

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE. BAND X.

---

*I. Ueber Töne, die durch eine begrenzte Anzahl von Impulsen erzeugt werden; von W. Kohlrausch.<sup>1)</sup>*

---

Die Frage nach der Tonwirkung einer begrenzten Anzahl von Wellen wurde schon von Seebeck<sup>2)</sup> gelegentlich berührt und ist in neuerer Zeit von Pfaundler<sup>3)</sup>, S. Exner<sup>4)</sup> und Auerbach<sup>5)</sup> eingehender behandelt worden. Die zwei erstgenannten Arbeiten fragen nach der Minimalzahl der Schwingungen, die überhaupt einen wahrnehmbaren Ton erzeugt, während die letzten diejenige Schwingungszahl suchen, die dem Tone seine volle Charakteristik bezüglich der Tonhöhe gibt.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, diese beiden Fragen durch Erweiterung einer jeden miteinander zu verknüpfen.

Ein bestimmtes Ohr möge im Stande sein, die Töne zweier Tonquellen von gegebener Klangfarbe bei einem gewissen Intervalle derselben eben noch als verschieden zu erkennen. Wir wollen die Frage stellen, wie gross dieses Intervall sei, wenn die eine Tonquelle eine beschränkte Anzahl von Schwingungen macht, während die andere andauernde, also völlig scharf definirte Töne gibt, und ob sich dieses für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen der einen Tonquelle charakteristische Intervall mit der Tonhöhe

---

1) Ueber die Resultate dieser Untersuchung wurde auf der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Baden-Baden im September 1879 berichtet.

2) Seebeck, Pogg. Ann. **53**. p. 417. 1841.

3) Pfaundler, Wien. Ber. **76**. p. 561. 1877.

4) S. Exner, Pflüger's Archiv. **13**. p. 228. 1876.

5) Auerbach, Wied. Ann. **6**. p. 591. 1879. u. a. a. O.

ändere. Für unsere Zwecke muss also zunächst ein Apparat hergestellt werden, der einen Ton von beliebiger Tonhöhe und von beliebiger Schwingungsanzahl liefert. Der nächstliegende Gedanke, Tonquellen plötzlich zu erregen und nach der gewünschten Anzahl von Schwingungen zu dämpfen — s. S. Exner's oben citirte Arbeit — ist wegen der Unsicherheit der Dämpfung schwierig ausführbar. Andererseits würde ein Zahnrad — von Seebeck und Pfaundler wurden ähnliche Vorrichtungen verwendet — mit einer bestimmten Anzahl von Zähnen an einer Stelle des Umfangs den Ton zu oft wiederholen und dadurch die Beurtheilung beeinflussen, abgesehen von der Schwierigkeit, die die Herstellung einer beliebigen, aber constanten Rotationsgeschwindigkeit bietet.

Der einfachste und geeignetste Weg scheint darin zu bestehen, dass man ein Pendel mit einem Stück Zahnrad, dessen Radius gleich der Pendellänge ist, von bestimmter Höhe fallen und durch Anschlagen der Zähne an ein Kartenblatt die gewünschte Anzahl von Impulsen erzeugen lässt.

Der verwendete Apparat. Eine 3 m lange Stange aus Tannenholz von  $30 \times 50$  mm Querschnitt ist an einem breiten Lederriemen<sup>1)</sup> *a* (Tafel I Fig. 1) an der Zimmerdecke aufgehängt und unten bei *e* mit 6 Kilo beschwert. Seitlich ist eine Nase *c* angeschraubt, über welche der am Brett *b* auf und ab verstellbare Haken *d* greift. Das Brett ist an einer mit ca. 120 Kilo beschwerten Kiste festgeschraubt, und der durch eine Feder emporgedrückte Haken *d* kann vom Platze des Beobachters aus leicht und ohne Geräusch herabgezogen und dadurch das aufgehakte Pendel ausgelöst werden. Unten am Pendel ist ein Blech *h* mit den Schrauben *f* und *gg* befestigt, welche, auf ein Stück hartes Holz *i* drückend, durch dasselbe das Blech fest an die Pendelstange pressen. An dem mit dem Pendel concentrischen Rande des Blechs sind 31 Löcher im Abstände

