire en x et en y.

Il est dès lors bien évident qu'on pourra raccorder à l'aide de fonctions indéfiniment dérivables les différentes fonctions bilinéaires qui constituent Φ. Soit par exemple f et φ les deux fonctions bilinéaires qui constituent Φ de part et d'autre d'un arc de la demi hyperbole

$$x > 0, \qquad xy - 1 = 0.$$

On raccordera ces deux fonctions en prenant, pour

$$x > 0, \qquad 1 - \varepsilon < xy < 1 + \varepsilon,$$

Φ égale à

$$f + (\varphi - f) \frac{\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^{xy} e^{-\frac{1}{(u-1+\varepsilon)^2}} e^{-\frac{1}{(u-1-\varepsilon)^2}} du}{\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-\frac{1}{(u-1+\varepsilon)^2}} e^{-\frac{1}{(u-1-\varepsilon)^2}} du}.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans tous les détails, on voit que l'emploi de telles fonctions permettra d'arriver au résultat. D'ailleurs la fonction obtenue sera bien monotone et de plus, si l'on choisit les nombres analogues à ε assez petits et si I désigne une intégrale double étendue au domaine et portant sur une fonction continue de x, de y, de Φ et de certaines de ces dérivées partielles, on pourra faire en sorte que l'intégrale I subisse une variation aussi petite que nous le voudrons dans le passage de la fonction Φ, non partout dérivable, à la fonction partout dérivable que nous lui substituons.

9. ***Représentation géométrique des fonctions.*** — Nous représenterons une fonction $f(x, y)$ à la manière ordinaire par la surface S, $z = f(x, y)$. Aux points du domaine D correspondent des points faisant partie de la portion de l'espace couverte par les parallèles à oz issues des points de D. La frontière de cette partie de l'espace est formée des parallèles issues de la frontière F de D; nous l'appelerons le cylindre projetant F; ou encore le cylindre projetant le contour C de S, en appelant contour de S la frontière de S, c'est-à-dire l'ensemble des points de S correspondant à ceux de F.

Se donner un domaine D et une fonction continue sur sa frontière F, c'est se donner un contour C. Chercher une fonction continue en (x, y) dans D, prenant les valeurs données sur F c'est chercher une surface S passant par C. On sous entend qu'il s'agit d'une surface $z = f(x, y)$, f étant définie dans D, mais il ne faut pas oublier que ce sont seulement de ces surfaces qu'il s'agit.

Si f_i tend vers f [18]), les surfaces S correspondantes tendent vers S, correspondant à f; la réciproque est vraie si l'on ne s'occupe que de surfaces de la nature indiquée, sans quoi elle ne serait pas vraie. Par exemple, les surfaces S_n $[z = (x^2 + y^2)^n]$ passent toutes par le contour $C\,(z = 1,\ x^2 + y^2 = 1)$ et elles ont une surface limite, formée de $z = 0$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ et de $0 \leqq z \leqq 1$, $x^2 + y^2 = 1$, mais les fonctions $(x^2 + y^2)^n$ n'ont pas une fonction limite continue dans D et sur F.

---

[18]) J'entends par là que f_i tend uniformément vers f, quel que soit le point considéré de D ou de F. C'est toujours dans ce sens qu'il faudra entendre cette locution: f est la limite des f_i dans un domaine D. Au contraire, lorsqu'il sera question de convergence des f_i vers f pour les points d'un ensemble quelconque, la convergence uniforme ne sera plus requise.

Nous dirons qu'un domaine D est la limite des domaines D_i, si tout point intérieur (ou extérieur) à D est, dès que i est assez grand, intérieur (ou extérieur) à D_i. On vérifiera facilement que si P est un point frontière de D et si toutes les circonférences tracées de P comme centre et comprises entre deux circonférences Γ et γ rencontrent la frontière F de D, pour i assez grand elles rencontreront aussi chacune des frontières F_i des D_i.

Nous dirons qu'un contour C est la limite de contours C_i si les domaines correspondant D_i ont pour limite D et si, quels que soient les points P_1, P_2, ... choisis respectivement sur F_1, F_2, ... et ayant un point limite et un seul P, lequel appartient nécessairement à F, les points correspondants de C_1, C_2, ... ont un seul point limite qui est le point de C correspondant à P.

Il est évident que si, à l'aide de parallèles à oz, on projette C_1, C_2, ... et C sur une surface $z = f(x, y)$ définie quels que soient x et y, on obtient des contours c_1, c_2, ... et c, c étant la limite des c_i.

Soit D'_i un domaine quelconque entièrement intérieur à D, c'est-à-dire un domaine *fermé* dont tous les points sont points *intérieurs* de D. Quel que soit D on pourra évidemment choisir D'_i à connexion finie et telle que la limite des D'_i soit D. On pourrait s'assujettir à prendre D'_i constitué par un nombre fini (indéfiniment croissant avec i) de cercles, ou limité par des polygones. Ces remarques peuvent servir dans l'emploi de la méthode alternée ou de la méthode du balayage. J'ajoute quelques définitions qui seront utiles.

Soit une fonction f continue dans D; soit un domaine D' entièrement intérieur à D. Soit L et l les limites supérieure et inférieure de f dans D'; L_1 et l_1 les limites analogues sur la frontière de D'. La limite supérieure des différences $L - L_1$ et $l_1 - l$ quand on fait varier D' de toutes les manières possibles sera appelé le défaut de monotonie de f dans D.

Si dans tout domaine entièrement intérieur à D les fonctions f_i ont une limite, cette limite y sera monotone si, et seulement si, le défaut de monotonie de f_i dans tout domaine entièrement intérieur à D tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

On pourra affirmer qu'il en est ainsi si la limite des f_i existe et est harmonique dans tout domaine entièrement intérieur à D. Les surfaces correspondant aux fonctions harmoniques sont dites surfaces potentielles.

J'ajoute en terminant ces généralités que les définitions et démonstrations pourraient être données pour les surfaces de RIEMANN tout aussi bien que pour le plan. De sorte, par exemple, que s'il s'agit d'une fonction définie dans le domaine des points d'où l'on peut mener deux tangentes réelles et deux seulement à un limaçon de PASCAL à point double non isolé, on pourra, si on le veut, supposer que la fonction prend une valeur ou deux valeurs distinctes en ce point double.

On peut remarquer encore que pour un tel domaine la définition de l'ordre de connexion employée plus haut n'est pas universellement adoptée. La définition adoptée conduit à dire que le domaine est doublement connexe si on le considère comme tracé sur le plan simple et simplement connexe si on le suppose tracé sur une surface de RIEMANN telle qu'une ligne de croisement des feuillets soit le rayon du point double.

Peu importe d'ailleurs, la notion de connexion finie est seule de quelque importance pour la suite.

III.

10. ***Théorème sur la convergence.*** — *On suppose données des fonctions U_1, U_2, ... continues et monotones dans un domaine D, toutes égales entre elles sur la frontière de D, ayant en tout point intérieur au domaine des dérivées partielles du premier ordre finies et continues, telles enfin que, quel que soit i, l'intégrale*

$$I(U_i) = \int\int_D \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

ait un sens et soit inférieure à un nombre fixe H indépendant de i. Alors, parmi les U_1, U_2, ... on peut choisir une suite u_1, u_2, ... convergeant uniformément vers une limite continue u.

Quelques explications ne seront pas inutiles. Lorsque le domaine D n'est pas quarrable, l'intégrale $I(U_i)$ a deux sens différents suivant qu'on l'étend au domaine ouvert ou au domaine fermé. Pour qu'on puisse l'étendre au domaine fermé il faudrait que U_i ait des dérivées partielles sur la frontière de D; lorsqu'il en est ainsi le théorème est évidemment vrai pour l'intégrale $I(U_i)$ étendue au domaine fermé, s'il est vrai pour l'intégrale étendue au domaine ouvert. Il suffira donc de s'occuper de ce dernier cas.

