B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Cauchy begründete die Infinitesimalrechnung wieder durch die von Lagrange verlassene Methode der Grenzen, indem er glaubte, dass nur sie die erforderliche Strenge darbiete. Die Klarheit und Eleganz seiner Darstellung bewirkte, dass sie sich immer mehr verbreitete und endlich allgemein angenommen wurde. Wenn auch erhebliche Mängel derselben aufgedeckt wurden, so hat sich doch bisher gezeigt, dass sie sich durch consequente Entwickelung von Cauchy's Principien in dem Sinne, dass ausschliesslich arithmetische Betrachtungen benutzt werden, beheben lassen.

Einige Jahre bevor Cauchy durch Veröffentlichung eines Theiles seiner Vorlesungen über Infinitesimalrechnung seinen Ansichten in weiten Kreisen Eingang verschaffte, hatte schon Bernhard Bolzano (geb. zu Prag 1781, gest. ebenda 1848) in einer Reihe von Abhandlungen die Grundbegriffe derselben vielfach *übereinstimmend mit ihm, aber auch in wichtigen Punkten vollständiger als er* entwickelt. Wenn auch Bolzano's Darstellung gegenüber den neueren Forschungen nicht immer haltbar erscheint, so erhebt sie sich doch an vielen Stellen zu einer ungewöhnlichen Klarheit und Sicherheit. Bolzano's Arbeiten geriethen bald in Vergessenheit und erst lange nach seinem Tode fanden seine Leistungen auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung die verdiente Würdigung. H. Hankel erkennt ihm die Priorität vor Cauchy in der richtigen Auffassung der Lehre von den unendlichen Reihen zu*) und Hr. H. A. Schwarz bezeichnet ihn als den Urheber einer von Hrn. Weierstrass weiter entwickelten Schlussweise**), wovon in III. die Rede sein soll.

Der Zweck dieser Zeilen besteht darin, die Bolzano im Gegensatz zu Cauchy eigenthümlichen Definitionen und Sätze über die Prin-

---

X *) Allg. Encyklopädie von Ersch und Gruber 1. sect. B. 90 (1871) Artikel: „Grenze" § 19.

**) Borchardt J. Bd. 74, (1872) p. 221, Note.

cipien der Infinitesimalrechnung übersichtlich zusammenzustellen und zu beleuchten, um zur Vergleichung derselben mit den gegenwärtig von vielen Mathematikern getheilten Ansichten*) anzuregen. Da der Wortlaut mathematischer Definitionen über ihren Sinn nicht immer vollständigen Aufschluss giebt, so musste Sorge getragen werden, denselben aus der Anwendung unzweifelhaft festzustellen. Folgende Werke Bolzano's wurden für diesen Aufsatz benutzt:

1) *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. 1. Lief. Prag, 1810 (= Bt.)*

2) *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag 1816 (= L.)*

3) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigtens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag 1817 (= B.)*

4) *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig 1817 (= P.)*

5) *Dr. Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Příhonsky. Leipzig 1851 (= Pr.)*

Die „Beiträge", welche über den Begriff und die Eintheilung der Mathematik, sowie über die mathematische Methode handeln, bieten für meine Aufgabe wenig dar.**)

Die Abhandlung über den binomischen Lehrsatz ist bereits auf die arithmetische Methode gegründet, die sich hier an manchen Stellen strenger dargestellt findet als bei Cauchy. Aus ihr ist aber schon die Grenze ersichtlich, bis zu welcher Bolzano in der Benutzung seiner Grundgedanken fortgeschritten ist. Sowie Cauchy, blieb auch ihm der *Begriff der gleichmässigen Convergenz der Grenzwerthe von Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen* unbekannt.***)

Eine bedeutende Erscheinung in der mathematischen Litteratur

---

*) Man findet sie zusammengestellt in U. Dini's Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878.

**) Geschichtlich bemerkenswerth ist, dass p. 147 die Addition zweier ganzer Zahlen mittelst des Gesetzes der Associativität für die Summe $a+(b+1)=(a+b)+1$ in derselben Weise durchgeführt wird, wie sie Hankel (Theorie d. complexen Zahlensysteme p. 37) nach Grassmann entwickelt.

***) Ueber diesen Begriff vgl. Dini l. c. p. 102, 397. Bekanntlich wurde die ungleichmässige Convergenz von Reihen von Hrn. Seidel bemerkt. Hr. Weierstrass zeigt in seinen Vorlesungen zuerst die hervorragende Wichtigkeit des erwähnten Begriffes für die ganze Analysis.

bildet die dritte Abhandlung, während die vierte nicht jene Wirkung ausgeübt hat, welche der Verfasser davon erwartete. Alle genannten Schriften sind dadurch ausgezeichnet, dass sie von einer ebenso unbefangenen, als scharfsinnigen Prüfung der einschlägigen Leistungen der älteren Litteratur ausgehen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehe ich zur Darlegung von Bolzano's Ansichten im Einzelnen über.

I. Gleichheit zweier Zahlen.

Lehrsatz (L. § 27): „Wenn in der Gleichung $A + \omega = B + \omega^1$ die Grössen ω, ω^1 so klein werden können, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben: so muss genau $A = B$ sein.“

Die häufige Anwendung dieses Satzes, nicht der Satz selbst, der nur die arithmetische Formulirung des Principes der Exhaustionsmethode und die Ausdehnung desselben auf die relativen Zahlen bildet, ist für Bolzano's Darstellung charakteristisch (vgl. L. p. XVI, § 28, 64. B. § 7).

II. Veränderliche Grössen.

Eine Grösse, die alle möglichen Werthe zwischen zwei gegebenen annehmen kann, heisst nach B. p. 49 „frei veränderlich“, eine Grösse, die ohne alle Werthe anzunehmen doch in der Umgebung eines jeden ihr zukommenden Werthes Werthe annimmt, welche von denselben beliebig wenig abweichen, heisst „stetig veränderlich.“ (vgl. B. p. 11, 49). — Im Folgenden werden diese heute nicht mehr üblichen Bezeichnungen meist gebraucht.*)

III. Obere Grenze einer Veränderlichen.

Lehrsatz. „*Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Grösse x, wohl aber allen, die kleiner sind als ein gewisser u, zukommt, so giebt es allemal eine Grösse U, welche die grösste derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, dass alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.*“ (B. p. 41.)

Ueber diesen Satz, der mit einem strengen und vollständigen Beweise versehen ist, bemerkt Bolzano mit Recht (B. p. 48):

„Vorstehender Lehrsatz ist von der grössten Wichtigkeit, . . . Statt seiner hatte man sich bisher nicht selten des falschen Satzes bedient:

---

*) Eine Grösse der ersten Art heisst jetzt stetig veränderlich; die Werthe einer Grösse der zweiten Art heissen im Intervalle (a, b) *überall-dicht* (nach Hrn. G. Cantor diese Annalen Bd. XV, p. 2) oder *pantachisch* (nach Hrn. P. du Bois-Reymond l. c. Bd. XV, p. 287) vertheilt.

„*Wenn eine Eigenschaft M nicht von allen x, wohl aber von allen, die kleiner als ein gewisses sind, gilt: so giebt es jederzeit irgend ein grösstes x, welchem die Eigenschaft M zukommt.*"

Dies, sage ich, ist zufolge des soeben Erwiesenen *falsch*. Denn giebt es irgend eine Grösse U, welche die grösste derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, dass alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M an sich haben*): so giebt es darum sicher *kein grösstes x*, dem diese Eigenschaft zukommt, *wenn anders x eine entweder frei oder doch stetig veränderliche Grösse ist.*" ...

„Man denke sich, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, eine rechtwinklige Hyperbel, und nehme eine ihrer Asymptoten zur Abscissenlinie und nicht den Mittelpunkt c, sondern was immer für einen anderen Punkt a in dieser Asymptote, der die Entfernung D von c hat, zum Anfangspunkte der Abscissen an. Erklären wir nun die Richtung ac für die positive der Abscissen und die Richtung ab, welche die rechtwinklige Ordinate des Punktes a hat, für die positive der Ordinaten: so wird von jeder Abscisse, die kleiner als eine gewisse, z. B. kleiner als $\frac{1}{2}D$ ist, die Eigenschaft gelten, dass ihr eine positive Ordinate entspricht. Gleichwohl wird diese Eigenschaft (M) nicht von allen positiven Abscissen gelten, namentlich nicht von solchen, die grösser als D sind. Giebt es nun wohl hier eine grösste Abscisse, einen grössten Werth von x, welchem die Eigenschaft M zukommt? Keineswegs; wohl aber giebt es ein U d. h. eine Abscisse, welche die grösste unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, dass alle kleineren als sie positive Ordinaten haben, d. h. die Eigenschaft M besitzen. Diese Abscisse nämlich ist $+D$."

Die Grösse U heisst nach Weierstrass die *obere Grenze* aller Werthe von x, denen die Eigenschaft M zukommt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die durch die Eigenschaft M definirte Variabele hier als frei oder doch stetig veränderlich angenommen wird. Sieht man davon ab, so lautet der Satz bekanntlich: „Liegen sämmtliche (unbegrenzt viele) Werthe einer Veränderlichen x unter einer endlichen Zahl A, so giebt es eine und nur eine endliche Zahl U von der Eigenschaft, dass keiner der Werthe x sie überschreitet, dass aber mindestens ein Werth von x vorhanden ist, dessen Unterschied von U weniger beträgt, als irgend eine beliebig kleine positive Zahl ε" (vergl. Dini l. c. p. 19).

Auf das Verfahren, wodurch Bolzano die Existenz der Grösse U nachweist**), bezieht sich die oben angeführte Bemerkung des Hrn. Schwarz.***)

---

*) Offenbar ist dabei angenommen: U selbst hat nicht die Eigenschaft M.

