

DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA RELATIVO ALLA INTEGRAZIONE  
DELLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DEL 1.<sup>o</sup> ORDINE;  
PER ERNESTO PADOVA.

Nel Vol. VIII. dei *Mathematische Annalen* il Prof. A. Mayer <sup>(1)</sup> ha dato una dimostrazione assai semplice del seguente teorema: Date  $m + l$  equazioni  $H_r = h_r$  a derivate parziali del 1.<sup>o</sup> ordine, con  $n$  variabili indipendenti, che verificano le condizioni:

$$(H_r, H_s) = 0,$$

ma tali che ricavando dalle prime  $m$  i valori di  $m$  delle derivate e sostituendoli nelle rimanenti da queste spariscano tutte le derivate, si può sempre ridurre la integrazione del sistema proposto a quella di una sola equazione a derivate parziali con  $n - m - l + 1$  variabili indipendenti.

La dimostrazione del sig. Mayer è però fondata sopra un teorema che egli ha dato nel Vol. VI dello stesso Giornale a pag. 170 e che è alquanto complicato; siccome del teorema sopraenunciato mi è riescito dare direttamente una dimostrazione assai semplice, così credo non sarà inutile farla conoscere.

Siano date le  $m + l$  equazioni a derivate parziali del primo ordine, prive della funzione incognita  $z$ ,  $H_r = h_r$ , ove  $h_1, h_2, \dots$  sono delle costanti,  $H_1, H_2, \dots$  delle funzioni delle  $p$  e delle  $q$ , indicando secondo il solito con  $q_1, q_2, \dots, q_n$  le variabili indipendenti e con  $p_1, p_2, \dots, p_n$  le derivate di  $z$  rispetto a quelle variabili. Le equazioni  $H_r = h_r$  siano indipendenti fra loro, ma supponiamo che esse non siano risolvibili rapporto ad  $m + l$  delle quantità  $p$ , che, cioè, se dalle prime  $m$  si ricavano i valori di  $m$  delle  $p$  e si sostituiscono

(1) A. Mayer. *Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrations-methode.*  
Serie 5. Vol. VIII.



e se  $y$  è una qualunque delle  $p$  si ha

$$0 = \frac{dH_k}{dy} + \sum_i^m \frac{dH_k}{dp_i} \frac{d(f_i - p_i)}{dy}.$$

Se quindi  $i$  è  $< m + 1$  l'equazione  $(H_i H_k) = 0$  diverrà

$$\begin{aligned} (H_i H_k) &= - \sum_i^n \frac{dH_i}{dq_s} \sum_i^m \frac{dH_k}{dp_i} \frac{d(f_i - p_i)}{dp_s} - \sum_i^n \frac{dH_i}{dp_s} \frac{d\Phi_k}{dq_s} \\ &\quad + \sum_i^n \frac{dH_i}{dp_s} \sum_i^m \frac{dH_k}{dp_i} \frac{d(f_i - p_i)}{dq_s} \\ &= - \sum_i^n \frac{dH_i}{dp_s} \frac{d\Phi_k}{dq_s} + \sum_i^m \frac{dH_k}{dp_i} (f_i - p_i, H_i) = 0 \end{aligned}$$

ma poichè  $(f_i - p_i, H_i) = 0$  così avremo

$$(5) \quad \sum_i^n \frac{dH_i}{dp_s} \frac{d\Phi_k}{dq_s} = 0,$$

ossia, sostituendo per  $\frac{dH_i}{dp_s}$  la sua espressione,

$$\sum_i^m \frac{dH_i}{dp_i} \sum_i^n \frac{d\Phi_k}{dq_s} \frac{d(f_i - p_i)}{dp_s} = 0$$

e poichè il determinante delle  $H_1, \dots, H_m$ , rispetto a  $p_1, p_2, \dots, p_m$  è diverso da zero, dovrà essere

$$(6) \quad \sum_i^n \frac{d\Phi_k}{dq_s} \frac{d(f_i - p_i)}{dp_s} = 0$$

Queste provano che le  $\Phi$  sono risolubili rapporto ad  $l$  delle  $q$  il cui indice supera  $m$ .

Infatti se ciò non fosse noi potremmo fra le equazioni  $\Phi = 0$  eliminare tutte le  $q$  con indice superiore ad  $m$  ed otterremmo

$$\phi(\Phi_{m+1} \dots \Phi_{l+m-1}, q_1 \dots q_m) = \Phi_{l+m};$$

l'ultima delle (6) darebbe allora

$$\sum_i^m \frac{d\phi}{dq_s} \frac{d(f_i - p_i)}{dp_s} = 0$$



le quali a causa delle (8) danno

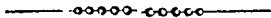
$$(F_h - p_h, F_k - p_k) = 0$$

dunque le (9) insieme alle equazioni

$$(9') \quad p_{m+1} = \alpha_{m+1}, \dots, p_{m+l} = \alpha_{m+l}$$

ove le  $\alpha$  sono delle costanti, costituiscono un sistema completo e poichè sono risolte rapporto ad  $m + l$  delle  $p$  così si vede pel teorema di Lie, che la integrazione di questo sistema dipende dalla integrazione di una equazione a derivate parziali con  $n - m - l + 1$  variabili indipendenti, come volevasi dimostrare.

Livorno, Luglio 1880.



ALCUNE ESPERIENZE RELATIVE ALLA SCARICA NEI GAS RAREFATTI;  
NOTA DI AUGUSTO RIGHI.

1. Ho preso uno di quei tubi, con un elettrodo di forma cilindrica, o di specchio concavo, che servono al Crookes per mostrare l'emissione rettilinea della *materia radiante* dal polo negativo, e l'ho messo in azione nel modo ordinario con un rocchetto di Ruhmkorff, aggiungendo però una punta metallica esterna al tubo, in contatto col vetro, e comunicante col polo negativo.

Se con una calamita devio la scarica, in modo che la fluorescenza del vetro si formi in corrispondenza alla punta metallica, precisamente tutto all'intorno di questa manca la luce verde, e quindi ivi apparisce una macchia oscura.

Ora, benchè il vetro sia caricato esternamente di elettricità negativa, è certo tuttavia che la faccia interna, tendendo a caricarsi positivamente e a cedere quindi elettricità