Dans toute la suite d'ailleurs les intégrales doubles considérées seront étendues au domaine ouvert; on verra facilement que les mêmes raisonnements peuvent être appliqués aux intégrales étendues au domaine fermé lorsque ces intégrales existent.

Les intégrales considérées sont toujours des intégrales ordinaires de fonctions continues. C'est pour bien spécifier que je n'emploie ici aucune généralisation de la notion d'intégrale, que j'ai assujetti les dérivées premières des U_i à des conditions beaucoup trop restrictives. On pourrait étendre le théorème en employant des généralisations convenables de la notion d'intégrale, mais ce serait parfaitement inutile pour le but actuel. Il suffira ici d'une petite généralisation qui sera donnée plus loin.

Employons d'abord un artifice utilisé par M. HILBERT et qui est dû à ASCOLI. Soit un ensemble dénombrable partout dense, formé des points P_1, P_2, ... Soit, choisie dans la suite des U_i, une suite $S_1(u_1, U'_2, U'_3, \ldots)$ convergeant au point P_1. Soit, choisie dans la suite S_1, une suite $S_2(u_1, u_2, U''_3, U''_4, \ldots)$ convergeant au point P_2; etc. Je dis que la suite u_1, u_2, u_3, ..., qui converge évidemment en tout point P_i, converge uniformément dans D.

S'il n'en était pas ainsi, en effet, on pourrait trouver un nombre ε tel que, quel que grand que soit n, on puisse trouver un point A_n et des nombres entiers i_n, j_n pour lesquels on ait:

$$j_n > i_n > n, \quad |u_{j_n}(A_n) - u_{i_n}(A_n)| > \varepsilon.$$

A chaque valeur de n attachons ainsi un point A_n, ces points distincts ou non ont au moins un point limite M [19]). Alors, si petit que soit r, si grand que soit n, on peut trouver les nombres i et h et le point P tels que l'on ait:

$$\text{distance } PM < r, \qquad i + h > i > n, \qquad |u_i(P) - u_{i+h}(P)| > \varepsilon.$$

Mais, si i est assez grand, on peut toujours trouver un point P^i parmi les P_k tel qu'on ait:

$$\text{distance } P^i M < r, \qquad |u_i(P^i) - u_{i+h}(P^i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute valeur positive de h.

Donc on a:

$$|[u_i(P)-u_i(P^i)]-[u_{i+h}(P)-u_{i+h}(P^i)]| \geqq |u_i(P)-u_{i+h}(P)|-|u_i(P^i)-u_{i+h}(P^i)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

et l'une au moins des deux différences $u_i(P) - u_i(P^i)$, $u_{i+h}(P) - u_{i+h}(P^i)$ est supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$ en valeur absolue.

En d'autres termes, l'une ou l'autre des deux fonctions u_i ou u_{i+h}, soit u^i, a une oscillation supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$ dans la partie $D(r)$ du domaine D, qui est intérieure à la circonférence $C(r)$ de rayon r et de centre M.

Si $D(r)$ contient tous les points intérieure à $C(r)$, u^i étant monotone a une oscillation au moins égale à $\frac{\varepsilon}{4}$ sur $C(r)$.

Si $D(r)$ contient des points de la frontière de D et si, sur cette frontière, les U_i, et par suite u^i, ont dans $D(r)$ une oscillation inférieure à $\frac{\varepsilon}{12}$, u^i étant monotone a une oscillation au moins égale à $\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{6}$ sur $C(r)$. Soient A, B deux points de $C(r)$ tels que l'on ait

$$|u^i(A) - u^i(B)| \geqq \frac{\varepsilon}{6}.$$

A appartient à un arc de $C(r)$ dont tous les points font partie du domaine fermé D; soit a l'une des extrémités de cet arc. Soit de même b une extrémité de l'arc correspondant à B; a et b peuvent être confondus. On a, par hypothèse,

$$|u^i(a) - u^i(b)| < \frac{\varepsilon}{12},$$

donc

$$|[u^i(A)-u^i(a)]-[u^i(B)-u^i(b)]| \geqq |u^i(A)-u^i(B)|-|u^i(a)-u^i(b)| > \frac{\varepsilon}{12}.$$

---

[19]) M, appartenant au domaine fermé D, est dit point limite des A_n si, aussi près que l'on veut de M, il y a une infinité de points A_n distincts ou confondus. Cette définition du point limite est souvent avantageuse dans la théorie des fonctions, elle permet de n'examiner qu'une fois pour toutes les deux cas possibles: les positions distinctes des A_n sont en nombre fini ou non.

L'oscillation de u^i surpasse donc $\frac{\varepsilon}{12}$ sur l'un des arcs de $C(r)$ qui est intérieure à D. Je pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{12}$.

Soient $r_1, r_2, \ldots$ des nombres décroissant constamment et jusqu'à zéro; r_1 sera choisi assez petit pour que tous les points intérieurs à $C(r_1)$ soient inférieurs à D, si M est intérieur à D; assez petit pour que, si M est sur la frontière de D, toutes les circonférences $C(r)$ intérieures à $C(r_1)$ rencontrent la frontière de D, et tel que, sur la partie de la frontière de D intérieure à $C(r_1)$ l'oscillation des U_i soit inférieure à α.

Soient $v_1, v_2, \ldots$ des fonctions choisies parmi les fonctions u_i et telles que v_i ait une oscillation supérieure à $\varepsilon = 12\alpha$ dans $D(r_i)$. Alors, pour $r_i \leqq r \leqq r_1$, il existe sur $C(r)$ un arc sur lequel l'oscillation de v_i surpasse α. Cette remarque va fournir une expression approchée par défaut de $I(v_i)$. Mais cette valeur approchée croîtra indéfiniment avec i, donc $I(v_i)$ ne pourra rester inférieure à H; c'est la contradiction qui prouvera la convergence uniforme des u_i.

Pour avoir cette valeur approchée, négligeons d'abord tous les points extérieurs à la couronne limitée par $C(r_i)$ et $C(r_1)$, puis, dans l'élément d'intégration en coordonnées polaires $\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial \theta}\right)^2\right] d\rho . \rho\, d\theta$ négligeons le terme $\frac{\partial v_i}{\partial \rho}$. Enfin, remarquant que, pour $r_i \leqq r \leqq r_1$, sur chaque $C(r)$ on peut trouver deux points, correspondant aux valeurs $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ de θ, appartenant à un arc de $C(r)$ faisant partie du domaine fermé D et tels que l'on ait:

$$|v_i[r, \theta_1(r)] - v_i[r, \theta_2(r)]| > \alpha,$$

nous écrirons

$$I(v_i) \geqq \int_{r_i}^{r_1} \frac{d\rho}{\rho} \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} \left[\frac{\partial v_i(\rho, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 d\theta.$$

Le minimum de l'intégrale simple $\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta}\right)^2 d\theta$, analogue à l'intégrale double ici étudiée, s'obtient soit par un calcul élémentaire soit par l'emploi du calcul des variations. Il correspond à une fonction linéaire en θ et sa valeur est

$$\frac{\alpha^2}{\theta_2(\rho) - \theta_1(\rho)} > \frac{\alpha^2}{2\pi}.$$

Donc on a:

$$I(v_i) \geqq \frac{\alpha^2}{2\pi} L \frac{r_1}{r_i}$$

et le théorème est démontré.