**) Dieses Verfahren, welches mit dem von Duhamel (Des méthodes dans les sciences de raisonnement II. p. 413) und von Darboux (Mém. sur les fonctions discontinues — Ann. de l'Éc. Normale 2. sér. T. IV.) zu demselben Zwecke gebrauchten übereinstimmt, leistet, wenigstens im Allgemeinen, *die Berechnung der Grösse U nicht*. Es liegt ihm keine weitere Voraussetzung zu Grunde, als dass eine jede unendliche Menge von Zahlen zwischen gegebenen Grenzen in eine fortlaufende Reihe geordnet werden könne.

***) Hr. Schwarz hatte die Güte mir dies auf die von mir geäusserte Vermuthung mitzutheilen.

Die Wichtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes wird schon dadurch dargelegt, dass er zum Beweise des Satzes führt, dass eine Function $f(x)$, welche, während x sich z. B. wachsend dem *Grenzwerthe* a nähert, mit x beständig wächst, dabei aber unter einer endlichen Zahl bleibt, einen endlichen Grenzwerth für $\lim x = a - 0$ haben muss.

IV. Convergenz von Reihen aus reellen Gliedern.

Unter den Reihen, deren Werth (d. h. die Grösse, die durch Summirung ihrer Glieder entsteht), soweit man sie fortsetzen mag, eine gewisse Grösse nie überschreitet, ist besonders merkwürdig folgende Classe:

[B. § 6.] „Wenn man den Werth, welchen die Summe der ersten n, $n+1 \cdots n+r$ Glieder einer $\cdots$ Reihe hat, der Ordnung nach durch $F^n x$, $F^{n+1} x, \cdots, F^{n+r} x$ bezeichnet, so stellen die Grössen

$$F^1 x,\ F^2 x,\ \cdots,\ F^n x,\ \cdots,\ F^{n+r} x$$

nun eine *neue* Reihe vor. . . . Diese hat . . . die besondere Eigenschaft, dass der Unterschied, der zwischen ihrem n^{ten} Gliede $F^n x$ und jedem späteren $F^{n+r} x$, es sei auch noch so weit von jenem n^{ten} entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse bleibt, wenn man erst n gross genug angenommen hat.“ . . .

Den Sinn dieser Eigenschaft erklärt die von Bolzano gegebene Erörterung über die geometrische Reihe (B. § 5, L. § 22). Verlängert man die Reihe $a + ae + ae^2 + \cdots + ae^r$ noch um s Glieder, so ist der Zuwachs

$$ae^{r+1} + ae^{r+2} + \cdots + ae^{r+s} = ae^{r+1}\,\frac{1-e^s}{1-e}.$$

Wenn nun e seinem absoluten Werthe nach unter 1 liegt, so verbleibt dieser Zuwachs, wenn man erst r hinlänglich gross genommen hat, kleiner als jede gegebene Grösse, *wie gross auch s hinterher anwachsen mag.* Denn er ist immer kleiner als $2ae^{r+1} : (1-e)$. Es ist aber für $\pm e = \frac{1}{1+u}$ $(u > 0)$ $\pm e^r < D$, sobald man $r > \left(\frac{1}{D} - 1\right) : u$ nimmt.

Wenn schon die vorstehende Auseinandersetzung über die *nothwendige* Bedingung der Convergenz unendlicher Reihen präciser zu sein scheint als die bezüglichen Erklärungen Cauchy's (C. d'Analyse p. 125), so zeigt sich Bolzano's volles Verständniss dieses Gegenstandes durch den folgenden Satz, welcher die hinreichende Bedingung der Convergenz ausspricht.

[B. § 7.] „Wenn eine Reihe von Grössen

$$F^1 x,\ F^2 x,\ \cdots,\ F^n x,\ \cdots,\ F^{n+r} x \cdots$$

von der Beschaffenheit ist, dass der Unterschied zwischen ihrem n^{ten} Gliede $F^n x$ und jedem späteren $F^{n+r} x$, sei dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse verbleibt, wenn man n gross genug angenommen hat: so giebt es jedesmal eine gewisse *beständige* Grösse und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt."*)

Der a. a. O. vorgetragene Beweis zeigt zwar nur, dass die Annahme, es sei für $F^n(x)$ bei $\lim n = +\infty$ *ein* endlicher Grenzwerth X vorhanden, auf keinen Widerspruch stösst. — Der Beweis lässt sich leicht führen mit Hülfe der von Hrn. P. du Bois Reymond**) erfundenen Unbestimmtheitsgrenzen von $F^n x$ bei $\lim n = +\infty$. Dass hier beide endliche Zahlen $O \geqq U$ sein müssen, erhellt sofort. Es entspricht aber jeder positiven Zahl ε eine Zahl μ, so dass für alle $n > \mu$ $U - \varepsilon < F^n < O + \varepsilon$; und wenn m irgend eine ganze Zahl $> \mu$ bezeichnet, so muss es mindestens zwei Zahlen, k, l grösser als m geben, wofür $F^k > O - \varepsilon$, $F^l < U + \varepsilon$. Da nun zufolge Voraussetzung angenommen werden kann, dass für $n > \mu$ auch sei

$$F^n - \varepsilon < F^{n+r} < F^n + \varepsilon \quad (r = 1, 2 \cdots)$$

so folgt, wenn zuerst $n = k$, hierauf k selbst an Stelle von m gesetzt und demnach $l > k$ angenommen wird, $O - 2\varepsilon < U + \varepsilon$ oder $O \leqq O - U < 3\varepsilon$ d. i. $O = U$. Der gemeinsame Werth dieser Zahlen ist der Grenzwerth $\lim\limits_{n=+\infty} F^n$.***)

Was insbesondere die *binomische* Reihe, die Bolzano nur für reelle Werthe des Argumentes und Exponenten betrachtet, betrifft, so besteht seine Leistung in dem strengen Beweise des Satzes, dass das Product zweier binomischen Reihen zu den Exponenten p, q die binomische Reihe zum Exponenten $p + q$ sei (L. § 38—42).†) — Die Behauptung (L. § 46), dass die binomische Reihe für einen rationalen Exponenten $\frac{n}{m}$ sich beim Grenzübergange $\lim \frac{n}{m} = i$, worin i eine irrationale Zahl bedeutet, die binomische Reihe zum Exponenten i zum Grenz-

*) Hankel, der Bolzano's öfters anerkennend gedenkt, glaubt (l. c. § 4—8) vorstehenden Satz zuerst aufgestellt zu haben. Offenbar war ihm die Abhandlung B. nicht zugänglich. — Sein Beweis des Satzes scheint mir indess auch nicht haltbar. Er will zeigen, dass unter Voraussetzung der Relation, es gehöre zu jedem $\sigma > 0$ eine positive Zahl ε von der Art, dass für $0 < \delta < \varepsilon$ $|f(a+\delta) - f(a+\varepsilon)| < \sigma$, die Annahme unmöglich sei, dass für $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ kein Grenzwerth vorhanden sei. Dann könnte allerdings, was immer die Constante A sein mag, zu dem beliebigen σ keine Zahl ε gehören, sodass für $\delta < \varepsilon$ stets $|f(a+\delta) - A| < \sigma$ wäre. Aber wenn er dann $f(a+\varepsilon) = A$ setzt, so lässt er ausser Acht, dass $f(a+\varepsilon)$ eben keine Constante ist, sondern durch ε von σ abhängt.

**) Neue Lehrsätze über die Summe unendlicher Reihen. *Antrittsprogramm* etc. p. 3.

***) Einen anderen Beweis des in Rede stehenden Satzes giebt Hr. Dini l. c. p. 27.

†) Ueber die Litteratur dieses Satzes vgl. Lacroix Complément des élémens d'Algèbre IV. édition 1817 p. 163.

werthe habe, erfordert noch den übrigens leicht zu erbringenden Nachweis, dass die binomische Reihe, in welcher das Argument einen constanten absolut genommen unter 1 liegenden Werth erhält, bezüglich aller zwischen zwei rationalen Grenzen μ, ν gelegenen Werthe des Exponenten gleichmässig convergire.

V. Stetige Functionen.

(B. p. 11.) „Nach einer *richtigen Erklärung* . . versteht man unter der Redensart, *dass eine Function fx für alle Werthe von x, die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-fx$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.* . . .“ *)

Um den Sinn dieser Erklärung festzustellen, betrachte man den Beweis des Satzes (B. p. 56):

„Jede Function von der Form $a+bx^m+cx^n+\cdots+px^r$, in welcher $m, n\cdots r$ ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine *nach dem Gesetze der Stetigkeit* veränderliche Grösse.“

„Beweis. Denn wenn sich x in $x+\omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar =

$$b[(x+\omega)^m-x^m]+c[(x+\omega)^m-x^m]+\cdots+p[(x+\omega)^r-x^r];$$

eine Grösse, von der sich leicht darthun lässt, dass sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn . . . (es) ist diese Grösse =

$$\omega\left\{\begin{array}{l} mbx^{m-1}+m\,\frac{m-1}{2}\,bx^{m-2}\,\omega+\cdots+\omega^{m-1}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ +rpx^{r-1}+r\,\frac{r-1}{2}\,px^{r-2}\,\omega+\cdots+\omega^{r-1}\end{array}\right\}.$$

. . . Bezeichnen wir . . . durch S die Grösse, die herauskommt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des (in den Klammern enthaltenen) Ausdruckes für ein bestimmtes ω z. B. ω^1 annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerlei Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe ω^1 hat, gewiss nicht $> S$, derjenige aber, den er für jedes *kleinere* ω annimmt, sicher $< S$. Verlangt man daher, dass die Veränderung, welche die Function $a+bx^m+cx^n+\cdots+px^r$ erfährt, $< D$ ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $<\omega^1$ und auch $< D:S$ ist: so wird $\omega\cdot S$ und umsomehr das Product aus ω in eine Grösse, die $< S$ ist, $< D$ sein müssen.“

Aus diesem Beispiele erhellt, dass Bolzano's Definition genau Folgendes besagt: $f(x)$ heisst in der Umgebung des Werthes x stetig, wenn jeder beliebigen, noch so kleinen positiven Zahl D eine von

---

*) Der Schluss lautet bestimmter; „wenn man ω klein genug nimmt;“ wie Bolzano sonst sagt (L. p. 34, B. p. 57).

