Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze.

Von

Erhard Schmidt in Göttingen.

Herr De La Vallée Poussin*) hat bewiesen, daß, wenn $F(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bedeutet, für $x > 2$

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| < \text{Const.}\, \frac{x}{\log x} \cdot \sqrt{p \log x}\; e^{-\sqrt{p \log x}}$$

ist, wobei $p = 0 \cdot 03282$ zu setzen ist. Unter der Voraussetzung, daß die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ sämtlich den reellen Betrag $\frac{1}{2}$ haben, hat ferner Herr Helge van Koch**) bewiesen, daß für $x > 2$

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| < \text{Const.}\, \sqrt{x} \log x.$$

Damit blieb die Frage nach dem Vorzeichen des Fehlers, also die Frage, ob etwa $F(x)$ und die durch die Gleichung

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

definierte Funktion $f(x)$ schließlich beständig größer oder beständig kleiner als der Integrallogarithmus bleiben, oder ob sie beständig um denselben schwanken, sowie auch die Frage nach einer unteren Grenze für die Größenordnung dieser Schwankung unerledigt***). Der Inhalt vorliegender Untersuchung orientiert sich an diesen Fragen, indem er in folgenden Sätzen besteht:

---

*) Memoires couronnés et autres Memoires publiés par l'Academie royale de Belgique 1899 tome LIX.

**) Acta Mathematica Bd. 24; Mathematische Annalen Bd. 55.

***) Daß es zu jedem beliebig kleinen ε über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x, Werte von x gibt, für welche

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| > x^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

ist, ist schon von Herrn Jensen ohne Ausführung des Beweises ausgesprochen worden (Acta Mathematica Bd. 22).

I. Über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 gibt es Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} > \frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

II. Über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 gibt es Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} > \frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

Bezeichnet ν die obere Grenze der reellen Beträge der Nullstellen von $\zeta(s)$, so daß also $\frac{1}{2} \leqq \nu \leqq 1$ sein muß, so gelten noch folgende Sätze:

III. Zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen positiven Größe ε gibt es über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} > x^{\nu - \varepsilon},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -x^{\nu - \varepsilon}.$$

IV. Zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen Größe ε gibt es über jeder beliebig großen vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} > x^{\nu - \varepsilon},$$

und ebenso auch Werte von x, für welche

$$F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < -x^{\nu - \varepsilon}.$$

Wir wollen mit dem Beweise des Satzes III beginnen. Es sei für $x \geqq 2$

$$L(x) = \sum_{m=2}^{m=E(x)} \frac{1}{\log m},$$

wo $E(x)$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet, und für $x < 2$

$$L(x) = 0.$$

Dann ist für $x > 2$

$$(1) \qquad L(x) - \frac{1}{\log 2} < \int_2^x \frac{dy}{\log y} < L(x).$$

Man setze

$$f(x) = L(x) + \varphi(x);$$

Es sei ferner $\Re(s) > 1$; dann ist

$$(2) \qquad \log \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \cdots$$

wo für $\log \zeta(s)$ derjenige Wert zu wählen ist, welcher stetig in reelle Werte übergeht, wenn s stetig so in reelle Werte übergeht, daß dabei beständig $\Re(s) > 1$ bleibt.

$$\sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \cdots = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{f(n) - f(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L(n) - L(n-1)}{n^s} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s},$$

da nun

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{\varphi(n)}{n^s}\right) = 0,$$

so ist

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right);$$

berücksichtigt man nun, daß $L(n) - L(n-1) = \frac{1}{\log n}$ ist, so ergibt sich

$$(3) \qquad \log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} + s \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n) R_n(s),$$

wo

$$R_n(s) = \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} + \frac{s}{n^{s+1}} = s(s+1) \cdot \int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{dy}{y^{s+2}}$$

und mithin auch

$$|R_n(s)| < |s|\cdot|s+1|\cdot\int\limits_n^{n+1} dx \int\limits_n^{n+1} \frac{dy}{y^{\Re(s)+2}} < \frac{|s|\cdot|s+1|}{n^{2+\Re(s)}}$$

ist. Aus der letzten Ungleichung folgt, daß

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n)\, R_n(s)$$

für $\Re(s) > 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert und mithin für $\Re(s) > 0$ einen singularitätenfreien analytischen Funktionszweig darstellt. Dasselbe gilt dann auch von dem Funktionszweig $A(s)$, welcher durch die Gleichung

$$A(s) = \frac{1}{s}\left(\sum_{n=2}^{n=\infty} \varphi(n)\, R_n(s) + \log \zeta(a) - s + a - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n}\right)$$