J'ajouterai différentes remarques:

1° L'emploi des coordonnées polaires n'est nullement indispensable; on aurait pu remplacer, par exemple, les intégrations le long des cercles $C(r)$ par des intégrations le long de carrés concentriques à l'origine et de côtés parallèles aux axes. En employant cette méthode on se rendra bien compte que le résultat subsisterait si l'on modifiait l'intégrale $I(U)$ tout en lui conservant les propriétés suivantes:

L'intégrale $I(U)$ étant mise sous la forme $\int\int a(U)\,dx\,dy$, les deux intégrales simples $\int a(U)\,dx$ et $\int a(U)\,dy$, quand on les étend à un intervalle de longueur l dans lequel l'oscillation de U est au moins α, doivent avoir un minimum $\varphi(\alpha, l)$ tel que, quel que soit $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^l \varphi(\alpha, l)\,dl$ soit infinie.

Le même théorème s'appliquerait encore à des cas plus généraux; je ne m'occuperai pas de ces extensions ni de celles qu'on peut faire aux intégrales triples, quadruples, etc. Je ferai seulement observer que la méthode s'appliquerait identiquement à l'étude de l'intégrale correspondant à l'équation de LAPLACE à n termes.

2° Nous allons renoncer à l'existence ou à la continuité des dérivées aux points d'un certain ensemble E; quel peut être cet ensemble pour que nos raisonnements ne soient pas modifiés?

Tout d'abord E peut contenir une infinité dénombrable de circonférences que l'on négligera; puis, sur chacune des circonférences utilisées, E peut avoir un nombre fini de points ou même une infinité réductible, car il est évident qu'on peut supposer cette singularité sans que le calcul du minimum de $\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial\theta}\right)^2 d\theta$ soit modifié, mais on ne pourrait pas, par exemple, supposer que les valeurs de θ exceptionnelles forment seulement dans $(0, 2\pi)$ un ensemble de mesure nulle; on formera facilement en effet une fonction v_i non nulle et telle que $\frac{\partial v_i}{\partial\theta}$ soit nulle sauf un ensemble de valeurs de θ mesure nulle [20]).

On peut donc supposer que E est tel que sur toute circonférence, sauf sur une infinité dénombrable de circonférences, les points de E forment un ensemble réductible.

3° Un autre genre de généralisation sera utile. Supposons que les U_i soient bornées dans leur ensemble mais ne soient pas assujetties à prendre des valeurs données à la frontière de D. Alors l'existence de la limite pour la suite des u_i est prouvée seulement pour tout domaine entièrement intérieur à D.

Supposons maintenant que les V_i prennent les valeurs données à la frontière de D, soient bornées dans leur ensemble mais ne soient plus monotones dans D. Et supposons que D' étant un domaine quelconque entièrement intérieur à D. Dès que les indices i sont assez grand, les V_i soient monotones dans D'. Je dis que la limite des u_i dans D' est une fonction continue dans D prenant les valeurs données sur D.

Il suffit d'examiner ce qui se passe à la frontière de D. Supposons qu'en se rapprochant d'un point M de la frontière l'une des limites de la limite u des u_i diffère de la valeur donnée en M de plus de 2ε. La circonférence $C(r)$ étant choisie assez petite pour que, dans elle, l'oscillation de la fonction donnée sur la frontière F de D soit inférieure à ε et que toute circonférence concentrique à $C(r)$ et de rayon plus petit rencontre F, on prend des nombres $r > r_1 > r_2 > \cdots$ décroissant constamment et jusqu'à zéro.

[20]) *Voir* par exemple mes *Leçons sur l'intégration,* page 129.

Il existe dans $C(r_p)$ un point en lequel u diffère de la valeur m donnée en M de plus de 2ε; u étant monotone dans chaque D', ce point appartient à un ensemble d'un seul tenant avec F en chaque point duquel on a $|u-m| > 2\varepsilon$.

Soit N un point de F qui soit point frontière de cet ensemble.

N ne peut être intérieur à $C(r)$, sans quoi, la valeur donnée n en N différant de m de moins ε, sur tout cercle de centre N et de rayon compris entre deux nombres fixes ρ et ρ_p, dont le premier est fixe et le second aussi petit que l'on veut, les u_i d'indice assez grand auraient une oscillation au moins égale à ε, ce qui est impossible.

N est donc extérieur à $C(r)$. Mais alors pour i assez grand, sur toutes les circonférences de centre M, comprises entre $C(r)$ et $C(r_p)$, u_i a une oscillation supérieure à ε, ce qui est impossible.

Remarquons encore qu'au lieu d'assujettir les surfaces $z = U_i$ à passer par un contour donné C, on pourrait tout aussi bien les assujettir à passer par des contours C_i qui ont C pour limite.

De même, au lieu d'assujettir les U_i à être monotones, pour i assez grand dans chaque D', on pourrait assujettir seulement les défauts de monotonie [21]) des U_i dans un D' quelconque à tendre vers zéro quand i croît indéfiniment.

4° Nous avons assujetti à 4 conditions restrictives les ensembles auxquels nous avons réservé le nom de domaine; examinons si les raisonnements s'appliqueraient si l'on abandonnait la 4ᵉ restriction. Nos nouveaux domaines pourraient avoir des points frontières, qu'on appellera *singuliers,* qui peuvent être enfermés dans des courbes aussi petites que l'on veut et ne rencontrant pas la frontière: ces courbes seront dites les courbes singulières relatives au point singulier considéré.

Tout d'abord les raisonnements montrent la convergence uniforme de la suite des u_i dans tout domaine intérieur à D et ne contenant pas de point singulier de D. Si maintenant M est un point singulier, le raisonnement s'applique encore identiquement, si, pour r assez petit, aucune des circonférences $C(r)$ n'est une courbe singulière. En général certaines de ces circonférences seront singulières. Soient

$$\rho_1 \geqq r \geqq \rho_1', \qquad \rho_2 \geqq r \geqq \rho_2', \ \cdots$$

des valeurs de r pour lesquelles les $C(r)$ ne sont pas singulières. Notre raisonnement montre que la limite trouvée pour les $I(U_i)$ augmentera indéfiniment, s'il en est de même $L\frac{\rho_1}{\rho_1'}\frac{\rho_2}{\rho_2'}\cdots$; par suite la conclusion subsistera, si l'on peut choisir les nombres $\frac{\rho_i}{\rho_i'}$ qui sont supérieurs à 1, de manière que le produit $\Pi\frac{\rho_i}{\rho_i'}$ soit divergent.

On pourrait répéter les mêmes conclusions pour le cas ou l'on remplace les circonférences par d'autres courbes, des carrés de centre M et de côtés parallèles aux axes par exemple.

En opérant ce remplacement, on gagnera au moins en simplicité dans certains

[21]) *Voir* Chap. II, § 9.

cas, puisqu'il se peut qu'il y ait des circonférences $C(r)$ qui soient singulières et qu'aucun des carrés considérés ne soit singulier.

Il est facile de voir qu'on pourra toujours trouver des rectangles R_1, R_2, ... de centre M, de côtés parallèles aux axes de coordonnées, tels que R_i contienne R_{i+1}, et qu'aucun des rectangles analogues intérieurs à R_i et contenant R_{i+1} ne soit singulier. Alors, en remarquant que sur les rectangles compris entre R_K et R_{K+1} les fonctions v_i d'indice assez grand ont une oscillation supérieure à α, on en déduit une valeur inférieure de $I(v_i)$ dans la partie de D comprise entre R_k et R_{k+1}, d'où une valeur inférieure pour $I(v_i)$ dans R_1. Mais cette valeur n'augmente pas toujours indéfiniment; cela dépend de la loi de succession des R_i. Désignons par A_1, A_2, ... les sommets de R_1, R_2, ... dont les deux coordonnées sont positives; on verra facilement que la limite des $I(v_i)$ croîtra indéfiniment si les directions OA_i et les directions A_iA_{i+1} n'ont pour droite limite ni ox ni oy.