Null verschiedene positive Zahl δ entspricht, so dass die Differenz $f(x+\omega)-f(x)$ absolut genommen kleiner ist als D für *alle* Werthe von ω, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als D (vgl. *Dini* l. c. p. 46). Dass aber $f(x+\omega)$ *alle* Werthe zwischen $f(x)$ und $f(x)\pm D$ annimmt, ist in dieser Definition keineswegs ausgesprochen.

Mit Hülfe vorstehender Erklärung der Stetigkeit und des Satzes in III. leitet Bolzano (B. p. 51) den *Lehrsatz* ab:

„Wenn sich zwei Functionen von x, fx und φx entweder für *alle* Werthe von x oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, *nach dem Gesetze der Stetigkeit* ändern; wenn ferner $f\alpha < \varphi\alpha$ und $f\beta > \varphi\beta$ ist: so giebt es jedesmal einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $fx = \varphi x$ wird."*)

Und er bemerkt treffend (B. p. 12):

„Dass ... die stetige Function niemals zu einem höheren Werthe gelange, ohne erst alle niedrigeren durchgegangen zu sein d. h. dass $f(x+n\Delta x)$ jeden zwischen fx und $f(x+\Delta x)$ liegenden Werth annehmen könne, wenn man n nach Belieben zwischen 0 und $+1$ nimmt: das ist wohl eine sehr *wahre* Behauptung, aber sie kann nicht als *Erklärung* des Begriffes der Stetigkeit angesehen werden**), sondern ist vielmehr ein *Lehrsatz* über denselben und zwar ein solcher, der sich nur erst nach Voraussetzung des (eben erwähnten) Satzes beweisen lässt. . . . Aus dieser allgemeinen Wahrheit nämlich ergiebt sich jene erstere Behauptung in dem besonderen Falle, wo die Function $\varphi(x)$ in eine constante Grösse M übergeht."

Die Abhandlung P. (§ 1—6) giebt weitere Sätze über die stetigen Functionen. Der erste derselben (§ 2.) kann auf folgenden Satz zurückgeführt werden: „Sind zwei Functionen $F(x)$, $F'(x)$ für *alle* Werthe von x im Intervalle $a \cdots a+h (h>0)$ eindeutig definirt und in der Umgebung von $x=a$ stetig, weiss man ferner, dass der Unterschied $F(x)-F'(x)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner gemacht werden kann als jede beliebige Zahl, wenn man nur x hinlänglich nahe an a nimmt, so folgt nothwendig $F(a)=F'(a)$." In der That es sei $F(a)=A$, $F'(a)=A'$ und ε eine gegebene positive Zahl, so hat man $|F(x)-A| < \varepsilon$, $|F'(x)-A'| < \varepsilon$ für alle x zwischen a und $a+\delta$, wenn δ eine *positive* hinlänglich kleine Zahl bezeichnet. Da aber auch $|F(x)-F'(x)| < \varepsilon$, wenn nur x hinlänglich nahe an a liegt, so folgt $|A-A'| < 3\varepsilon$ d. i. $A=A'$. Aus

*) Bekanntlich lieferte auch Cauchy (Cours d'Analyse p. 460) einen strengen Beweis desselben Satzes. Dabei wird zugleich die Berechnung der Werthe gelehrt, wofür $f(x)-\varphi(x)=0$.

**) Sie wäre dazu nicht einmal ausreichend, wie Darboux l. c. bemerkt hat. Man nehme nur $f(0)=0$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$.

dem vorstehenden Satze ergiebt sich nun der folgende: „Wenn sich die Function $f(x)$ für *alle* Werthe des Intervalles $a \cdots a+h$ stetig ändert; wenn man ferner von der Grösse X so viel weiss, dass sie für die eben genannten Werthe von x *ausser* $x=a$ aus den Werthen von $f(x)$ dergestalt herleitbar sei, dass sich zwar vielleicht die Regel dieser Herleitung bei einer Variation von $f(x)$ gleichfalls ändert, aber doch immer nur nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit von solcher Art, dass die Aenderung von X kleiner als jede gegebene Zahl zu werden vermag, wenn man die Variation von $f(x)$ klein genug macht; und wenn endlich X für $x=a$ definirt und stetig ist: so ist der Werth, den X für $x=a$ annimmt, blos aus dem Werthe $f(a)$ bestimmbar.“ *)

Hier ist X eine zusammengesetzte Function von $x: X=\varphi(f(x)) = F(x)$. Ersetzt man aber $f(x)$ durch eine *beliebige* andere stetige Function $f'(x)$, für welche jedoch $f'(a)=f(a)$ sei, so erhält man $X'=\varphi'(f'(x))=F'(x)$. Die Functionen $F(x)$, $F'(x)$ genügen nun vollständig den oben vorausgesetzten Bedingungen; denn es soll sein $|F(x)-F'(x)|<\varepsilon$, wenn nur $|f(x)-f'(x)|<\varrho$ d. i. für alle $(x-a)<\delta$. Somit ist $F(a)=F'(a)$.

Es ist klar, dass sich an dem Satze nichts ändert, wenn die Grösse X aus den Werthen einer *endlichen Anzahl* von stetigen Functionen $f_0(x)$, $f_1(x) \cdots f_n(x)$ in ähnlicher Weise herleitbar ist (P. § 3.). Denn man hat zufolge Voraussetzung $|F(x)-F'(x)|<\varepsilon$, wenn nur $|f_r(x)-f_r'(x)|<\varrho_r$ $(r=0, 1 \cdots n)$. Und da letztere Ungleichung besteht für alle $|x-a|<\delta_r$, so findet man sicher $|F(x)-F'(x)<\varepsilon$ für alle $|x-a|<\delta$, unter δ die kleinste der Zahlen $\delta_0 \delta_1 \cdots \delta_n$ verstanden.

Indess wird, entgegen der Ansicht Bolzano's, der in Rede stehende Satz nicht mehr unbedingt gelten, wenn die Anzahl der Functionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, durch welche X bestimmt ist, in's Unendliche wächst. Dass die Zahlen $\delta_0 \delta_1 \cdots$ in inf. eine von 0 verschiedene untere Grenze haben, bildet vielmehr eine *neue Annahme*. Daher wird denn auch der folgende Satz, auf welchen es Bolzano vornehmlich ankommt, nicht ohne Einschränkung gebraucht werden können:

(P. § 5.) „Wenn sich $f(x)$ für *alle* Werthe $0 \cdots h$ stetig ändert; wenn man ferner von der Grösse $X=F(x)$ soviel weiss, dass sie für alle eben erwähnten Werthe von x *ausser* $x=0$ *aus allen denjenigen Werthen bestimmbar sei, welche die Function* $f(mx)$ *annimmt, falls man*

*) Der Kürze wegen citire ich hier und im folgenden Satze nicht genau wörtlich, sondern stelle den Wortlaut so, wie er von Bolzano zufolge des Contextes gemeint war.

für m in ihr jeden denkbaren echten Bruch, 0 *und* 1 *mitgerechnet*, setzet, wobei überdies das schon oben beschriebene Gesetz der Stetigkeit befolgt wird, und wenn endlich X für $x = 0$ definirt und stetig ist*): so ist auch der zu $x = 0$ gehörige Werth von X bloss durch den Werth $f(0)$ bestimmbar."

Sicher richtig wird dieser Satz unter folgender Voraussetzung sein. Ersetzt man $f(x)$ durch eine beliebige stetige Function $f'(x)$, für welche jedoch $f'(0) = f(0)$ sei, so möge $F(x)$ in $F'(x)$ übergehen. Dann soll zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gehören, so dass $| F(x) - F'(x) | < \varepsilon$, wenn $| f(mx) - f'(mx) | < \delta$, *gleichviel welchen Werth m zwischen* 0 *und* 1 *erhalten mag.* Jetzt hat man nämlich zufolge der Stetigkeit von $f(x)$ und $f'(x)$ $|f(mx) - f'(mx)| < \delta$, wenn nur x seinem absoluten Betrage nach hinlänglich klein ist, so dass auf $F(x)$ und $F'(x)$ der oben gezeigte Hilfssatz angewendet werden kann.

VI. Ueber die Differenzirung unendlicher Reihen.

Grosse Wichtigkeit legt Bolzano (vgl. L. p. XVI) dem folgenden Satze (L. p. 29) bei:

„Lehnsatz. Wenn eine Function von x, von beliebig vielen, aber nur nach bestimmtem Gesetze zu bildenden Gliedern, $F^r x$, die Eigenschaft hat, dass sie entweder für alle x, oder doch für alle, die innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, blos durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl r so klein werden kann, als man nur immer will; wenn ferner $f^r x$ eine zweite Function von ebenso beliebiger Gliederzahl bedeutet, die von der ersten auf solche Art abhängt, dass zwischen beiden für jeden innerhalb a und b liegenden Werth von x die Gleichung stattfindet:

$$\frac{F^r(x+\omega) - F^r x}{\omega} = f^r x + \Omega, \tag{1}$$

worin Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn es ω werden kann: so behaupte ich, auch die Function $f^r x$ besitze die Eigenschaft, dass sie für eben dieselben Werthe von x, wie $F^r x$, so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man ihre Gliedermenge r gross genug annimmt."