---

1) Die Aufhängung an einem Riemen bewirkt allerdings eine starke Dämpfung, lässt aber das Pendel sehr ruhig schwingen, während es, an Stahlfedern aufgehängt, bei grossen Fallhöhen stets zitterte. Auch brachen die Federn nach kurzem Gebrauch.

von je 1 cm gebohrt. Ein anderes etwas längeres Blech, welches statt des ersten angeschraubt werden kann, trägt 24 Löcher im Abstände von 2 cm. Mit Schrauben und Muttern lassen sich Zähne  $k$  (Taf. I Fig. 2) auf das Blech festschrauben. Der Rand  $l$  der Zähne befindet sich unten senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels.

Senkrecht unter dem Pendel ist die aus Holz gefertigte Vorrichtung (Taf. I Fig. 3) am Fussboden festgeschraubt. Der Schlitten  $m$  lässt sich in einem Schwalbenschwanz zwischen den Leisten  $n$  vor- und rückwärts schieben und schlägt bei  $o_1$  und  $o_2$  beiderseits an; die schleifenden Federn  $p$  geben ihm leichte, aber sichere Führung. Der Schlitten trägt auf einer vermittelt der Schraube  $q$  höher und tiefer stellbaren elastischen Holzleiste  $r$  zwei Holzwangen  $s$ , und zwischen diesen halten die Flügelschrauben  $tt$  ein Stück einer Karte  $u$ . Durch Keile  $v$  aus Kautschuck oder Kork, die unter die im Schlitten befestigten Kniestücke  $w$  gesteckt werden, nachdem die Holzleiste und mit ihr die Karte in die gewünschte Höhe gestellt ist, wird seitliches Wackeln oder Schwingen der Holzleiste beim Anschlagen der Zähne an die Karte vermieden.

Steht der Schlitten bei  $o_2$  an, so streifen die Zähne des Pendels die Karte an deren oberem Rande, beim Anschlag an  $o_1$  gehen die Zähne frei hinter der Karte vorbei. Eine ähnlich wie dieser Schlitten verschiebbare Vorrichtung mit zwei in bestimmter Entfernung voneinander feststellbaren Contacthebeln, die in Quecksilbernäpfe tauchen und von einem Fortsatz des fallenden Pendels ausgelöst werden, erlaubt, die Geschwindigkeit des Pendels in unmittelbarer Nähe seiner tiefsten Lage durch Zeitmessung mittelst des Hipp'schen Chronoskops zu bestimmen. Der constante Fehler des Chronoskops wird durch Combination von Messungen bei verschiedenen Abständen der Contacthebel eliminirt.

Versuchsanordnung. Die Zähne werden zunächst nach einer am untern Rande der Blechs angebrachten Centimetertheilung auf dem Blech so angeschraubt, dass sie alle gleich weit über den Rand des Blechs vorstehen. Die Löcher sind so weit gebohrt, dass die Schrauben in ihnen den zur Einstellung nöthigen Spielraum haben. Dann werden die

Zähne mittelst eines feinen Stellzirkels möglichst genau auf den gewünschten Abstand — 2, 3 oder 4 cm — eingestellt und controlirt, sodass ein Fehler von 0,1 mm in der Einstellung der Zähne keinenfalls überschritten wird.

Mit der Schraube  $f$  wird demnächst das Blech am Pendel mässig angezogen und um  $f$  durch Klopfen so gedreht, dass alle Zähne gleichzeitig bei allmählichem Heben der Schraube  $q$  die Karte eben zu berühren beginnen. In dieser Stellung wird das Blech festgeschraubt und endlich die Karte so gestellt, dass der Ton deutlich und mit möglichst wenig Nebengeräusch entsteht.

Den Hauptimpuls gibt die Karte, wenn sie von einem Zahne losgelassen wird, während das Anschlagen der Zähne kaum zu hören ist. Deshalb wirkt der vom ersten Zahn mitgetheilte Impuls nicht störend, was geschehen müsste, wenn beim Anschlagen der Hauptimpuls entstände; denn der erste Zahn trifft die ruhende, die folgenden die schon bewegte Karte.