La conclusion pourra encore être obtenue dans certains cas en remarquant que, connaissant D, on peut remplacer parfois $\theta_2(\rho) - \theta_1(\rho)$ par une fonction de ρ plus avantageuse que la valeur 2π trop grossièrement approchée.

On n'atteindra cependant pas ainsi le cas général et l'on peut même montrer, par un exemple, *que le théorème ne serait pas vrai si l'on étendait comme il a été dit le sens du mot domaine.*

Le domaine D sera limité par la circonférence γ de centre O et de rayon 1 et par des circonférences γ_i, intérieures à γ, de centre C_i et de rayon r_i:

$$OC_i = \frac{3}{2.4^i}, \qquad r_i = \frac{1}{4^{(i+1)^2}}.$$

La frontière de D est composée des circonférences γ et γ_i et du point O qui est singulier. Les fonctions U_i devront prendre la valeur 0 sur γ et la valeur 1 sur les γ_i et en O.

Pour construire U_i je trace de O comme centre deux circonférences σ_i et Σ_i de rayons $s_i = \frac{1}{2.4^i}$, $S_i = \frac{1}{4^i}$, et de C_k pour centre ($k \leqq i$) une circonférence Γ_k de rayon $R_k = \frac{1}{4^{2k+1}}$. Les circonférences γ, γ_i, Γ_j, σ_k, Σ_l ne se coupent pas, quels que soient i, j, k, l; U_i sera nulle dans le domaine limité par γ, Σ_i et les $\Gamma_k (k \leqq i)$; U_i sera égale à 1 dans la partie de D intérieure à σ_i. En un point P d'une couronne γ_k, Γ_k on aura, le symbole L désignant un logarithme:

$$U_i(P) = \frac{LR_k - L\overline{PC_k}}{LR_k - Lr_k}$$

et, en un point Q de la couronne σ_i, Σ_i on aura:

$$U_i(Q) = \frac{LS_i - L\overline{OQ}}{LS_i - Ls_i};$$

v_i satisfait ainsi à toutes les conditions de l'énoncé sauf peut être en ce qui concerne

$I(U_i)$ et sauf en ce qui concerne l'existence et la continuité des dérivées sur les circonférences Γ_k et Σ_i; mais, d'une part, nous savons que notre raisonnement primitif ne nous permettait pas de tenir compte de cette existence ou non et, d'autre part, il serait facile de modifier U_i au voisinage des circonférences indiquées, de façon à raccorder les différents morceaux de la surface $z = U_i$ et cela sans renoncer à la monotonie de U_i et en modifiant aussi peu qu'on le voudrait la valeur de l'intégrale $I(U_i)$. Or $I(U_i)$ se calcule immédiatement, c'est :

$$2\pi\left[\frac{1}{LS_i - Ls_i} + \sum_{k=1}^{k=i} \frac{1}{LR_k - Lr_k}\right] = 2\pi\left(\frac{1}{L2} + \sum_{k=1}^{k=i}\frac{1}{i^2 L4}\right);$$

donc $I(U_i)$ est bornée et nous sommes dans les conditions de l'énoncé. Cependant, les U_i ne convergent pas uniformément au voisinage de O.

La quatrième condition imposée aux domaines ne peut donc pas être supprimée purement et simplement si l'on veut employer la méthode qui va être exposée.

IV.

11. ***Relations entre le problème de Dirichlet et le calcul des variations.*** — Il ne sera pas inutile, tout d'abord, de rappeler les raisonnements classiques afin de bien préciser ce qui en résulte. Nous partons de l'intégrale $I(u)$:

$$I(u) = \int\int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

étendue à toutes les fonctions continues, à dérivées premières continues, et prenant des valeurs données sur la frontière de D. On suppose qu'il existe une fonction u qui rende $I(u)$ finie et minimum, alors v étant une fonction continue, à dérivées premières continues, s'annulant sur la frontière de D, quel que soit λ on a :

$$I(u + \lambda v) \geqq I(u).$$

Or, on a :

$$I(u + \lambda v) = I(u) + \lambda^2 I(v) + 2\lambda \int\int_D \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\,dy;$$

mais cette transformation suppose que cette dernière intégrale existe, ce qui n'est pas tout à fait évident; car, si l'on suppose l'existence et la continuité de u et v dans le domaine fermé D, on ne suppose l'existence et la continuité des dérivées que dans le domaine ouvert. De l'inégalité évidente

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

et de l'inégalité analogue en y, il résulte que l'intégrale en question existe bien toutes les fois que deux des trois intégrales $I(u)$, $I(v)$, $I(u + \lambda v)$ existent, auquel cas la troisième de ces intégrales existe aussi.

$I(u + \lambda v)$, en tant que fonction de λ, a sa dérivée seconde positive; la seule condition pour le minimum est que sa dérivée première

$$\int\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

soit nulle pour toutes les fonctions v satisfaisant aux conditions indiquées.

Cela est tout à fait général; supposant ensuite u à dérivées secondes continues, on prend v nulle sauf dans un rectangle intérieur au domaine et, par des intégrations par parties, on trouve

$$\int\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\int_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy.$$

De là se déduit évidemment que u vérifie l'équation de LAPLACE.

Mais il paraît fort difficile de démontrer la réciproque: une *fonction u, qui satisfait à l'équation de* LAPLACE *et qui rend $I(u)$ finie, donne à $I(u)$ sa valeur minimum.* On ne peut en effet reprendre les raisonnements précédents en sens inverse, si l'on ne suppose rien sur les dérivées de u à la frontière de D; la méthode classique, qui emploie la formule de GREEN et qui est d'ailleurs équivalente à ce retour en sens inverse, suppose elle aussi l'existence des dérivées partielles de u à la frontière.

12. ***Cas d'un domaine circulaire.*** — Lorsque D est un cercle, la réciproque peut être démontrée; M. HADAMARD [22]) a vérifié directement que, dans ce cas, *$I(u+v)$ est toujours au moins égale à $I(u)$, u vérifiant l'équation de* LAPLACE.

Le calcul suppose que l'on sait résoudre le problème de DIRICHLET pour le cas du cercle à l'aide de l'intégrale de POISSON. Ce résultat, étant celui d'où l'on déduit le théorème sur la nature harmonique de la somme d'une série convergente de fonctions harmoniques, qui a déjà été utilisé, est considéré comme obtenu, soit par la méthode classique, soit par celle équivalente que j'ai développée dans mes *Leçons sur les séries trigonométriques* [23]). Nous supposons connu aussi ce théorème: si les coefficients de la série de FOURIER de $f(\theta)$ sont A_n et B_n, on a:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 d\theta \geqq \frac{A_0^2}{2} + \sum_1^p (A_n^2 + B_n^2) \;{}^{24)}.$$

Si l'on prend $p = \infty$, il est évident que c'est le signe $=$ qui convient, au moins

[22]) *Voir* l'article cité [8]).

[23]) Chapitre II, §§ 30 à 32. La même méthode s'applique évidemment quel que soit le nombre des variables.

[24]) *Voir* HARNACK: *Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen* [Mathematische Annalen, t. XVII (1880), pp. 123-132]; *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der* FOURIER'*schen Reihe* [Ibid., t. XIX (1882), pp. 235-279 et 524-528]; *Théorie de la série de* FOURIER [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2ème série, t. VI (1882), 1ère partie, pp. 242-260, 265-280, 282-300]. Certains des raisonnements de ces Mémoires manquent totalement de rigueur, plusieurs des théorèmes donnés sont inexacts.

dans le cas où f a des dérivées de tout ordre, cas auquel la série de FOURIER de f est uniformément convergente [25]).