Wie in IV., so bezeichnet auch hier $F^r(x)$ die Summe der $r+1$ Anfangsglieder einer unendlichen Reihe; man kann also setzen

$$F^r(x) = \sum_0^r {}^n \varphi_n(x), \qquad f^r(x) = \sum_0^r {}^n \varphi_n'(x)$$

*) Bei Anwendung dieses Satzes hat Bolzano, wie auch schon P. p. 2 angegeben ist, nur die Stetigkeit von $F(x)$ für alle Werthe $0 \ldots h$ gefordert. Diese Bedingung ist sicherlich nicht einmal gleichbedeutend mit der, dass $\lim [F'(x) - F(x)] = 0$ sei für $\lim x = 0$. Dass er auf den Nachweis dieser Relation für die variirten Functionen später z. B. in VII. nicht eingeht, bildet eine fühlbare Lücke in seinen Demonstrationen.

und dabei annehmen, $\varphi_n(x)$ sei für die Werthe $a \leq x \leq b$ eine stetige Function von x, wodurch $F^r(x)$, wie Bolzano nach (1) bemerkt, eine stetige Function von x wird. Dann kann der vorstehende Satz auch so ausgesprochen werden: „Hat eine unendliche Reihe, deren Glieder für alle $a \leq x < b$ stetige Functionen von x sind, für diese Werthe durchaus die Summe 0 und besitzen ihre Glieder sämmtlich Differentialquotienten, so hat auch die aus denselben gebildete unendliche Reihe für jeden der bezeichneten Werthe die Summe 0." Dieser Satz ist jedoch bekanntlich nicht immer richtig; er besteht aber, falls man weiss, *dass die Reihe* $\varphi_0'(x) + \varphi_1'(x) + \cdots +$ *für alle* $a < x \leqq b$ *convergirt und zwar gleichmässig.* Wenn diese Reihe convergirt für die genannten Werthe von x und ausserdem *eine stetige Summe* $f(x)$ besitzt, so gilt der Satz auch noch im Falle, dass die Reihe *nur im Allgemeinen gleichmässig convergirt.* Damit ist nach Herrn Dini (l. c. p. 102) gemeint, dass die gleichmässige Convergenz nur besteht, nachdem aus dem Intervalle (a, b) eine endliche Anzahl von Intervallen, deren jedes beliebig klein angenommen werden kann, ausgeschieden worden ist*). Bolzano hat indess seinen in drei Theile zerfallenden Beweis so angelegt, dass derselbe sich ohne Mühe zu einem Beweise des berichtigten Satzes ergänzen lässt.

1. Zunächst wird der Mittelwerthsatz abgeleitet

$$\frac{F^r(x+\omega) - F^r(x)}{\omega} = f^r(\xi^r), \tag{2}$$

worin $\xi^{(r)}$ einen mittleren Werth zwischen x und $x + \omega$ bezeichnet, der natürlich nicht allein von diesen Zahlen, sondern auch von dem Zeiger r abhängt.

---

*) Ist keine dieser Bedingungen erfüllt, so kann der Satz seine Giltigkeit verlieren. Setzt man z. B.

$$\varphi_0(x) = -\operatorname{arctan} x \qquad \varphi_n(x) = \frac{\operatorname{arctan} x\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\operatorname{arctan} x\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \qquad (n = 1;\ 2 \cdots),$$

so ist für jedes endliche x $\sum_0^\infty {}^n\, \varphi_n(x) = 0$ und für $x \gtrless 0$ auch $\sum_0^\infty {}^n\, \varphi_n'(x) = 0$;

dagegen für $x = 0$ hat die letztere Reihe die Summe -1.

Durch Ausserachtlassung der Bedingung, dass $\Sigma\varphi_n'(x)$ mindestens convergiren müsse, wurde Bolzano zur unrichtigen Ansicht geführt (L. p. 47), dass die binomische Reihe für $x = \pm 1$ nie den Werth von $(1 + x)^n$ geben könne, es sei denn n eine ganze positive Zahl oder Null.

Auch Bolzano's berichtigter Satz löst jedoch nicht vollständig das Problem der Differenzirung unendlicher Reihen und ist nicht identisch mit dem Satze, den Herr Dini (l. c. p. 115) zeigt. Denn übertragen auf die Gleichung $F(x) - \Sigma\varphi_n(x) = 0$, verlangt er, dass die Existenz des Differentialquotienten von $F(x)$ bekannt sei.

2. Lässt man in (2) r zur Grenze $+\infty$ übergehen, so folgt gemäss den Voraussetzungen

(3) $$\lim_{r=+\infty} f^r(\xi^r) = 0 \quad \text{d. i.} \quad |f^r(\xi^r)| < D \quad \text{für} \quad r > M.$$

Nun aber kann man nicht ohne Weiteres behaupten, dass zwischen x und $x+\omega$ ein Werth ξ vorhanden sei, wofür $\lim\limits_{r=+\infty} f^r(\xi) = 0$ sei. Es folgt jedoch leicht, wenn die *gleichmässige* Convergenz der Reihe $\varphi_0'(x) + \varphi_1'(x) + \cdots = f(x)$ gefordert wird, dass *für die Unbestimmtheitsgrenzen der Function* ξ *bei* $\lim r = +\infty : \xi \gtreqq \xi'$ *in der That* $f(\xi) = f(\xi') = 0$ *sei.*

Man findet nämlich bei gleichmässiger Convergenz vorstehender Reihe, dass zu jeder positiven Zahl D eine Zahl $\Delta > 0$ gehöre, so dass für jeden Werth $a < \xi < b$

(4) $$|f^r(\xi+i) - f^r(\xi)| < D \quad \text{für alle} \quad |i| < \Delta^{*)}.$$

Ist ξ die obere Unbestimmtheitsgrenze von ξ^r für $\lim r = +\infty$, so entspricht der Zahl Δ eine positive Zahl R, so dass für *alle* $r > R$ $\xi^r < \xi + \Delta$, dass aber, wenn s irgend eine ganze Zahl grösser als R bedeutet, mindestens eine ganze Zahl $k \geqq s$ vorhanden sein muss, wofür $\xi^k > \xi - \Delta$. Nimmt man $s > M$ an, so folgt demnach nach (3) und (4)

$$|f^k(\xi^k)| < D, \quad |f^k(\xi^k) - f^k(\xi)| < D.$$

Und da wegen der Convergenz der Reihe $\Sigma\varphi_n'(\xi)$

$$|f^k(\xi) - f(\xi)| \leq D,$$

wenn nur s auch noch grösser als m vorausgesetzt wird, so ergiebt sich

$$|f(\xi)| < 3\,D \quad \text{d. i.} \quad f(\xi) = 0.$$

3. Die Function $f(x)$ ist zufolge der in 2. gemachten Voraussetzung *eine stetige Function von x* für alle x im Intervalle (a, b) (Dini l. c. p. 109). Da in jedem Intervalle $x, x+\omega$ mindestens ein

---

*) Nach Voraussetzung existirt, was immer x für ein Werth im Intervalle (a, b) sein möge, eine ganze Zahl m, so dass

$$\left|\sum_{r+1}^{r+s} \varphi_n'(x)\right| < \frac{1}{3} D \quad \text{für } r \geqq m,$$

wobei s jede beliebige ganze positive Zahl sein kann. Setzt man

$$f^{m+s}(x+i) - f^{m+s}(x) = (f^m(x+i) - f^m(x)) + \sum_{m+1}^{m+s} \varphi_n'(x+i) - \sum_{m+1}^{m+s} \varphi_n'(x)$$

und bedenkt, dass für alle $|i| < \Delta_1$ $|f^m(x+i) - f^m(x)| < \frac{1}{3} D$, so folgt

$$|f^{m+s}(x+i) - f^{m+s}(x)| < D \quad |i| < \Delta_1.$$

Daraus ergiebt sich dann von selbst die Relation (4).

Werth $x = \xi$ sich befindet, wofür $f(x) = 0$ ist, so ist sie für alle Werthe $a < \alpha \leq b$ Null. In der That ist $|f(\alpha) - f(x)| < D$ für alle $\alpha < x < \alpha + A = \beta$. Zwischen α und β ist aber ein Werth $\mathfrak{x}$ vorhanden, wofür $f(\mathfrak{x}) = 0$. Somit folgt $|f(\alpha)| < D$ d. i. $f(\alpha) = 0$*).

VII. Die Rectification der Curven.

Die Schrift P. enthält einen Versuch, die Probleme der Rectification, Complanation und Cubirung zu lösen ohne Hülfe der Axiome des Archimedes, und was das erstere, auf das wir uns hier beschränken, betrifft, auch ohne Voraussetzung des Satzes, dass das Verhältniss von Bogen und Sehne sich bei unbegrenzter Abnahme des ersteren (richtiger: der letzteren) dem Grenzwerthe 1 nähere. Die meisten Geometer vor Bolzano hatten mit Archimedes als Grundsatz angenommen, dass von zwei convexen Linien, die auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Sehne liegen, die umschlossene die kleinere sei**). Mit der Forderung, dass diese und die ähnlichen Annahmen nur Folgerungen aus der Rectificationsformel sein sollten, befand sich Bolzano vollkommen im Rechte; nur verfuhr er nicht radical genug. Denn er betrachtete noch die Länge einer stetigen Linie ohne Weiteres *als eine Grösse* (P. p. 34) d. i. nach Bt. p. 4 als „etwas, welches durch Zahlen bestimmt werden kann".***) Schon aus diesem Grunde kann sein Versuch heute nur mehr historisches Interesse beanspruchen. Es sind aber auch die übrigen Annahmen, auf welche Bolzano sich stützt, der Art, dass sie schon bald nach Erscheinen der Schrift P. Widerspruch erfuhren†). Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen ebenen Curve in rechtwinkligen Coordinaten und $F(x)$ die Länge des Stückes, welches zur Abscisse x gehört, so wird zuerst angenommen (P. p. XVIII), dass $F(x)$ sich nach dem Taylor'schen Satze entwickeln lasse. Diese an sich nicht zulässige Voraussetzung wäre aber

*) Die oben angeführte Verallgemeinerung des Satzes ergiebt sich leicht. In der That, es sei $c - \gamma_1$, $c + \gamma_2$ das erste der ausgeschiedenen Intervalle, so hat man für die Werthe $a \leq x \leq c - \gamma_1$, $f(x) = 0$ und da $f(x)$ auch in der Umgebung des Punktes c stetig sein soll, während γ_1 beliebig klein werden kann, nothwendig $f(c) = 0$.