Das Pendel gab die besten Töne, wenn es mit dem Rande der Zähne voran, also wie der Pfeil in Taf. I Fig. 1 läuft, die Karte streifte; dementsprechend sind also die Zähne gestellt.

Der Abstand je zweier Zähne wurde nicht kleiner als 2 cm genommen. Eine Aenderung der Tonhöhe bei einer und derselben Fallhöhe liess sich durch Vergrösserung dieses Abstandes auf 3, 4 und 5 cm erreichen, sodass also in gewissen Grenzen eine bestimmte Tonhöhe nicht an eine bestimmte Fallhöhe gebunden ist.

Um die Geschwindigkeit  $v_h$  der Zähne im tiefsten Punkte aus der Fallhöhe zu bestimmen, wird zunächst durch Vergleich mit einem Fadenpendel der Schwingungspunkt des Pendels ermittelt, an dem Brett  $b$  die Höhe der tiefsten Lage des Schwingungspunktes markirt und die Fallhöhe desselben bei aufgehaktem Pendel gemessen. Die letztere und das Verhältniss der Abstände des Schwingungspunktes und der Zahnränder vom Pendeldrehpunkt geben  $v_h$ .

Die mit dem Chronoskop bestimmten Geschwindigkeiten stimmten mit den  $v_h$  innerhalb der Genauigkeit des Chrono-

skops gut überein. Andererseits ergibt sich noch einmal aus der Tonhöhe des Pendeltones und dem Abstände der Zähne die Geschwindigkeit  $v_n$  der Zähne im tiefsten Punkt.

Man liess nun, um nach der Handbewegung beim Auslösen des Pendels die zum Sammeln der vollsten Aufmerksamkeit für die Beobachtung nöthige Zeit zu haben, das Pendel erst auf seinem ersten Rückgange an die Karte anschlagen. Infolge dessen wird  $v_n$  im Mittel um ca. 2,2 Proc. kleiner als  $v_n$ .

Als zweite Tonquelle, welche die Vergleichstöne lieferte, diente ein Monochord. Eine Messingsaite von 1500 mm Länge war so gestimmt, dass bei der Einstellung des Steges auf den Theilstrich 375 mm der Ton des kürzern Theils der Saite dem einer Stimmgabel von 261 Schwingungen in der Secunde möglichst gleich war. Die Länge der Saite, die diesen Ton wirklich gibt, wird sodann durch häufige Versuche bestimmt und aus dieser Länge unter Berücksichtigung des empirisch durch einer Reihe König'scher Stimmgabeln ermittelten Einflusses der Steifigkeit und Ungleichmässigkeit der Saite die Tonhöhe der bei den Versuchen benutzten Vergleichstöne berechnet.

**Beobachtungsmethode.** Für einen bestimmten Abstand  $\alpha$  der Zähne sei ihre volle Zahl an dem Blech angesetzt, und auf dem Monochord, dessen Scala während der Einstellung dem Auge des Beobachters an der abzulesenden Stelle durch den Steg verdeckt ist, wird, unter Abdämpfung des zweiten Saitentheils mittelst eines leichten Tuches, der Ton gesucht, der noch eben von dem des Pendels als höher zu unterscheiden ist. Das Monochord erregt dabei ein leiser Anschlag mit einem leichten Lederhammer. Man vergleicht die Töne, indem man entweder das tönende Monochord kurz ehe der Ton des Pendels kommt, abdämpft oder es während desselben weiterklingen lässt, oder endlich indem man es unmittelbar nach ihm anschlägt, bis die richtige Stellung des Steges gefunden ist. Ebenso wird der eben als tiefer erkennbare Ton des Monochords bestimmt und beide Bestimmungen abwechselnd gewöhnlich dreimal wiederholt. Das Verhältniss der Schwingungszahlen des so beobachteten er-

kennbar tiefern zu der des erkennbar höhern Tones nennen wir das „charakteristische Intervall“ — kurz „ch. J.“ — für die betreffende Zahnzahl. Das was wir „ch. J.“ nennen, ist also das doppelte des Intervalls, welches zwei für das Ohr noch eben unterscheidbaren Töne bilden. Unter folgeweisem Abschrauben der äussersten Zähne wiederholte man für jede Zahnzahl dasselbe. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe wurde die Saitenlänge, welche 261 Schwingungen gab (s. p. 5) bestimmt.