Ceci posé, voici le raisonnement de M. HADAMARD. Posons, ρ et θ étant les coordonnées polaires, le rayon de D étant pris pour unité,

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

$$v = \frac{\alpha_0(\rho)}{2} + \sum [\alpha_n(\rho) \cos n\theta + \beta_n(\rho) \sin n\theta];$$

formules valables pour $\rho < 1$.

Les formules qui donnent les coefficients du développement de FOURIER d'une fonction fournissent, pour $\dfrac{\partial(u+v)}{\partial\rho}$ et $\dfrac{\partial(u+v)}{\partial\theta}$, les coefficients $n a_n \rho^{n-1} + \alpha'_n$, $n b_n \rho^{n-1} + \beta'_n$; $n(b_n \rho^n + \beta_n)$, $-n(a_n \rho^n + \alpha_n)$. Dans ces formules les accents désignent des dérivées par rapport à ρ.

Soit D_0 le cercle concentrique à D de rayon $\rho_0 < 1$. On a, I_0 étant étendue à D_0,

$$I_0(u+v) = \int_0^{\rho_0} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial(u+v)}{\partial\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial(u+v)}{\partial\theta} \right]^2 \right\} d\theta.$$

L'inégalité de HARNACK donne

$$I_0(u+v) \geqq A + B + \pi \sum_1^p \int_0^{\rho_0} (n a_n \rho^n \alpha'_n + n b_n \rho^n \beta'_n + n^2 a_n \alpha_n \rho^{n-1} + n^2 b_n \beta_n \rho^{n-1}) d\rho,$$

A désignant la somme des termes ne dépendant que des a_n et b_n, B désignant la somme de ceux qui ne dépendent que des α_n et β_n. Quand p augmente indéfiniment, A tend vers $I_0(u)$; quel que soit p tous les termes de B sont positifs ou nuls et tous ne sont pas nuls; il suffit donc de montrer que la troisième somme a une limite nulle [26]).

Or, le terme figurant sous le signe $\sum$ est $n \rho_0^n [a_n \alpha_n(\rho_0) + b_n \beta_n(\rho_0)]$ et, quel que soit n, $\alpha_n(\rho_0)$ et $\beta_n(\rho_0)$ tendent vers zéro quand ρ_0 tend vers 1, puisque v tend alors uniformément vers zéro.

Les conclusions subsisteraient évidemment si l'on renonçait à l'existence ou à la continuité des dérivées de la fonction v sur un nombre fini d'arcs de courbes algébriques.

13. *Le problème du calcul des variations ne peut avoir deux solutions.* — Cela va résulter d'une transformation de la condition trouvée:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy = \int\int_D \Delta(u,\ v)\, dx\,dy = 0.$$

---

[25]) On sait que ce théorème est très général. *Voir* un Mémoire de M. HURWITZ {*Über die* FOURIER'*schen Konstanten integrierbarer Funktionen* [Mathematische Annalen, t. LVII (1903), pp. 425-446]} et la Thèse de M. FATOU {*Séries trigonométriques et séries de* TAYLOR [Acta Mathematica, t. XXX (1906), pp. 335-400]}.

[26]) En somme on effectue la séparation de termes qui correspond à celle effectuée par la formule

$$I(u+v) = I(u) + I(v) + \int\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Je transforme cette condition [27]). Soient $u_1, u_2, \ldots ; u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots$ des fonctions remplissant les conditions indiquées et telles que les intégrales $I(u_i)$ et $I(u_i+v_i)$ tendent vers la limite inférieure d des $I(u)$. On a

$$I(u_i + \lambda v_i) = I(u_i) + \lambda^2 I(v_i) + 2\lambda \int\int_D \Delta(u_i, v_i)\, dx\, dy;$$

$I(u_i + v_i)$ et $I(u_i)$ ont la même limite d; la formule précédente, quand on y fait $\lambda = 1$, montre que

$$\lim_{i=\infty}\left[I(v_i) + 2\int\int_D \Delta(u_i, v_i)\, dx\, dy\right] = 0.$$

Je dis que les deux termes de cette somme tendent séparément vers zéro; si le premier, en effet, qui n'est jamais négatif, tendait vers $+k^2$ pour certaines suites de valeurs de i, le second tendrait dans les mêmes conditions vers $-K^2$ et $I\left(u_i + \frac{v_i}{2}\right)$ tendrait vers $d - \frac{K^2}{4}$, ce qui est absurde.

Déduisons de là que, si les v_i tendent uniformément vers une limite v cette limite est nulle. Si elle ne l'était pas, en effet, v étant nulle à la frontière de D ne serait pas constante dans D et l'on pourrait trouver un segment, soit parallèle à Ox soit parallèle à Oy, sur lequel v ne serait pas constante. Tenant compte de la continuité de v on en déduit qu'il existerait un rectangle $ABCD$, de côtés parallèles à Ox et Oy et tel, par exemple, que, sur toute droite joignant un point de AB à un point de CD, v_i, pour i assez grand, aurait une oscillation supérieure à un certain nombre $\alpha > 0$. D'où, si $AB = l$, $AD = l'$ et si par exemple AB est parallèle à Ox,

$$\int\int_{ABCD}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \geqq \int_{AB} dx \int \left(\frac{\partial v_i}{dy}\right)^2 dy \geqq l\frac{\alpha^2}{l'};$$

ce qui montre que les $I(v_i)$ n'auraient aucune de leurs limites nulles.

Cela pourrait aussi se déduire d'un calcul analogue à celui du paragraphe précédent.

Ainsi, *si des fonctions u_i, $u_i + v_i$ tendent uniformément vers les limites u et $u+v$ et fournissent des intégrales $I(u_i)$, $I(u_i + v_i)$ qui tendent vers la limite inférieure d de l'intégrale $I(u)$, v est nulle.*

Remarquons que ces conclusions subsistent si l'on renonce à la continuité ou à l'existence des dérivées sur des arcs de courbes algébriques tels que tout domaine entièrement intérieur à D n'en contienne qu'un nombre fini.

14. ***Existence de la solution du problème du calcul des variations.*** — Supposons donnée une fonction f continue dans D et sur la frontière de D, admettant des dérivées du premier ordre continue dans D et telle que $I(f)$ soit finie. Nous recherchons si l'on peut trouver une fonction u satisfaisant aux conditions de continuité et de dérivation de f, prenant les mêmes valeurs que f sur la frontière de D et pour laquelle $I(u)$ est plus petite que pour toutes les autres fonctions w satisfaisant aux mêmes conditions.

---

[27]) M. HILBERT emploie dans son second Mémoire des transformations analogues. M. FUBINI [10]) 1°) utilise un théorème d'unicité analogue à celui du texte.

Soit d la limite inférieure de $I(w)$, elle est au plus égale à $I(f)$, donc finie. Si nous renonçons à l'existence ou à la continuité des dérivées en certains points, nous remplaçons d par $d' \leqq d$. Si donc nous trouvons une fonction z à dérivées partout continues dans D et telle que $I(z) = d'$, c'est que l'on a $z = u$, $d' = d$.

Décomposons maintenant D en une infinité dénombrable de rectangles de côtés parallèles à Ox et Oy. Soit F la fonction, égale à f en ceux des sommets de ces rectangles qui sont des sommets pour tous les rectangles auxquels ils appartiennent, et linéaire, par rapport à x et par rapport à y dans chacun de ces rectangles. A cause de la continuité de $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$, si les rectangles sont convenablement choisis, $I(F)$ différera aussi peu que l'on voudra de $I(f)$.