**) Legendre (Élémens de Géométrie 12. édition. L. IV. prop. 9) suchte den angeführten Satz aus dem ersten Axiome des Archimedes, dass die Gerade die kürzeste Linie sei, abzuleiten. Er stützt sich aber hierbei auf die falsche Behauptung, dass unter allen Linien, die eine gegebene *einschliessen,* eine die kleinste sein müsse. (P. p. XII.)

***) *Duhamel* löste die von Bolzano gestellte Aufgabe, indem er zunächst diejenige Zahl definirte, welche die Länge des Bogens heissen soll. (Vgl. Des méthodes etc. III. p. 386.)

†) Vgl. die Besprechungen der Schrift P. in der *allgemeinen Literaturzeitung* Jahrg. 1819 Nr. 236 und in der *Leipziger Literaturzeitung* Jahrg. 1822 p. 1393.

hier eigentlich nicht nothwendig, vielmehr würde es genügen, *die Existenz des Differentialquotienten* $\frac{dF}{dx}$ anzunehmen*). Bezüglich der Function $f(x)$ ist die analoge Festsetzung zu treffen.

Nun wird weiter der Nachweis versucht, dass $\frac{dF}{dx}$ *blos aus* $\frac{df}{dx}$ *bestimmbar sei*, wozu Bolzano sich eines Grundsatzes bedient, den man heute dahin formuliren würde, dass in ähnlichen ebenen Systemen entsprechende Bogen dasselbe Verhältniss besitzen wie irgend ein Paar entsprechender Strecken**). Dies vorausgesetzt ergiebt sich nämlich leicht, dass die $\{F(x+\Delta x)-F(x)\}:\Delta x = \Psi(\Delta x)$ blos durch die Werthe bestimmbar sei, welche die Function $\{f(x+m\Delta x)-f(x)\}:m\Delta x$ giebt, wenn man für m jeden echten Bruch nebst 0 und 1 setzt. Bezeichnet man $\{f(x+\Delta x)-f(x)\}:\Delta x$ mit $\psi(\Delta x)$ und versteht nach P. p. 2 unter $\psi(0)$ $\frac{df}{dx}$, so ändert sich $\psi(\Delta x)$ allerdings stetig mit Δx. Dasselbe gilt von $\Psi(\Delta x)$, wenn $\Psi(0)=\frac{dF}{dx}$ ist. Bolzano wendet nun den Schlusssatz von V. an, wozu das a. a. O. angeführte Gesetz der Stetigkeit für die Aenderung der Function $\Psi(\Delta x)$ gegenüber einer Abänderung von $\psi(\Delta x)$ erforderlich ist. Es ist aber nicht nachgewiesen.

Soweit hat Bolzano's Verfahren functionentheoretisches Interesse. Wenn er ferner den Grundsatz aufstellt (P. p. 49): es müsse irgend ein für *alle* Linien *gleichlautendes Gesetz* geben, nach dem man ihre Längen aus ihren Gleichungen $y=f(x)$ herleiten könne; so heisst dies die Aufgabe der Analysis verkennen, die ja eben ermitteln soll, ob und für welche Arten von Linien ein solches Gesetz besteht.

Anhang.

1. Ueber das Problem der Rectification der Curven.

1. Die griechischen Geometer betrachteten zwei beliebige begrenzte Linien, sowie zwei beliebige begrenzte Flächen als untereinander vergleichbar. Unter dieser Voraussetzung nimmt Archimedes an, dass

---

*) Vgl. hierzu die Anmerkung auf Pr. p. 66, nach welcher der Differentialquotient einer stetigen Function stets existiren soll, ausgenommen für isolirte Werthe des Argumentes, welche übrigens auch in unendlicher Anzahl vorhanden sein können.

**) Vgl. P. p. 49. Diese Annahme hängt mit Bolzano's geometrischen Ansichten zusammen, die mit denen Legendre's (l. c. Note II) übereinstimmen. Darüber berichtet ausführlich Herr R. Zimmermann (Sitz.-Ber. der Wiener Akademie, phil. Cl. III p. 163).

von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, am kürzesten die gerade sei; dass von anderen Linien mit einerlei Endpunkten in einer Ebene, welche nach derselben Seite ihrer gemeinsamen Sehne hohl sind, die umschlossene die kleinere sei. Ja sie legten jedem solchen Paare von Grössen ohne Weiteres ein *Verhältniss* bei. Hierbei weist das geometrische System Euklid's eine fühlbare Lücke auf. Denn nach Elem. V. Def. 3. haben Grössen zu einander ein Verhältniss, welche vervielfältigt einander übertreffen können. Demnach sollte, bevor vom Verhältnisse zweier Kreisflächen gesprochen wird (Elem. XII. prop. 2), der Nachweis geführt werden, dass eine Kreisfläche existire, welche grösser als die grössere der beiden betrachteten Kreisflächen und dabei ein Vielfaches der kleineren sei. Diese Lücke wird allerdings beseitigt durch die letzte der *Annahmen* des Archimedes*): „Auch ist bei ungleichen Linien, Flächen und Körpern der Ueberschuss des grösseren über das kleinere so gross, dass er durch mehrmalige Zusammenfügung zu sich selbst grösser werden kann, als jede Grösse von der Art der verglichenen."**) Es bleibt jedoch ungewiss, ob er sie gerade der eben berührten Schwierigkeit wegen aufnahm.

2. Das Problem der Rectification hat eine klare und eingehende Darstellung gefunden durch Duhamel***). Er verlangt vor Allem den Nachweis der Behauptung, dass ein gegebener Curvenbogen ein Verhältniss zur Längeneinheit besitze, oder dass ihm eine Zahl entspreche, und sucht denselben auch für den Fall *eines convexen Bogens* zu liefern. Sein Verfahren giebt zu folgender Erörterung Anlass. Zunächst kann man fragen, was für einen arithmetischen Sinn die Definition habe: „Die Länge einer gegebenen Curve ist die Grenze, der sich der Umfang eines der Curve eingeschriebenen Polygons bei unbegrenzter Abnahme der Seiten nähert." Es handelt sich hierbei um den Grenzwerth einer Function von unbegrenzt vielen, unter einander nur durch eine einzige Bedingung verknüpften Veränderlichen, wenn jede derselben unabhängig von den übrigen zur Grenze 0 con-

*) Archimedes, Von der Kugel und dem Cylinder. Vgl. Nizze Archimedes Werke p. 44.

**) Beiläufig bemerkt spielt dieses Axiom des Archimedes eine wichtige Rolle in der *allgemeinen Arithmetik*. Es sei eine unendliche Menge von (abstracten) Objecten A, B, . . . gegeben. Durch Definitionen werde festgesetzt, welche unter ihnen gleich und welches von je zweien ungleichen das grössere sei. Wird ferner die Addition und Subtraction, die Vervielfältigung und Theilung derselben definirt, so folgt noch nicht, dass es möglich sei, ein gegebenes Object der Schaar so oft zu vervielfältigen, dass dadurch jedes andere übertroffen wird. Ein Beispiel einer Art von Objecten, welche den zuerst genannten Postulaten genügen, dem des Archimedes aber nicht, bieten die *Unendlich der Functionen*, welche Hr. P. du Bois-Reymond betrachtet hat. (Diese Annalen XI. p. 150.) —

***) Des méthodes etc. II, p. 411 f.

vergirt. Es sei dem Bogen AB das Polygon $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$ eingeschrieben und $|A_{r-1}A_r| = s_r$. *Die Summe* $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = p_n$ *hat einen endlichen Grenzwerth* L *für* $\lim s_r = 0$, *wenn jeder positiven Zahl* ε *eine Zahl* $\Delta > 0$ *zugeordnet werden kann, so dass der Unterschied* $p_n - L$ *seinem absoluten Betrage nach kleiner als* ε *ist für alle Systeme von Werthen* $s_1, s_2, \cdots, s_n$, *deren jeder kleiner als* Δ *ist.* Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen Grenzwerthes von p_n bei $\lim s_r = 0$ besteht ferner darin, dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\Delta > 0$ gehört, so dass der Unterschied

$$s_1' + s_2' + \cdots + s_{n_1}' - p_n = p_{n_1}' - p_n$$

seinem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist für alle Werthsysteme $s_r < \Delta$, falls nur keine der Seiten des ebenfalls dem Bogen AB eingeschriebenen Polygones p_{n_1}' grösser ist als irgend eine der Seiten des Polygones p_n d. i. $s_{r_1}' \leq s_r < \Delta$.

3. Duhamel hat das Zutreffen der soeben erwähnten Bedingung mit Hülfe des ersten Theiles des von ihm formulirten „principe fondamental des infiniment petites“ (l. c. II, p. 398) gezeigt, der jedoch mit Sicherheit nur unter einer weiteren Voraussetzung gebraucht werden kann. Dieser bekannte Satz muss so lauten: „Wenn die Summe der positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, deren jede sich der Grenze 0 nähert und deren Anzahl dabei unbegrenzt wächst, unter diesen Umständen einen endlichen Grenzwerth hat, so nähert sich auch die Summe der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ demselben Grenzwerthe, falls der Quotient $\beta_n : \alpha_n$ *gleichmässig bezüglich aller Werthe* $n = 1, 2, \cdots$ für $\lim \alpha_n = 0$ zum Grenzwerthe 1 convergirt.“*) Daher muss man bei der in Rede stehenden Untersuchung zunächst folgenden Satz feststellen: „*Ist der Bogen* AB *convex***), so nähern sich für alle Punkte M desselben die Winkel NMT und $N'MT'$ zwischen der Tangente in $M : TMT'$ und den Sehnen zu beiden Seiten von $M : MN, MN'$ *gleichmässig* der Grenze Null bei unbeschränkter Annäherung der Punkte N, N' an den Punkt M.“ D. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, so dass $|NMT| < \varepsilon$ und $|N'MT'| < \varepsilon$ für alle Sehnen $|MN| < \delta$ resp. $|MN'| < \delta$, gleichviel wo der Punkt M auf dem Bogen AB gewählt wird.