Fehlerquellen. Es liegt in der gestellten Aufgabe, dass eine gewisse Subjectivität der Beurtheilung des „ch. J.“, ganz abgesehen von der Versuchsanordnung, unvermeidlich ist. Diese zeigte sich zunächst dadurch, dass es vieler Versuchsreihen bedurfte, um zu einigermassen constanten Resultaten zu gelangen. Jedoch die Curven, die man sich mit der Anzahl der angewandten Zähne als Abscissen und dem beobachteten „ch. J.“ als Ordinaten construirt, haben bei der ersten Versuchsreihe schon dieselbe Form, wie bei den endgültigen; also nicht die Aenderung des „ch. J.“ mit der Zahnzahl, sondern nur sein absoluter Werth änderte sich mit zunehmender Uebung und Sicherheit der Beobachtung. Dabei muss ich erwähnen, dass das geringste Geräusch im Zimmer oder in der Umgebung eine normale Beobachtung unmöglich macht. Deshalb mussten alle Beobachtungen nachts angestellt werden. Schlagen von Stadtuhren, Sprechen auf der Strasse u. dgl. störte selbst bei geschlossenen Fenstern eine sichere Einstellung des Steges. Das zu Anfang störende schnarrende Geräusch der Zähne lernt man leicht überhören, wenn die Kante gut eingestellt ist.

Eine weitere Schwierigkeit bietet die Nothwendigkeit, alle Eigentöne der am Pendel befindlichen oder mit der Karte verbundenen Theile des Apparates abzdämpfen, die beim Anschlagen der Zähne an die Karte entstehen und gelegentlich den zu beobachtenden Ton verstärken oder modificiren könnten. Durch Anschlagen der einzelnen Theile mit dem Lederhammer suchte man diese Töne auf und machte die wenigen, die sich bei den mannichfachen Verschraubungen etc. der Theile des Apparates doch noch erkennen liessen,

durch Einstopfen von Zeug u. dgl. in Zwischenräume, Belasten der betreffenden Holztheile etc. möglichst unschädlich, bis man keine Eigentöne bei neuem Klopfen wieder fand. An dem Kartenstück, das ca. 20 mm breit war und 12—15 mm aus den es haltenden Holzwangen hervorragte, waren keine Eigentöne zu erkennen, die in den Bereich der beobachteten Tonhöhen gefallen wären. Der Eigenton des elastischen Holzstreifens, der die Wangen für die Karte trug, war, wie pag. 3 erwähnt, durch Kautschukeinlagen unterdrückt. Das Blech verlor durch Aufschrauben einer Holzleiste (s. Taf. I Fig. 1) seinen Eigenton vollständig. Die dann etwa noch vorhandenen Eigentöne können die Resultate bei Anwendung von vier und mehr Zähnen nur wenig beeinflussen, da sie an Stärke gegen die zu beobachtenden Töne verschwinden. Liess man das Pendel mit z. B. nur fünf Zähnen bei jedem Rückgang die Karte streifend ausschwingen, so ergab sich bei dem ganz allmählichen Sinken des Tones nie eine durch etwaige Resonanz des Apparates erzeugte Verstärkung an einer Stelle der Tonreihe.

Die unvermeidlichen kleinen Fehler in der Einstellung einzelner Zähne werden das „ch. J.“ umsomehr beeinflussen, je kleiner das beobachtete „ch. J.“ ist; aber ihr Einfluss muss immer klein bleiben, da das „ch. J.“ im allgemeinen grösser als 0,992, d. h. die beobachteten Intervalle zwischen dem Tone des Pendels und dem des Monochords nicht kleiner als 0,996 werden.<sup>1)</sup>

Eine weitere Fehlerquelle ist die, dass die Fallhöhe, also auch die Geschwindigkeit des Pendels eine andere ist, wenn die ersten und letzten Zähne, als wenn die mittelsten die Karte streifen, d. h. dass der Pendelton selbst vom Anfang zur Mitte sich erhöht und zum Schluss wieder vertieft. Das Intervall, das der zu Anfang des Blechs entstehende Ton mit dem von der Mitte erregten bildet, ist berechnet und wird in der Tabelle unter  $\Delta v_1$  angegeben werden. Dasselbe wird bei der grössten Zahnzahl und der kleinsten Fallhöhe den grössten Einfluss haben.