Passons maintenant de F à une fonction monotone Φ comme il a été dit précédemment [28]). Φ n'a pas ses deux dérivées partielles du premier ordre sur les côtés des rectangles et sur certains arcs d'hyperbole. Deux au plus dans chaque rectangle.

Enfin, remarquons que $I(\Phi)$ ne surpasse pas $I(F)$; par suite, si nous assujettissons w a être monotone et que nous renoncions à l'existence des dérivées le long des rectangles et le long des arcs d'hyperbole considérés, nous remplaçons d par $d' \leqq d$.

Renonçons de plus à l'existence des dérivées de w aux points d'une famille de circonférences intérieures à D telles que tout point de D soit intérieur à l'une d'elles et que tout domaine entièrement intérieur à D n'en contienne qu'un nombre fini, cela abaisse peut être encore la valeur d'.

Soient $w_1, w_2, \ldots$ des fonctions w assujettis à toutes les conditions indiquées et telles que $I(w_1)$, $I(w_2)$, $\ldots$ tendent vers d'. Nous savons, d'après le chapitre précédent, que certaines de ces w_i tendent uniformément vers une limite; je dis que la suite toute entière tend uniformément vers cette limite. S'il n'en était pas ainsi, en effet, de la suite de w_i non employés pour tendre vers la première limite, on pourrait extraire une suite tendant uniformément vers une seconde limite; or cela est impossible d'après le paragraphe précédent. On ne doit d'ailleurs pas supposer que les w_i tendent toutes vers la même limite non uniformément d'après les raisonnements du chapitre précédent.

Ceci posé, soit P un point intérieur à D, C l'une des circonférences exceptionnelles entourant P, et modifions, s'il est nécessaire, $w_1, w_2, \ldots$ dans C de façon à rendre ces fonctions harmoniques dans C. Cela ne peut que diminuer $I(w_1)$, $I(w_2)$, $\ldots$, donc ne change pas la limite des w_i et cette limite u est harmonique dans C, donc dans D.

D'ailleurs, dans tout domaine complètement intérieur à C, il y a convergence uniforme des dérivées des w_i harmoniques vers les dérivées de la fonction harmonique limite; par suite, étendue à un tel domaine, l'intégrale $I(u)$ est la limite des intégrales $I(w_i)$. Il en est donc de même dans tout domaine entièrement intérieur à D et par suite, étendue à D, $I(u)$ existe et ne surpasse pas la limite intérieure, donc $I(u)=d'=d$.

L'emploi de la solution du problème de Dirichlet pour le cas du domaine circu-

[28]) Chapitre II, § 7.

laire n'était pas indispensable. Sachant que les $w_1, w_2, \ldots$ ont une fonction limite on aurait pu démontrer, par la méthode de M. HILBERT, que cette limite est harmonique [29]). Mais pour passer au cas général du problème de DIRICHLET, nous utiliserons le théorème sur les séries uniformément convergentes de fonctions harmoniques qu'on déduit ordinairement de l'intégrale de POISSON.

Dans une Note récente [30]) j'ai indiqué une autre méthode pour obtenir le résultat précédent. Je résume cette méthode à laquelle j'ai déjà fait allusion et qui est bien inutilement compliquée.

Les w_i étant choisis comme il a été dit, du fait que les $I(w_i)$ sont bornées il résulte à fortiori que les intégrales

$$\int\int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

le sont; c'est-à-dire que les aires des surfaces $z = w_i(x, y)$ sont bornées. On en déduit, d'après un théorème déjà rappelé [31]) que certaines de ces surfaces ont une surface limite. Mais il n'est pas évident que cette surface soit de la forme $z = u(x, y)$, car elle peut peut-être contenir des segments de droites parallèles à Oz.

Du fait que les $I(w_i)$ sont bornées, on déduit de suite que les parallèles à Ox sur lesquelles les $\int \left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2 dx$ ne sont pas bornées dans leur ensemble correspondent à un ensemble de valeurs de y de mesure nulle [32]). Sauf peut être sur ces droites exceptionnelles les w_i auront une limite [33]).

Il s'agit d'étendre ce résultat aux droites issues d'un point. J'employais pour cela des raisonnements équivalents au fond à ceux du chapitre précédent, mais dont la forme inutilement compliquée m'avait caché la portée plus générale et j'en concluais seulement que les droites issues d'un point P le long desquelles les w_i ne convergeaient pas uniformément sont exceptionnelles.

Ceci admis, supposons, par exemple, P intérieur à D et menons de P des droites non exceptionnelles de façon à diviser le plan autour de P en secteurs d'angles inférieurs à π. Sur chacune de ces droites les w_i considérés convergent uniformément, par suite ces droites divisent B en domaines partiels pour chacun desquels il suffit de ré-

---

29) Voir le 2e Mémoire de M. HILBERT. Une partie des raisonnements de M. HILBERT sert à prouver que la suite analogue à $w_1, w_2, \ldots$, qu'il considère, a une limite. Lorsque, comme ici, l'existence de cette limite est connue, cette partie des raisonnements devient inutile et la démonstration prend la forme que M. FUBINI a indiquée [10]) 3°).

30) *Sur le problème de* DIRICHLET [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIV (1er semestre 1907), pp. 316-318 (séance du 11 février 1907)].

31) *Voir* le 1er Chapitre, ou ma Thèse, § 99. L'énoncé doit être quelque peu modifié, parce qu'il ne s'agit plus de surfaces simplement connexes.

32) C'est une remarque analogue qui sert déjà pour démontrer l'existence de la surface limite.

33) C'est la remarque qui joue le rôle fondamental dans le travail de M. FUBINI [10]) 1°). Sous une autre forme, par l'emploi d'un théorème de M. PRINGSHEIM, M. BEPPO LEVI avait utilisé dans son Mémoire déjà cité [10]) des remarques analogues (*voir* en particulier § 32, note 3 de ce Mémoire).

soudre la même question du calcul des variations, les valeurs à la frontière étant connues.

Ce que nous y avons gagné, c'est qu'il existe une droite Δ issue de P, telle que le contour que l'on considère maintenant soit tout entier d'un même côté de Δ. Si donc (et nous savons que nous pouvons toujours supposer qu'il en est ainsi) les valeurs sur le contour sont celles qu'y prend un polynôme en x, y, on pourra toujours supposer que les surfaces $z = w_i$ sont toutes entières contenues entre deux plans passant par la droite se projetant sur Δ et contenue dans le plan tangent à $z = f$ au point qui se projette en P. Par suite, dans le secteur considéré les w_i convergent en P de manière que sur toutes les droites issues de P il n'y a pas de discontinuité en P.

On voit par ce résumé que la méthode était beaucoup plus compliquée; elle avait de plus l'inconvénient de mélanger beaucoup plus les solutions du problème du calcul des variations et du problème de DIRICHLET. Mais les artifices qui y sont employés peuvent peut-être être utiles dans d'autres cas [34]).

15. ***Existence de la solution du problème de Dirichlet.*** — *Cette existence est établie par les considérations qui précèdent, quel que soit le domaine* [35]) *et quelle que soit la fonction continue donnée sur la frontière du domaine.* Je résume la marche de la démonstration: φ étant la fonction donnée sur la frontière, on considère un polynôme $f(x, y)$ représentant φ sur la frontière à moins de ε près; par la méthode du paragraphe précédent on montre l'existence d'une fonction u harmonique dans le domaine et égale à f sur sa frontière; la limite de u, quand ε tend vers zéro, est la fonction harmonique dans le domaine, égale à φ sur sa frontière.