---

*) Dies hat bereits Hr. Dini nach seinen autographirten Vorlesungen im Studienjahre 1877/78: „Analisi infinitesimale“ I, p. 7 bemerkt.

**) D. h. wird er von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten und in ebensovielen von jedem Kreise, der von einem seiner Punkte mit hinlänglich kleinem Radius beschrieben wird. Ein solcher Bogen besitzt in allen seinen Punkten Grenzlagen für seine Sehnen, welche jedoch zu beiden Seiten eines Punktes verschieden sein können.

Beweis. Es sei σ eine beliebige positive Zahl und $|MN| = |MN'| = \sigma$ gemacht. Dann sind entweder alle Winkel NMT, $N'MT'$ kleiner als ε, oder es ist mindestens ein P. C auf AB (mit der Tangente EE') vorhanden, wofür einer der Winkel DCE, $D'CE'$ $(|CD| = |CD'| = \sigma)$ grösser als ε ist. Im ersten Falle kann man $\delta = \sigma$ setzen, im zweiten wiederhole man den Versuch mit der Strecke $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma$. Findet sich auch jetzt noch ein Punkt C_1, wofür einer der Winkel $D_1 C_1 E_1$, $D_1' C_1' E_1'$ grösser als ε ist, so kann $C = C_1$ genommen werden, *da der Winkel DCE mit wachsendem $|CD|$ auch wächst.* U. s. f. Auf diese Art gelangt man entweder zu einer Strecke $\sigma_m = \frac{\sigma}{2^m}$, der die Zahl δ gleichgesetzt werden kann, oder zu einem Punkte C auf AB, wofür entweder alle Winkel $D_n CE$ oder alle $D_n' CE'$ grösser sind als ε, wie gross auch n angenommen werden mag. Die letztere Annahme verträgt sich aber nicht damit, dass für jeden Punkt C auf AB $\lim DCE = 0$ für $\lim CD = 0$ und $\lim D'CE' = 0$ für $\lim CD' = 0$.

Denkt man sich nun die Ecken der Polygone p_n, p'_{n_1} zu einer fortlaufenden Reihe vereinigt, welche die gebrochene Linie p''_{n_2} liefern möge, so ergiebt sich durch Projection der zwischen A_{r-1} und A_r liegenden Ecken von p''_{n_2} auf die Gerade $A_{r-1}A_r$ sofort die Relation

$$0 < p''_{n_2} - p_n < \sum_1^n {}_r s_r \left(\frac{1}{\cos \omega_r} - 1 \right),$$

worin ω_r den grösseren der Winkel bedeutet, welche die Sehne $A_{r-1}A_r$ mit den Tangenten in ihren Endpunkten bildet. Da nach dem vorstehenden Satze zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Strecke $\delta > 0$ gehört, so dass

$$0 < \frac{1}{\cos \omega_r} - 1 < \varepsilon \quad \text{für} \quad s_r < \delta,$$

so folgt $p''_{n_2} - p_n < \varepsilon q$ wenn q den Umfang eines Polygones bezeichnet, das auf derselben Seite der Sehne AB liegt, wie der Bogen AB und ihn umschliesst. Auf ähnliche Art ergiebt sich

$$0 < p''_{n_2} - p'_{n_1} < \varepsilon q \quad \text{für} \quad s'_{r_1} \leq s_r < \delta,$$

somit $|p'_{n_1} - p_n| < 2\varepsilon q$. q. e. d.*).

*) Definirt man die Zahl L mit Duhamel zunächst als Grenzwerth der Umfänge einer besonderen Classe von eingeschriebenen Polygonen, so lässt sich L als Grenzwerth im allgemeinen Sinne erweisen durch ein Verfahren, *welches nur die einfachsten Sätze der Planimetrie voraussetzt und auch in der Nicht-Euklid'schen Geometrie brauchbar ist.* Man schreibe demnach dem Bogen AB ein Polygon von k Seiten ein und leite daraus andere ab, indem man jede Seite halbirt und in ihrem Mittelpunkte eine Senkrechte errichtet. Für die Umfänge Q_m

4. Ganz ähnlich ergiebt sich der Satz: „Construirt man in den Punkten $A, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, B$ die Tangenten der Curve, welche die gebrochene Linie $AB_1B_2 \cdots B_nB$ bilden, so existirt für $|AB_1| + |B_1B_2| + \cdots + |B\,B|$ ein Grenzwerth bei $\lim s_r = 0$ und zwar ist er die Zahl L.“*)

5. Zu allgemeineren Sätzen gelangt die analytische Geometrie. Man verdankt die volle Einsicht in die Natur des hierhergehörigen Rectificationsproblemes Hrn. P. du Bois-Reymond**). Die grosse Wichtigkeit des Gegenstandes wird es rechtfertigen, wenn hier noch einmal darauf eingegangen und der Beweis des von ihm gegebenen Satzes unter Zugrundelegung der in Nr. 2. angenommenen Definition vorgetragen wird. Es sei CC' eine einfache stetige Linie, deren

---

der so entstehenden Polygone von $k.2^m$ Seiten sei $\lim\limits_{m=+\infty} Q_m = L$ und $Q_m < L$. — Bezeichnet nun P' den Umfang eines AB eingeschriebenen Polygones, dessen Seiten nicht grösser sind als die eines eingeschriebenen Polygones P von r Seiten mit *nur stumpfen Winkeln*, so findet man unmittelbar, wenn S' die grösste der Seiten des Polygones P' bedeutet,

(a) $$P' - P > -(r-1)S'.$$

Damit zeigt man zuerst, dass der Umfang eines beliebigen AB eingeschriebenen Polygones p *kleiner als L sein muss*. Zunächst folgt nach (a), wenn nur m so gross genommen wird, dass alle Seiten von Q_m kleiner sind als jede der Seiten von P

$$P < Q_m + (r-1)S' < L + (r-1)S';$$

somit, da S' beliebig klein sein kann, $P \leq L$. Da man nach demselben Gesetze, vermöge dessen die Polygone Q_m nacheinander gebildet werden, zu p ein Polygon P mit nur stumpfen Winkeln finden kann, welches somit nicht grösser als L sein kann und dabei grösser als p ist, so folgt, dass $p < L$ sein muss.

Andererseits ergiebt sich aus (a), falls die n Seiten eines Polygones p_n, deren grösste s sein mag, sämmtlich kleiner sind als irgend eine Seite eines Polygones Q_m mit nur stumpfen Winkeln

(b) $$p_n - Q_m > -(m-1)s.$$

Ist nun ε eine gegebene positive Zahl und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so kann eine ganze Zahl m so gewählt werden, dass $Q_m > L - \varepsilon'$ und dabei *zufolge des in Nr. 3. gezeigten Hülfssatzes* nur stumpfe Winkel besitzt. Nimmt man dann s so an, dass

$$(m-1)s < \varepsilon - \varepsilon',$$

so folgt nach (b)

$$p_n > (L - \varepsilon') - (\varepsilon - \varepsilon') \text{ d. i. } 0 < L - p_n < \varepsilon \text{ für alle } s_r < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{m-1}$$

d. i. $\lim p_n = L$ für $\lim s_r = 0$.

*) Im Traité de Géométrie von E. Rouché und Ch. de Comberousse (IV. édition) findet sich ein Beweis des Satzes von Nr. 2., welcher sich auf einen Theil des Satzes von Nr. 4. stützt. Auch hier (I, Nr. 290, 1.) ist der Hülfssatz in Nr. 3. nöthig. Herr de Tilly zieht diesem Verfahren das von Duhamel vor (Mémoires de la soc. des sciences phys. etc. de Bordeaux 2. sér. T. III, p. 87) und zwar, wie ich glaube, mit Recht.

**) Diese Annalen Bd. XV, p. 285.

Gleichung zwischen den ihren Endpunkten entsprechenden endlichen Abscissen $x = 0A = a$ und $x = 0A' = a'$ durch die eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ dargestellt sei. Zwischen A, A' schalte man die $(n-1)$ Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ mit den Abscissen

$$a_1 = a + \delta_1, \quad a_2 = a_1 + \delta_2, \cdots, a_{n-1} = b - \delta_n$$

ein, zu denen die Curvenpunkte $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ gehören. Unter dieser Voraussetzung besteht der Satz:

„*Wenn die eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ wenigstens in allen Punkten $a < x < a'$ mit Ausnahme eines endlichen Punktsystemes erster Art* (d. i. von endlicher Ordnung) *einen* (vollständigen) *Differentialquotienten besitzt, der eine für den Bereich der übrigen Punkte endliche und im endlichen Intervalle (a, a') integrirbare Function bildet, so existirt für die gebrochene Linie $L_n = |CC_1| + |C_1C_2| + \cdots + |C_{n-1}C'|$ bei unbegrenzter Abnahme der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, deren Summe jedoch stets $a' - a$ bleiben muss, ein endlicher Grenzwerth L, und zwar ist:*

$$L = \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx.\text{“}$$

Setzt man $f(a) = b$, $f(a') = b'$, $f(a_r) = b_r$, so ergiebt sich unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$(1) \qquad L_n = \sum_1^n {}^r \left| \sqrt{1 + \left(\frac{b_r - b_{r-1}}{\delta_r}\right)^2} \right| \cdot \delta_r .$$

Daraus folgt, wenn zunächst angenommen wird, dass $f(x)$ mindestens für alle Punkte $a < x < a'$ einen Differentialquotienten von der erwähnten Eigenschaft besitzt, nach dem Mittelwerthsatze in der Form von O. Bonnet*)

$$L_n = \sum_1^n {}^r \left| \sqrt{1 + f'(X_r)^2} \right| \cdot \delta_r \qquad a_{r-1} < X_r < a_r .$$

Es ist aber, wenn $f'(x)$ integrabel ist im endlichen Intervalle (a, a'), auch $\left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right|$ integrabel**); so dass sich ergiebt

$$(2) \qquad \lim_{\delta_r = 0} L_n = \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx = \text{arc. } CC'.\text{***})$$

---

*) Serret C. de calcul différentiel p. 23 und G. Cantor Borchardt Journ. 74, p. 141.