1) Man vergleiche über diesen Punkt auch Seebeck's oben citirte Arbeit.

Ferner wird durch das Streifen der Zähne an der Karte die Geschwindigkeit der Pendelbewegung — abgesehen von der eben besprochenen Erhöhung und Vertiefung — abnehmen, während der Ton entsteht. Um das Intervall, durch welches infolge dieses Umstandes der Ton während seiner Dauer sinken wird, ungefähr schätzen zu können, liess man zunächst das Pendel bei jedem Rückgang anstreifend schwingen, bis es die tiefere Octave des Anfangstones erreichte. Dazu seien bei 16 Zähnen 40 Doppelschwingungen nöthig; liess man es jetzt 36mal frei hin- und hergehen, dann anstreifen, so kam man beim 42. Rückgange des Pendels zur Octave. 36maliges Anstreifen des Pendels hat hier also ein Intervall von 20:21 bewirkt.

Da es sich nun zeigte, dass mit abnehmender Geschwindigkeit der verzögernde Einfluss durch das Anstreifen sehr bedeutend zunahm, so muss das durch einmaliges Anstreifen verursachte Intervall hier jedenfalls viel kleiner als 721:720 sein. Da jedoch kein sicherer Anhaltspunkt für die Grösse des so gemachten Fehlers zu finden ist, so sind einfach die in dieser Weise überschlagenen Intervalle des Tones zu Anfang und zu Ende des Anstreichens für 16 Zähne in der Tabelle unter  $\Delta v_2$  angegeben. Der Einfluss dieser letzten beiden Fehlerquellen macht sich bei einer der angeführten Beobachtungsreihen — s. die eingeklammerten Zahlen von Nr. 7 — der Tabelle bemerkbar.

Resultate. Ich lasse zunächst die Zusammenstellung der Resultate in einer Tabelle folgen. In der zweiten bis neunten Spalte (vertical) gibt die erste Reihe (horizontal) die Fallhöhe  $h$ , die zweite den Abstand  $\alpha$  benachbarter Zähne, die dritte die Tonhöhe des Pendeltones, wie sie sich als Mittel aus den Mitten aller Grenzen des „ch. J.“ für die verschiedenen Zahnzahlen ergibt. Diese Mitten, ausgedrückt in Schwingungszahlen, sind bei sonst gleichen Umständen und bei fünf und mehr Zähnen niemals um mehr als 0,2 Proc. von ihrem Mittel verschieden. Ferner gibt die vierte Reihe die aus dem Zahnabstand und der Tonhöhe gefundene Geschwindigkeit  $v_n$ , die fünfte die aus der Fallhöhe berechnete



Geschwindigkeit  $v_h \left( \frac{m}{sec} \right)$  im tiefsten Punkt, die sechste und siebente  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  (cf. p. 7. 8). Die achte Reihe enthält die Zahl, welche die zeitliche Aufeinanderfolge der Versuchsreihen bezeichnet, die 9. bis 23. Reihe endlich die „ch. J.“ für die in gleicher Reihe in der ersten Spalte angegebenen Zahnzahlen. Zu den „ch. J.“ jeder Versuchsreihe gehören die in denselben Spalten oben verzeichneten anderen Grössen. Die zehnte Spalte enthält die Mittel der „ch. J.“ je für dieselben Zahnzahlen — hier sind die eingeklammerten Zahlen aus dem oben p. 8 angeführten Grunde ausser Acht gelassen —, die elfte Spalte die nach später anzuführender Methode berechneten „ch. J.“ und die zwölfte die Fehler der beobachteten gegen die berechneten Werthe.