definiert sei, wobei a eine reelle Zahl > 1 bedeuten soll. Da nun

$$\log \zeta(s) = \log \zeta(a) + \int\limits_a^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds$$

und

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} - \int\limits_a^s \zeta(s)\, ds + s - a,$$

so ergibt sich aus (3),

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = A(s) + \frac{1}{s}\int\limits_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds, \tag{4}$$

wo der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $\Re(s) > 1$ bleibt. Es durchlaufe nun n_1 die Gesamtheit der ganzen Zahlen $n \geqq 2$, für welche $\varphi(n) \geqq 0$ und n_2 die Gesamtheit der ganzen Zahlen $n \geqq 2$, für welche $\varphi(n) < 0$ ist. Dann ergibt sich

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} + \sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} = A(s) + \frac{1}{s}\int\limits_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds, \tag{5}$$

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} = -\sum_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} + A(s) + \frac{1}{s}\int\limits_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds. \tag{6}$$

Wäre nun für jedes $n_2 > x_1$ $\varphi(n_2) > -n_2^{\nu-\varepsilon}$, so würde $\sum\limits_{n_2} \frac{\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}}$ für $\Re(s) > \nu - \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergieren und mithin einen in diesem Gebiet regulären analytischen Funktionszweig darstellen. Da ferner $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)$ an der Stelle $s = 1$ regulär ist, und mithin

$$\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds$$

nur an den Nullstellen von $\zeta(s)$ d. h. nur für negative und komplexe Werte von s, deren reeller Betrag $\leqq \nu$ vorausgesetzt wurde, singulär werden kann, so ergibt sich aus (6), daß, wenn ϱ_a den Konvergenzradius der Taylorentwickelung des durch $\sum\limits_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ dargestellten Funktionszweiges in der Umgebung des Punktes $s = a$ bezeichnet, $\varrho_a > a - \nu$ wäre; es sei $\varrho_a = a - \nu + \eta$, da es nun gemäß Voraussetzung eine Nullstelle $\alpha + \beta i$ von $\zeta(s)$ geben müßte, so daß $\alpha > \nu - \eta$ und $\alpha > \nu - \varepsilon$, so würde folgen, daß wenn $\varrho_{a+\beta i}$ den Konvergenzradius der Taylorentwickelung des durch $\sum\limits_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ dargestellten Funktionszweiges in der Umgebung des Punktes $s = a + \beta i$ bezeichnet $\varrho_{a+\beta i} < \varrho_a$ wäre. Das ist aber unmöglich; denn, wenn $C_a^{(m)}$ und $C_{a+\beta i}^{(m)}$ bezüglich die Koeffizienten der m^{ten} Potenzen in der Taylorentwickelung von $\sum\limits_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$ in der Umgebung der Stellen $s = a$ und $s = a + \beta i$ bedeuten, so ist

$$C_a^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+1}}$$

und

$$C_{a+\beta i}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+\beta i+1}}.$$

Da nun wegen des positiven Vorzeichens aller $\varphi(n_2)$

$$\left|\frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+\beta i+1}}\right| = \frac{\varphi(n_1)(\log n_1)^m}{n_1^{a+1}},$$

so ist

$$\left|C_{a+\beta i}^{(m)}\right| \leqq \left|C_a^{(m)}\right|$$

und mithin auch $\varrho_{a+\beta i} \geqq \varrho_a$. Ebenso beweist man auch die Unmöglichkeit der Annahme, daß für jedes $n_1 > x_1$ $\varphi(n_1) < n_1^{\nu-\varepsilon}$ wäre. Damit ist bei Berücksichtigung von (1) der Beweis für die Ungleichungen des Satzes III geliefert.

Beweis des Satzes I.

Für den Fall, daß $\nu > \frac{1}{2}$ wäre, ergeben sich die zu beweisenden Ungleichungen aus den schon bewiesenen den Inhalt des Satzes III ausmachenden Ungleichungen a fortiori. Wir haben sie also nur für den Fall, daß $\nu = \frac{1}{2}$ wäre, zu beweisen. Differentiiert man die Gleichung (6) nach s, so ergibt sich, wenn $\frac{d(A(s))}{ds} = A'(s)$ gesetzt wird,

$$(7) \qquad \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 - A'(s)$$

$$+ \frac{1}{s^2} \int\limits_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right).$$