**) Vgl. P. du Bois-Reymond l. c. p. 286.

***) Dabei liegt die arithmetische Definition des bestimmten Integrales zu Grunde. Es sei $f(x)$ eine Function, welche in dem endlichen Intervalle $a \leqq x \leqq a'$ *für alle oder doch für überall-dicht vertheilte Werthe* von x eindeutig definirt ist

Diese Formel besteht auch noch, wenn $f'(x)$ nach Ausschluss einer endlichen Anzahl von Punkten der Bedingung des Satzes Genüge leistet. Es sei der Punkt $x = d = 0D (a < d < a')$ ausgeschlossen. Bei jeder Zerlegung von $a' - a$ wird entweder ein Theil vorkommen, der den Punkt D enthält, oder zwei Theile, die in D zusammenstossen. Im ersten Falle seien die Grenzen des *einen* Theiles, im zweiten die von D verschiedenen Grenzen der beiden Theile $d - \delta' = 0D'$, $d + \delta'' = 0D''$. Wenn nun die den Segmenten AD', $D''A'$ entsprechenden Theile von L_n L'_n, L''_n heissen, so hat man

$$\left| L_n - \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx \right| < \left| L'_n - \int_a^{a-\delta'} \cdots \right| + \lambda + \int_{a-\delta'}^{a+\delta''} \cdots + \left| L''_n - \int_{a+\delta''}^{a'} \cdots \right|,$$

worin

$$\lambda = \left| \sqrt{\delta'^2 + [f(d) - f(d-\delta')]^2} \right| + \left| \sqrt{\delta''^2 + [f(d+\delta'') - f(d)]^2} \right|.$$

Jeder gegebenen positiven Zahl ε entspricht nun eine Zahl $\delta > 0$, so dass, wenn nur $\delta' < \delta$ und $\delta'' < \delta$, sowohl das zweite als auch das dritte Glied rechts kleiner ist als ε. Denkt man sich demgemäss δ', δ''

---

und deren sämmtliche Werthe zwischen zwei endlichen Zahlen liegen. Theilt man nun das Intervall $a' - a$ in n Theile

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n, \qquad (\delta_r > 0);$$

setzt

$$a = a_0, \quad a + \delta_1 = a_1, \quad a_1 + \delta_2 = a_2, \cdots, a_{n-1} + \delta_n = a_n = a',$$

und versteht unter x_r einen beliebigen Werth zwischen a_{r-1} und a_r $(a_{r-1} \leqq x_r \leqq a_r)$; so existirt für die Summe $\sum_1^n{}_r \delta_r f(x_r)$ bei unbegrenzter Abnahme der Theile δ_r ein endlicher Grenzwerth J dann und nur dann, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl $\varrho > 0$ gehört, so dass die Ungleichung

$$\left| \sum_1^n{}_r \delta_r f(x_r) - J \right| < \varepsilon$$

besteht *für alle Werthe* $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, *deren Summe* $= a' - a$ *ist und von denen jeder einzelne kleiner als* ϱ *ist.* Die Zahl J heisst das bestimmte Integral $\int_a^{a'} f(x) \cdot dx$. — Diese Definition entnehme ich im Wesentlichen den Vorlesungen des Hrn. Weierstrass. — In ähnlicher Art lässt sich der endliche Grenzwerth für $\sum_1^n{}_r \delta_r f(x_r, x'_r)$, worin x'_r dieselbe Bedeutung hat wie x_r, bei $\lim \delta_r = 0$ definiren, welcher mit $\int_a^{a'} f(x, x) dx$ zu bezeichnen ist. Mit Hülfe desselben dehnt man den im Texte angegebenen Satz auf die ebenen Curven $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und auf die *Curven doppelter Krümmung* aus.

festgesetzt, so kann nach dem Vorstehenden für die übrigen Intervalle δ_r eine Grenze $\varrho' > 0$ gefunden werden, so dass, wenn nur $\delta_r < \varrho'$, das zweite und vierte Glied rechts ebenfalls unter ε liegen. Somit existirt eine Zahl ϱ, so dass für alle $\delta_r < \varrho$

$$\left| L_n - \int_a^{a'} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| dx \right| < 4\varepsilon$$

d. h. es gilt wieder die Formel (2). Aehnlich wird man vorgehen, wenn zwischen a und a' eine endliche Anzahl von Punkten oder auch ein unendliches Punktsystem von erster Art auszuschliessen ist.

6. Wenn $f'(x)$ auch nach Ausschliessung eines unendlichen Punktsystemes erster Art keine endliche Function wird, so hat die Summe L_n bei unbegrenzter Abnahme der δ_r *dann und nur dann einen endlichen Grenzwerth L, falls das Integral $\int_a^{a'} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| dx$ existirt und zwar ist derselbe ihm gleich.* Dabei wird, wie es die bis jetzt übliche Erklärung des bestimmten Integrales (vgl. Dini Fondamenti p. 300) erheischt, vorausgesetzt, es sei nur ein unendliches System erster Art von solchen Punkten zwischen a und a' vorhanden, so dass in jeder auch noch so kleinen Umgebung irgend eines derselben eine der Grenzen von $f'(x)$ unendlich ist. — Der Beweis des Satzes wird in der bekannten Weise durch allmähliches Aufsteigen zu den höheren Punktsystemen geführt. Es sei zunächst ein einziger Punkt $x = d = OD$ von der eben erwähnten Eigenschaft zwischen a und a' vorhanden. Zerlegt man L_n wie in Nr. 5. und setzt

$$(3) \quad \lim_{\delta'=+0} \int_a^{d-\delta'} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| \cdot dx = J', \quad \lim_{\delta''=+0} \int_{d+\delta''}^{a'} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| \cdot dx = J'',$$

so folgt

$$L_n - J' - J'' = \left(L'_n - \int_a^{d-\delta'} \cdots\right) + \left\{\int_a^{d-\delta'} \cdots - J'\right\}$$
$$+ \left(L''_n - \int_{d+\delta''}^{a'} \cdots\right) + \left(\int_{d+\delta''}^{a'} \cdots - J''\right) + \lambda.$$

Man nehme nun δ', δ'' so klein, dass das zweite, vierte und letzte Glied rechts absolut kleiner sind als die gegebene Zahl ε. Sind δ', δ'' demgemäss angesetzt, so kann eine Zahl ϱ' gefunden werden von der Art, dass die erste und dritte Differenz für alle Werthe der darin vorkommenden δ_r, welche unter ϱ' liegen, absolut genommen, je kleiner sind als ε. Demnach existirt auch eine Zahl ϱ, so dass für alle $\delta_r < \varrho$

$$|L_n - J' - J''| < 5\varepsilon \quad \text{d. i.} \quad \lim_{r=0} L_n = J' + J''.$$

7. Ist einer der Grenzwerthe (3) unendlich, *so hat auch die Summe L_n einen unendlichen Grenzwerth.* Denn es ist L_n grösser als jede beliebige Zahl G, wenn nur die Intervalle δ_r klein genug sind. In der That es sei $G' > G$, so ist nach Voraussetzung z. B. $\int_a^{d-\delta'} \cdots > G'$ für alle $\delta' < \sigma$, und wenn δ' fixirt ist, so kann für die in L'_n vorkommenden Theile δ_r eine Grenze ϱ' gefunden werden, dass für $\delta_r < \varrho'$ $L'_n > \int_a^{d-\delta'} \cdots - (G' - G)$, mithin $L'_n > G$ ist. Bedeutet ϱ die kleinere der Zahlen σ, ϱ', so überschreitet die über dem Segmente AD stehende Summe gewiss für alle $\delta_r < \varrho$ die Zahl G.

Es ist leicht ersichtlich, dass falls $\int_a^{a'} f'(x)\, dx$ *absolut* convergirt, auch $\int_a^{a'} \left|\sqrt{1 + f'(x)^2}\right| dx$ convergirt und falls $\int_a^{a'} |f'(x)|\, dx$ unendlich ist, dasselbe auch vom zweiten Integral gelten müsse. Diese Bemerkung führt zur Aufstellung von *stetigen Curvenbogen, für welche die Summe L_n bei unbeschränkter Abnahme der δ_r über alle Grenzen wächst.* Es sei z. B. für $x = 0$, $y = 0$; für $x \gtrless 0$

$$y = \int_0^x \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x},$$

so hat $\int_0^x \left|\frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\right| dx$ bekanntlich den Werth $\pm\infty$; demnach hat das Stück der Curve vom Anfangspunkte 0 bis zu einem beliebigem Punkte M, wenn man will, eine unendliche Länge.

Daraus erhellt die *Unzulässigkeit* der Annahme, dass jedem stetigen Bogen eine Zahl als Länge entspreche. Die vermittelst derselben abgeleiteten Resultate haben daher nur Gültigkeit unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Bogen messbar sei.

8. Ist der Bogen nach einer der vorstehend entwickelten Methoden als Zahl definirt, so folgen, wie Duhamel hervorgehoben hat, die Annahmen des Archimedes als nothwendige Sätze. Das Nämliche gilt vom Theoreme: arc. AC = arc. AB + arc. BC.