$h$	986	800	751	453	800	238	453	453	—	—	—
$\alpha$	20	20	20	20	30	20	30	40	—	—	—
$n$	244,2	221,5	212,3	164,1	147,3	120,5	110,4	81,4	—	—	—
$v_n$	4,88	4,43	4,25	3,28	4,42	2,41	3,31	3,26	—	—	—
$v_h$	4,98	4,49	4,35	3,38	4,49	2,45	3,38	3,38	—	—	—
$\Delta v_1$	0,9983	0,9979	0,9977	0,9963	0,9979	0,9928	0,9963	0,9963	—	—	—
$\Delta v_2$	0,9990	0,9989	0,9988	0,9980	0,9989	0,9950	0,9980	0,9980	—	—	—

„Charakteristische Intervalle“.

Nr.	6	1	8	3	2	7	5	4	Mittel	ber. ch. J.	Fehler
$z = 2$	0,9732	0,9639	0,9731	0,9726	0,9681	0,9737	0,9741	0,9727	0,9714	0,9582	+ 0,0132
3	—	0,9791	0,9788	0,9773	0,9778	0,9797	0,9803	0,9798	0,9790	0,9763	+ 0,0027
4	0,9811	0,9809	0,9836	0,9816	0,9826	0,9823	0,9836	0,9808	0,9821	0,9823	- 0,0002
5	0,9843	0,9844	0,9846	0,9858	0,9855	0,9860	0,9871	0,9844	0,9853	0,9853	± 00
6	0,9860	0,9871	0,9858	0,9871	0,9876	0,9878	0,9882	0,9868	0,9871	0,9872	- 01
7	0,9874	0,9884	0,9867	0,9866	0,9887	0,9887	0,9899	0,9896	0,9883	0,9884	- 01
8	0,9899	0,9886	0,9876	0,9892	0,9915	0,9900	0,9904	0,9903	0,9897	0,9892	+ 05
9	0,9899	0,9888	0,9891	0,9907	0,9915	0,9906	0,9915	—	0,9903	0,9899	+ 04
10	0,9913	0,9893	0,9896	0,9912	0,9894	0,9898	0,9928	—	0,9906	0,9904	+ 02
11	0,9911	0,9900	0,9900	0,9913	0,9901	0,9899	0,9926	—	0,9909	0,9908	+ 01
12	0,9912	0,9894	0,9907	0,9910	—	(0,9889)	—	—	0,9906	0,9911	- 05
13	0,9914	0,9901	0,9910	0,9931	—	(0,9891)	—	—	0,9914	0,9914	± 00
14	0,9906	0,9903	0,9914	0,9927	—	(0,9893)	—	—	0,9913	0,9916	- 03
15	0,9898	0,9921	0,9922	0,9921	—	(0,9893)	—	—	0,9916	0,9918	- 02
16	0,9914	0,9931	0,9922	0,9920	—	(0,9896)	—	—	0,9922	0,9920	+ 02

In der Tabelle sind von etwa 25 überhaupt angestellten Versuchsreihen die acht letzten vollzählig gegeben. Die „ch. J.“ sind nur bis zu 16 Zähnen mitgetheilt, da mit dem

grössern Blech (s. p. 3) auch bei den bezüglich  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  möglichst günstigen Bedingungen ein weiteres Abnehmen der „ch. J.“ nicht zu erreichen war. Es sind demnach hier, wohl infolge der Unvollkommenheit des Pendeltones, die kleinsten beobachteten Intervalle  $\frac{249}{250}$ , während ich beim Vergleich von Monochord und Stimmgabel Tonhöhenunterschiede im Intervalle von  $\frac{499}{500}$  noch sicher erkannte. Die mit mehr als 16 Zähnen erreichten Werthe schwankten unregelmässig um den zu 16 Zähnen gehörigen oder wurden, wie dies bei Nr. 7 schon von 12 Zähnen an sicher der Fall ist, infolge der  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  wieder grösser. Daraus folgt zunächst, dass hier im Einklang mit Hrn. Exners Beobachtung (derselbe fand 17, l. c.) von 16 Impulsen an die Charakteristik eines Tones bezüglich seiner Tonhöhe nicht mehr zunimmt.