On pourra remarquer que, pour le polynôme $f(x, y)$, la considération de la fonction F, construite à l'aide de fonctions bilinéaires est inutile. On pourra de suite déduire de f une fonction monotone Φ, laquelle aura partout des dérivées premières, sauf peut-être sur un nombre fini d'arcs de courbes algébriques.

16. ***Variation de la solution du problème de Dirichlet avec les conditions aux limites.*** — Si, comme il a été fait précédemment, nous faisons correspondre à chaque fonction w_i une surface $z = w_i$, toutes ces surfaces passent par le même contour et le problème de DIRICHLET consiste à trouver la surface potentielle passant par le contour donné. Il serait très important de savoir comment varie cette surface avec le contour.

Le théorème sur la convergence d'une suite uniformément convergente de fonctions harmoniques fournit, pour un cas particulier mais très important, une réponse partielle à cette question. Voici la généralisation de ce théorème: *Si des contours* C_1,

---

[34]) *Voir* le parti qu'en a tiré M. FUBINI [10]) 3°). J'avais cru un instant pouvoir simplifier le raisonnement indiqué dans le texte en démontrant l'existence de droites non exceptionnelles issues d'un point quelconque P par un raisonnement analogue à celui qui prouve l'existence de droites non exceptionnelles parallèles aux axes, les coordonnées polaires remplaçant les coordonnées cartésiennes. Mais cet artifice, qui pourrait être employé pour certaines intégrales, ne réussit pas ici.

[35]) *Voir* au Chapitre II la définition adoptée pour les domaines et en particulier la condition 4° imposée à ces domaines.

$C_2, \ldots$ *tendent uniformément vers un contour* C, *les surfaces potentielles déterminées par* $C_1, C_2, \ldots$ *tendent uniformément vers la surface que détermine* C.

Soit Σ une surface ($z =$ polynôme en x, y) qui passe par le contour de C à moins de ε près, et soient $c_1, c_2, \ldots . c$ les projections de $C_1, C_2, \ldots, C$ sur Σ, faites parallèlement à Oz. Les distances, comptées parallèlement à Oz, des points correspondants de c et C sont supposées inférieures à ε. Les distances analogues relatives à c_i et C_i ont, pour i infini, des limites inférieures à ε. Il en résulte que les distances analogues relatives aux surfaces potentielles s_i et S_i, déterminées par c_i et C_i, ont des limites inférieures à ε et que les distances relatives aux surfaces potentielles s et S, passant par c et C, sont aussi inférieures à ε. Puisque ε est quelconque, il suffira donc de démontrer que les s_i tendent uniformément vers s.

Or, cela résulte du théorème du chapitre III (remarque 3); puisque les intégrales I relatives aux surfaces s_i sont bornées dans leur ensemble, les s_i ont au moins une limite, laquelle est évidemment une surface potentielle, c'est donc s. Cette surface limite est par suite unique et puisque (toujours d'après le même théorème) nous savons que les s_i ne peuvent avoir la surface limite s sans tendre uniformément vers elle, la proposition est démontrée.

V.

17. ***Méthode alternée et méthode du balayage.*** — Ceci permet d'aborder, au moins théoriquement, la recherche de la solution du problème de DIRICHLET, dont l'existence seule a été précédemment démontrée. On peut, en effet, toujours modifier aussi peu que l'on veut les valeurs données aux frontières et la forme de cette frontière pour que le domaine devienne à connexion finie et que sa frontière jouisse des propriétés requises pour qu'on puisse appliquer l'une des méthodes classiques: la méthode alternée ou la méthode du balayage par exemple.

Mais il y a plus: on va voir que ces méthodes s'appliquent directement au domaine donné et aux conditions aux limites données. Une conclusion analogue pourrait peut-être être obtenue en ce qui concerne la méthode célèbre de NEUMANN; je n'ai pu encore y parvenir.

Voici ce qu'il faut entendre par la méthode alternée. Soit un domaine D; supposons tracés dans D des domaines $D_1, D_2, \ldots,$ en nombre fini ou dénombrable, tels que tout point *intérieur* à D soit *intérieur* à au moins un des D_i.

Supposons que les frontières des D_i forment un ensemble E partout non dense, tel que, sur toute circonférence, sauf peut-être sur une infinité dénombrable de circonférences, les points de E forment un ensemble réductible. E est de mesure nulle; on pourra donc sans inconvénient le négliger dans le calcul des intégrales I. Enfin, pour éviter toute discussion accessoire, supposons que, quels que soient i et j, les frontières de D_i et de D_j, n'ont qu'un nombre fini de points en commun et que ces points n'appartiennent qu'à deux frontières; ces points seront appelés sommets.

Balayer le domaine D_i, ce sera remplacer une fonction continue ψ donnée dans D par la fonction continue égale à ψ à l'extérieur de D_i et harmonique dans D_i.

Ceci posé, supposons donnée une fonction $f(x, y)$ continue dans D; nous rangeons les domaines D_i dans un ordre quelconque en faisant en sorte que le même domaine intervienne une infinité de fois. Soit $d_1, d_2, \ldots$ l'ordre adopté. Partant de f nous balaierons d_1, ce qui nous donnera φ_1; à partir de φ_1 nous formons φ_2 par le balayage de d_2; et ainsi de suite.

Cette suite d'opérations constitue la méthode alternée; du moins elle se réduit à la méthode alternée classique quand il n'y a qu'un nombre fini de domaines D_i. Elle ne diffère de la méthode du balayage qu'en ceci: dans la méthode de M. Poincaré les domaines D_i sont des cercles et au lieu d'opérer sur f on opére sur $f + \theta$, θ étant une certaine fonction harmonique dans D.

Pour légitimer à la fois la méthode alternée et la méthode du balayage *il faut prouver que les fonctions φ_i tendent uniformément dans tout domaine D' entièrement intérieur à D, vers la fonction harmonique dans D et égale à f sur la frontière de D.*

Faisons une première remarque; opérons sur f' comme sur f, cela nous donne $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$. Il est évident que si, dans tout D, on a $|f' - f| < \varepsilon$, on aura aussi, quel que soit i, $|\varphi'_i - \varphi_i| < \varepsilon$. Cela montre qu'il suffit de légitimer la méthode pour les polynômes $f(x, y)$.

Alors l'intégrale $I(f)$ est finie et l'on a:

$$I(f) \geqq I(\varphi_1) \geqq I(\varphi_2) \geqq \cdots;$$

cependant nous ne sommes pas dans les conditions où le théorème du Chapitre III s'applique, parce que les fonctions φ_i ne sont pas nécessairement monotones. Des raisonnements analogues vont cependant servir.

Soit un ensemble Π de points partout dense dans D, et soit $\psi_1, \psi_2, \ldots$ une suite de fonction φ_i convergeant pour les points de Π. Alors dans tout domaine ne contenant aucun point frontière des D_i, les ψ_i convergent uniformément vers une limite harmonique. Il n'y a doute que pour les arcs $\alpha\beta$ de frontières des D_i et encore n'y a-t-il pas doute si l'on peut trouver des valeurs de j aussi grandes qu'on le veut telles que, dans les balayages effectués pour obtenir ψ_j, après le dernier balayage du domaine D_i de frontière $\alpha\beta$, se trouvent des balayages de domaines contenant $\alpha\beta$ à leur intérieur.