Der Satz: „Das Verhältniss des Bogens MN zu seiner Sehne MN hat für $\lim |MN| = 0$ den Grenzwerth 1", ergiebt sich für convexe Linien unmittelbar*), in der analytischen Geometrie aus der Formel

$$\lim_{\xi=+0} \frac{1}{\xi} \int_{x_0}^{x_0+\xi} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| dx = \left|\sqrt{1+[\lim_{\xi=+0} f'(x_0+\xi)]^2}\right|,$$

welche jedoch die Existenz und Endlichkeit des Grenzwerthes $\lim f'(x+\xi)$ für $\lim \xi = +0$ voraussetzt. Ein ähnlicher Satz besteht für $\lim \xi = -0$.**)

9. In ähnlicher Weise, wie das Problem der Rectification, sind auch die der Quadratur, Complanation und Cubirung zu behandeln. So folgt der Satz, dass die von der Abscissenaxe, der Curve $y = f(x)$ und zwei Ordinaten begrenzte Fläche eine Zahl sei, aus der Existenz des bestimmten Integrales $\int_a^{a'} f(x) \cdot dx$. Es ist befremdlich, dass in einem Werke, welches die Methoden der exacten Wissenschaften darstellt, umgekehrt die Existenz des bestimmten Integrales auf die der Flächenzahl gegründet ist***), während letztere ebenda früher als Ergebniss eines arithmetischen Verfahrens, nämlich eines Grenzüberganges, bezeichnet wird.

Die Quadratur einer von *einer convexen Linie L* begrenzten ebenen Fläche kann nach der in Nr. 2. gegebenen Definition durch folgende Bemerkungen erledigt werden. 1) Aus dem Hilfssatze in Nr. 3. folgt leicht, dass man für die Seiten s_r eines der Linie L eingeschriebenen Polygones $A_1 A_2 \cdots A_n$ eine Grenze δ angeben kann, sodass, wenn nur alle $s_r < \delta$, der Abstand aller Punkte des über jeder Sehne $A_{r-1} A_r$ stehenden Bogens von dieser Sehne kleiner ist als eine vor-

*) Vgl. Rouché etc. l. c. I, p. 184.

**) Beim Beweise dieses Satzes wird der Mittelwerthsatz gebraucht in folgender Form, die natürlich unter der allgemeinen des Hrn. Dini (Fondamenti p. 192 f.) enthalten ist, aber auch für sich abgeleitet werden kann: „Ist $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutig, stetig und mit einem endlichem vorderen (hinteren) Differentialquotienten $\psi(x)$ begabt wenigstens für alle $a < x < b$ mit Ausnahme eines unendlichen Punktsystemes erster Art, so kann der Quotient $[f(b) - f(a)] : (b - a)$ nicht ausserhalb des von der oberen und unteren Grenze von $\psi(x)$ gebildeten Intervalles fallen.“

***) Duhamel l. c. III, p. 348 und II, p. 406. Dabei wurde ausser Acht gelassen, dass bereits Cauchy (vgl. Moigno, C. intégral p. 4) den arithmetischen Beweis von der Existenz des bestimmten Integrales einer stetigen Function geliefert hatte, zu dem freilich noch das Theorem von der gleichmässigen Stetigkeit dieser Function hinzugefügt werden muss. — Es findet sich auch die Ansicht, dass die Flächenzahl ohne Grenzübergang denkbar sei, die Bogenzahl aber nicht, z. B. bei Cournot Théorie élém. des fonctions 2. éd. 1, p. 296. So scheint es denn nicht überflüssig mit Hrn. de Tilly (l. c. p. 90) zu betonen, dass die Existenz der Flächenzahl nicht einmal durch den hier betrachteten Grenzübergang aus den ein- und umgeschriebenen Polygonen allein gesichert sei, sondern erst dann, wenn dieselbe Zahl auch als Grenzwerth der Summe der (geradlinig begrenzten) Theile erscheint, in welche die vorgelegte Fläche durch zwei Curvensysteme zerschnitten wird.

gegebene Zahl ε. 2) Bezeichnet F die Fläche eines beliebigen L eingeschriebenen Polygones von r Seiten und F' die eines ebensolchen, dessen Seiten aber nicht grösser sind als die von F, so hat man

$$(a) \qquad F' - F > -r \cdot \frac{S'H'}{2}$$

worin S' die grösste unter den Seiten von F', H' das Maximum des Abstandes der Punkte des über jeder dieser Seiten stehenden Theiles von L von ihr bezeichnet.

3) Nun construire man nach dem Verfahren von Duhamel Polygone, wodurch man einen Grenzwerth A für ihre Flächen $\mathfrak{A}_m$ findet: $\lim\limits_{m=+\infty} \mathfrak{A}_m = A$ und $\mathfrak{A}_m < A$.

4) Aus (a) folgt ferner, dass die Fläche f eines jeden L eingeschriebenen Polygones kleiner ist als A. Denn man hat bei genügend hohem m

$$F < \mathfrak{A}_m + \frac{r}{2} S'H' > A + \frac{r}{2} S'H',$$

und da $S'H'$ beliebig klein genommen werden kann, $F \leqq A$. Nach demselben Gesetze, durch welches die Polygone $\mathfrak{A}_m$ nach einander gebildet werden, findet man aber zu f ein Polygon, dessen Fläche F grösser ist als f; demnach ist $f < A$.

5) Andererseits ergiebt sich aus (a), falls die n Seiten s_r eines eingeschriebenen Polygones von der Fläche f_n, deren grösste s sein mag, sämmtlich kleiner sind, als irgend eine Seite eines Polygones von der Fläche $\mathfrak{A}_m$

$$(b) \qquad F_n - \mathfrak{A}_m > -\frac{m}{2} sh,$$

worin h gegenüber f_n dasselbe bedeutet, wie H' gegenüber F'. Ist nun ε eine gegebene positive Zahl und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so kann m so gross gewählt werden, dass $\mathfrak{A}_m > A - \varepsilon'$. Nimmt man dann s so klein an, dass $\frac{m}{2} sh < \varepsilon - \varepsilon'$, so folgt nach (b)

$$f_n > A - \varepsilon' - (\varepsilon - \varepsilon') \text{ d. i. } 0 < A - f_n < \varepsilon,$$

wenn nur alle s_r kleiner sind als die eben für s ermittelte Grenze. Somit hat man $\lim f_n = A$ für $\lim s_r = 0$.

---

2. Ueber die Differentialquotienten unendlicher Reihen.

Die Frage, ob der Differentialquotient einer unendlichen Reihe, deren Glieder eindeutige und stetige Functionen einer Veränderlichen x : $f_n(x)$ sind, — falls ein solcher überhaupt vorhanden ist — gleich ist der Summe der aus den Differentialquotienten $f_n'(x)$ gebildeten Reihe, dürfte vor Bolzano (vgl. ob. VI.) kaum eingehend erörtert worden sein. Duhamel stellte (Liouville J. T. XIX, Jahrgang 1854, p. 118) den Satz auf: Ist $\Sigma f_n(x)$ in einem Intervalle $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ convergent und gleich $f(x)$, sind aber $f(a-0)$ und $f(a+0)$ von einander verschieden, während sonst $f(x)$ eine stetige Function von x bildet, so hat $\Sigma f_n'(a)$ eine unendliche Summe. Bertrand, der diesen Satz in seinen Traité du Calcul différentiel (p. 271) aufgenommen hat, sagt blos, $\Sigma f_n'(a)$ sei divergent. Mit Benutzung eines von Herrn

Darboux gegebenen Beispiels lässt sich darthun, dass dieser Satz nicht stichhaltig ist. Setzt man in der That

$$x \geqq 0 \quad f_n(x) = e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}; \qquad x \leqq 0 \quad f_n(x) = e^{-(n+1)^2x^2} - e^{-n^2x^2},$$
$$(n = 1, 2, \cdots),$$

so ist

$$x > 0 \quad f(x) = e^{-x^2} \quad f(0) = 0 \quad x < 0 \quad f(x) = -e^{-x^2},$$

also

$$f(-0) = -1, \qquad f(+0) = +1.$$

Gleichwohl findet man $\quad \sum_1^\infty{}^n f'_n(0) = 0.$

Sicher ist der folgende Satz, den man entweder durch Umkehrung des Satzes über die Integration der unendlichen Reihen oder unmittelbar nach Herrn Dini (Fondamenti ètc. p. 115) beweisen kann. „Wenn in dem Intervalle $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ $\Sigma f_n(x)$ convergirt und ihre Glieder je einen endlichen Differentialquotienten besitzen, und wenn in demselben Intervalle $\Sigma f'_n(x)$ convergirt und zwar *in gleichem Grade,* denn hat auch die Summe $f(x)$ der Reihe $\Sigma f_n(x)$ für $x = a$ einen endlichen Differentialquotienten, welcher gleich ist der Summe der Reihe $\Sigma f'_n(a)$."

Wenn aber die Reihe $\Sigma f'_n(x)$ in dem Intervalle $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ eine *stetige* Summe besitzt, so kann dieser Satz auch ausgedehnt werden auf den Fall, dass sie *nur im Allgemeinen gleichmässig* convergirt d. i. dass die gleichmässige Convergenz nur besteht, nachdem aus dem erwähnten Intervalle eine endliche Anzahl von Intervallen, deren jedes beliebig klein angenommen werden kann, ausgeschieden worden ist. (Diese Bezeichnung ist von Herrn Dini l. c. p. 102 entlehnt.) In der That ist eines derselben $(a - \gamma_1, a + \gamma_2)$, so hat man für die Werthe

$$a - \delta_1 \leqq x \leqq a - \gamma_1, \qquad f'(x) = \sum_1^\infty{}^n f'_n(x).$$

Und da

$$\lim f'(a - \xi) = \sum_1^\infty{}^n f'_n(a) \qquad \text{für} \qquad \lim \xi = +0,$$

so folgt wegen

$$\operatorname*{Lim}_{\xi=+0} \frac{f(a-\xi) - f(a)}{\xi} = \operatorname*{Lim}_{\xi=+0} f'(a - \xi)$$

(Dini l. c. p. 82), dass der hintere Differentialquotient von $f(x)$ für $x = a$ $\quad \sum_1^\infty{}^n f'_n(a)$ sei. Dasselbe gilt bezüglich des vorderen Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = a$.

Innsbruck, 9. Februar 1881.