Was die berechneten Werthe der „ch. J.“ anlangt, so geht aus Helmholtz „Lehre von den Tonempfindungen“ folgendes für die vorliegenden Beobachtungen hervor. Denken wir uns den Eigenton einer aus der Reihe der Corti'schen Fasern angegeben, so wird infolge des Mitschwingens diese selbst die grösste Amplitude haben, die benachbarten um so kleinere, je weiter sie symmetrisch nach beiden Seiten in der Reihe von der stärkst schwingenden entfernt liegen. Wenn nun nach zwei Schwingungen des die Corti'schen Fasern zum Mitschwingen erregenden Tones die beiderseits  $n$ te Faser mit  $\frac{1}{x}$  der Intensität der mittelsten stärkst erregten schwingt, so schwingt nach Helmholtz nach drei Schwingungen die  $\frac{n}{2}$ te mit derselben Intensität  $\frac{1}{x}$ , nach vier Schwingungen die  $\frac{n}{3}$ te, .... nach  $m$  Schwingungen die  $\frac{n}{m-1}$ te.

Demnach wird die Vertheilung der Amplituden der durch den dauernden Monochordton in den Corti'schen Fasern erregten Schwingungen stets die gleiche sein.

Unter der an sich wahrscheinlichen Annahme nun, dass ein und dasselbe Ohr im Stande ist, den Monochordton dann von demjenigen des Pendels zu unterscheiden, wenn die in-

folge des Monochordtones stärkst schwingende Faser durch den Pendelton zu einem bestimmten Bruchtheil der Amplitude erregt wird, mit der die durch den Pendelton am stärksten erregte Faser schwingt, so müssten auch unsere „ch. J.“ stets gleich sein dem „ch. J.“ für zwei Schwingungen dividirt durch die um 1 verminderte Zahnzahl.<sup>1)</sup> Dann hätte man jedoch bei einer beliebig grossen Zahnzahl ein beliebig kleines — beliebig der Einheit sich näherndes — „ch. J.“ zu erwarten, welches, wie oben erwähnt, hier nicht erreicht wird, auch bei gleicher Klangfarbe beider zu vergleichenden Töne nie erreicht werden kann. Aber es wird für ein bestimmtes Ohr und zwei Töne von gegebener Klangfarbe, folglich auch für unseren Pendelton und Monochordton, ein kleinstes „ch. J.“ geben, welchem man sich etwa auf Grund der Helmholtz'schen Formel mit wachsender Zahnzahl immer mehr nähern müsste. Wenn es also erlaubt ist, dieses „kleinste ch. J.“ für die Vergleichung zweier Töne von gegebener Klangfarbe als Einklang aufzufassen, so müssten die Ueberschüsse, wenn ich mich so ausdrücken darf, der beobachteten „ch. J.“ über das „kleinste ch. J.“ dem Helmholtz'schen Gesetze folgen. Mit anderen Worten, diese Ueberschüsse, multiplicirt je mit der ihnen zukommenden um 1 verminderten Impulszahl, müssten ein constantes Product geben. Da aber die Beobachtung infolge der p. 6—8 erörterten „Fehlerquellen“ dieses „kleinste ch. J.“ nicht liefern kann, so ist es durch Rechnung oder auch graphisch zu ermitteln. Für den Werth 0,9944 des „kleinsten ch. J.“ — womit also das dem Ohre unerreichbare Grenzwert zu 0,9972 wird — werden diese Producte wirklich sehr nahe constant, nur für  $z=3$  und  $z=2$  werden sie aus später zu erörternden Gründen zu klein. Die in der Tabelle in der elften Spalte angeführten Werthe der „ch. J.“ wurden nun so gefunden, dass man das Mittel der constanten Producte je durch die um 1 verminderte Zahnzahl dividirte und zu dem „kleinsten ch. J.“, welches man

1) Wir nennen, dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entsprechend, das Intervall 1:2 halb so gross als 1:4, und ebenso 0,996 halb so gross als 0,992.