Rangeons les arcs douteux $\alpha\beta$ en suite simplement infinie. Soit $\alpha\beta$ le premier, soit d^i le dernier domaine contenant $\alpha\beta$ qui soit balayé avant qu'on obtienne ψ_i et soit ψ'_i la fonction que donnait ce balayage. On peut de la suite des ψ_i extraire une suite:

$$\psi_1, \quad \psi_{i_{1,1}}, \quad \psi_{i_{1,2}}, \quad \ldots,$$

telle que les $\psi'_{i_{1,p}}$ correspondantes convergent pour tous les points de Π, auquel cas elles convergent uniformément dans tout domaine ne contenant pas d'autres points frontières des D_i que certains des points de $\alpha\beta$. Mais il n'y a peut être pas convergence uniforme en α et en β qui sont des sommets.

La convergence uniforme sur $\alpha\beta$ à partir de α ne fait de doute que si α appartient à la frontière de d^i. Supposons que le dernier balayage avant d^i d'un domaine contenant α soit le balayage d'un certain domaine contenant α à son *intérieur* et qu'il donne la fonction $\psi''_{1,i}$; on pourra encore, en supprimant certains des ψ supposer que les $\psi''_{1,i}$ convergent pour tous les points de Π. Il est vrai qu'il est supposé que le balayage considéré venant avant d^i ne soit pas le balayage du domaine D_i limité par $\alpha\beta$, mais l'examen de ce cas ne présente pas de difficultés, si en remontant dans la suite des balayages comme il est indiqué l'on ne retombe pas constamment sur les deux mêmes domaines d^i, D_i. Or, cela supposerait que α soit point frontière, cas laissé de côté momentanément.

On peut donc supposer que pour la suite

$$\psi_1, \quad \psi_{i_{1,1}}, \quad \psi_{i_{1,2}}, \quad \ldots,$$

extraite de la suite des ψ_i, il y a convergence uniforme autour de tout point de $\alpha\beta$. $\gamma\delta$ étant le second arc douteux, nous extraierons, de la suite précédente,

$$\psi_1, \quad \psi_{i_{1,1}}, \quad \psi_{i_{2,2}}, \quad \psi_{i_{2,3}}, \quad \psi_{i_{2,4}}, \ldots$$

convergeant uniformément autour des points de $\alpha\beta$ et de $\gamma\delta$, etc.; on arrivera à la suite

$$\psi_1, \quad \psi_{i_{1,1}}, \quad \psi_{i_{2,2}}, \quad \psi_{i_{3,3}}, \ldots$$

convergeant uniformément dans tout domaine entièrement intérieur à D.

Il suffit de démontrer que la limite est harmonique dans D et prend les valeurs données sur D.

18. Je démontre le premier point. Si la limite ψ n'était pas harmonique, il y aurait un arc $\alpha\beta$ de frontière d'un D_i, de part et d'autre duquel ψ serait harmonique, ces deux fonctions harmoniques n'étant pas le prolongement l'une de l'autre. Soient $\psi^1, \psi^2, \ldots$ les fonctions que donnent, dans la suite des balayages considérés, les balayages de D_i, $\psi'^1, \psi'^2, \ldots$, les fonctions qu'ont transformées ces balayages; ψ''^i désignera celle des fonctions $\psi_{p,p}$ qui est identique à ψ^i ou qui la suit le plus immédiatement possible dans la suite des fonctions données par les balayages. D'ailleurs, si à $\psi^p, \psi^{p+1}, \ldots \psi^{p+k}$ correspondaient des fonctions ψ'' identiques, nous barrerions dans la suite des ψ^i les fonctions $\psi^p, \psi^{p+1}, \ldots \psi^{p+k-1}$. Alors ψ''^i et ψ^i sont identiques, autour de $\alpha\beta$; ψ'^i et ψ^i sont identiques à l'extérieur de D_i au voisinage de $\alpha\beta$, je dirai à l'extérieur de $\alpha\beta$. Pour i assez grand, ψ^i et ψ'^i diffèrent à l'intérieur de $\alpha\beta$ et le maximum de $|\psi^i - \psi'^i|$ dans l'ensemble d, ne contenant pas de points frontière des D_k et formé des points intérieurs à D_i d'un seul tenant avec un point Z de $\alpha\beta$, ne descend pas au dessous d'une certaine limite ε. Donc $|\psi^i - \psi'^i|$ est au moins égale à ε en certains points de la frontière de d, lesquels n'appartiennent évidemment pas à la frontière de D_i. ψ^i tend sur la frontière de D_i vers la fonction ψ; nous pouvons d'ailleurs supposer que les ψ'^i tendent aussi vers une limite déterminée à l'intérieur de D_i en laissant de côté certains des $\psi_{p,p}$. Alors chaque balayage considéré de D_i modifie ψ'^i d'au moins $\frac{\varepsilon}{2}$ pour un arc fixe $\lambda\mu$ de la frontière de d.

Posons $\psi'^i = \psi^i + v^i$; nous avons, dans D_i,

$$I(\psi'^i) = I(\psi^i) + 2\int\int_{D_i} \Delta(\psi^i, v^i)\,dx\,dy + I(v^i),$$

ψ^i correspondant au minimum; donc, à la limite, $\Delta(\psi^i, v^i)$ a une intégrale nulle et par suite

$$I(\psi'^i) - I(\psi^i) = I(v^i);$$

v^i est une fonction nulle sur la frontière de D_i égale au moins à $\frac{\varepsilon}{2}$ sur $\lambda\mu$; donc sur les segments intérieurs à D_i des parallèles à Ox qui rencontrent $\lambda\mu$, v^i a une oscillation au moins égale à $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où, pour $I(v^i)$, une limite inférieure α non nulle et indépendante de i.

Chacun des balayages considérés de D_i diminue l'intégrale I étendue à D d'au moins α; cela est impossible puisque $I(f)$ est finie.

19. La limite ψ est donc harmonique dans tout domaine intérieur à D; je dis qu'elle tend vers f sur la frontière de D. En effet, les $\psi_{p,p}$ sont telles que, étendues à D, les intégrales $I(\psi_{p,p})$ soient bornées, de plus les $\psi_{p,p}$ ayant une limite harmonique à l'intérieur de D sont telles que leurs défauts de monotonie tendent vers zéro dans tout domaine entièrement intérieur à D, par suite (Chapitre III, remarque 3) les $\psi_{p,p}$ convergent vers une fonction continue à l'intérieur de D et sur sa frontière.

Ainsi certaines des fonctions fournies par nos balayages convergent uniformément dans tout domaine D' entièrement intérieur à D, vers la solution ψ du problème de Dirichlet; il faut montrer que toutes les fonctions fournies par les balayages tendent uniformément vers ψ dans D'. Cela résulte de ce que la limite de ces fonctions, étant solution du problème de Dirichlet, est unique, et de notre théorème fondamental.

En terminant, je ferai remarquer que la démonstration prendrait une forme très simple, si l'on se bornait dans l'étude de la méthode alternée au cas classique de deux contours fermés n'ayant que deux points en commun. D'ailleurs, même pour ce cas nous gagnons en généralité, puisqu'il n'y a plus besoin de s'occuper de la valeur des angles sous lesquels les deux contours se coupent. On se débarrasse ainsi d'une restriction qui, comme l'on sait, est parfois gênante et nécessite des discussions spéciales; mais d'autre part, nous avons dû faire certaines restrictions sur la nature des parties de chacun des contours qui est intérieure à l'autre; par exemple, nous avons supposé que ces parties sont de mesure nulle; la méthode de M. Schwarz dispensait de ces hypothèses. Cependant ces hypothèses ne sont guère gênantes, la méthode alternée n'étant avantageuse que si les domaines D_i sont assez simples pour que le problème de Dirichlet se résolve facilement pour chacun d'eux.

Poitiers, le 3 juin 1907.

H. Lebesgue.