gleich 0,9944 setzte, addirte. Durch die Schwierigkeit der Beobachtung sind wohl die geringen Abweichungen der beobachteten von den berechneten Werthen genügend gerechtfertigt. Den Grund für die schlechte Uebereinstimmung bei  $z = 3$  und  $z = 2$  glaube ich trotz aller Vorsicht in dem Pendeltöne nahe liegenden schwachen Eigentönen des Apparates, die die selbst schwachen Pendeltöne von zwei und drei Zähnen verstärkten und verlängerten, um so mehr suchen zu dürfen, weil, während bei fünf und mehr Zähnen, wo die Pendeltöne noch stark sind, die Aenderung ihrer Schwingungszahlen, wie p. 9 erwähnt, 0,2 Proc. nie überstieg, sie bei drei Zähnen 1 Proc., bei zwei Zähnen gelegentlich 3 Proc. erreicht. Die Anwendbarkeit der Helmholtz'schen Formel vorausgesetzt, würde also für drei und 2 Zähne der berechnete Werth der „ch. J.“ der wahrscheinlichere sein.

Ein Blick auf die Tabelle veranlasst noch zu folgenden Bemerkungen. Man sieht, wie trotz der grossen Zahl der vorausgegangenen nicht mitgetheilten Beobachtungsreihen mit zunehmender Nummer in der achten Reihe, also durch fortgesetzte Uebung in der Beurtheilung die Intervalle im Mittel immer noch etwas abnehmen. Ausserdem scheint es, und hauptsächlich die graphische Darstellung der einzelnen Curven macht dies wahrscheinlich, dass mit abnehmender Schwingungszahl  $n$  — die Beobachtungsreihen sind in der Tabelle nach abnehmenden Schwingungszahlen geordnet — die „ch. J.“ ebenfalls um ein wenig abnehmen. Das würde vielleicht dahin zu deuten sein, dass bei abnehmender Schwingungszahl  $n$  der Ton der gleichen Zahnzahl  $z$  dem Ohre eine grössere Zeit zur Vergleichung des Pendeltöne mit dem Monochordtone zur Verfügung stellt und es ihm dadurch ermöglicht, kleinere Tonhöhenunterschiede noch aufzufassen. Ich lege jedoch auf diesen Umstand um so weniger Gewicht, da die tieferen Töne häufig auch bei grossen Fallhöhen durch grössere Zahnabstände erzeugt wurden, sodass die kleineren „ch. J.“ der tieferen Töne auch eine Folge der verhältnissmässig kleineren Fehler in der Zahneinstellung sein können.

Das Resultat der vorliegenden Arbeit dürfte als eine

mindestens annähernde experimentelle Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie des Mitschwingens der tonempfindenden Organe im Ohre aufzufassen sein; es dürfte ferner feststellen, dass ein Ton von absolut genommen zwei Schwingungen in den Grenzen der beobachteten Tonhöhen von einem andauernden Tone jedenfalls dann als verschieden erkennbar ist, wenn er mit demselben ein Intervall von  $\frac{24}{25}$  <sup>1)</sup> bildet, und dass schliesslich in genügender Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Hrn. S. Exner und Hrn. Auerbach für ein Ohr von mittlerer Feinheit in Auffassung der Tonhöhen die mögliche Schärfe in der Definition der Höhe eines Tones nicht mehr merklich zunimmt, nachdem 16 Schwingungen desselben vergangen sind.

Physikal. Institut der Univ. Strassburg, Aug. 1879.

## II. *Ueber die Torsion* <sup>2)</sup>; von E. Warburg.

§ 1. Die vorliegende Untersuchung über die Torsion von Metalldrähten wurde ursprünglich unternommen in der Absicht, eine von mir entwickelte Theorie <sup>3)</sup> zu prüfen, in welcher ich die Hypothese, ein fester Körper bestehe aus beliebig gestalteten, gleichartigen Molecülen, in ihre Consequenzen verfolgte. Da ich indessen in dieser Theorie vorerst einen guten Leitfaden für die experimentelle Untersuchung nicht gefunden habe, so ziehe ich es vor, die Resultate der Versuche ohne Rücksicht auf die genannte Theorie darzustellen.

In dem von mir zur Untersuchung der Torsionselasticität benutzten Apparat wird das Torsionsmoment eines Drahtes

1) Vergl. Wied. Ann. 7. p. 336. 1879.

2) Ausführlicher mitgetheilt in den Freib. Ber. 7. p. 444—499. 1880.

3) Freib. Ber. 7. p. 225—59. 1878. — Wied. Ann. 4. p. 232—49.