Da gemäß dem zu Anfang dieser Abhandlung zitierten Satze von Herrn Helge van Koch aus der gemachten Voraussetzung, daß $\nu = \frac{1}{2}$ sei, bei Berücksichtigung von (1) folgt, daß

$$\varphi(n_1) < \text{Const.}\, n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1$$

und

$$-\varphi(n_2) < \text{Const.}\, n_2^{\frac{1}{2}} \log n_2,$$

so konvergieren unter der genannten Voraussetzung die Summen, welche in der Gleichung (7) vorkommen, für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ gleichmäßig und (7) hat dann also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ Gültigkeit. Es sei nun $\frac{1}{2} + \beta i$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$, dann ist, wenn μ eine positive gegen 0 konvergierende Größe bezeichnet,

$$0 = \lim_{\mu = 0} \left(\mu \cdot A'\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)\right)$$

und weil

$$\int\limits_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds$$

nur logarithmische Unendlichkeitsstellen hat,

$$O = \lim_{\mu = 0} \left(\frac{\mu}{\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)^2} \int\limits_a^{\frac{1}{2} + \beta i + \mu} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds \right),$$

wo der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $\Re(s) > \frac{1}{2}$ bleibt, ferner ist

$$\lim_{\mu=0} \left[\frac{\mu}{\frac{1}{2} + \beta i + \mu} \cdot \left(\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right)} + \zeta\left(\frac{1}{2} + \beta i + \mu\right) \right) \right] = \frac{\varkappa}{\frac{1}{2} + \beta i},$$

wo $\varkappa$ die Ordnung der Nullstelle $s = \frac{1}{2} + \beta i$ bedeutet. Aus (7) folgt mithin

(8) $$\lim_{\mu=0}\left(\mu\cdot\sum_{n_1}\frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}} + \mu\cdot\sum_{n_2}\frac{\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right) = \frac{-\varkappa}{\frac{1}{2}+\beta i}.$$

Da nun $s = \frac{1}{2}$ eine reguläre Stelle der drei letzten von den vier Ausdrücken auf der rechten Seite von (7) ist, so ergibt sich, wenn das Symbol O die obere Unbestimmtheitsgrenze bedeutet aus (7)

(9) $$\underset{\mu=0}{O}\left(\mu\cdot\sum_{n_1}\frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = \underset{\mu=0}{O}\left(\mu\cdot\sum_{n_2}\frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = N.$$

Da nun

$$\sum_{n_1}\frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\mu}} \geqq \left|\sum_{n_1}\frac{\varphi(n_1)\log n_1}{n_1^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right|$$

und

$$\sum_{n_2}\frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} \geqq \left|\sum_{n_2}\frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\beta i+\mu}}\right|,$$

so folgt aus (8) und (9)

(10) $$2N \geqq \frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}.$$

Wäre nun für jedes $n_2 > x_1$

$$\varphi(n_2) > -c\cdot\frac{\sqrt{n_2}}{\log n_2},$$

wo

$$0 < c < \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|},$$

so wäre, weil

$$\sum_{n_2}\frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} \leqq \sum_{n_2\leqq x_1}\frac{-\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}} + c\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\mu}},$$

und weil ferner

$$\lim_{\mu=0}\left(\mu\cdot\sum_{n_2\leqq x_1}\frac{\varphi(n_2)\log n_2}{n_2^{\frac{3}{2}+\mu}}\right) = 0$$

und

$$\lim_{\mu=0}\left(\mu\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\mu}}\right) = 1,$$

$N \leqq c$, was mit (10) im Widerspruch steht. Ebenso beweist man auch die Unmöglichkeit der Annahme, daß für jedes $n_1 > x_1$ $\varphi(n_1) < c\frac{\sqrt{n_1}}{\log n_1}$, wo

c wie früher eine positive Zahl $< \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}$ bedeutet. Wählt man nun für $\frac{1}{2}+\beta i$ diejenige Nullstelle, deren absoluter Betrag am kleinsten ist d. h. nach der Berechnung des Herrn Gramm*) $\frac{1}{2}+i\cdot 14\cdot 17\cdots$, so ist $\varkappa = 1$ und es ergibt sich, daß $\frac{1}{29} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa}{\left|\frac{1}{2}+\beta i\right|}$. Damit sind wiederum unter Berücksichtigung von (1) die Ungleichungen des Satzes I auch für den Fall, daß $\nu = \frac{1}{2}$ wäre, bewiesen.

Beweis der Sätze II und IV.

Es sei für $x \geqq 2$

$$L_1(x) = \sum_{m=2}^{m=E(x)} \frac{1}{\sqrt{m}\log m}$$

und für $x < 2$

$$L_1(x) = 0.$$

Dann ist für $x > 2$

$$L_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}\log 2} < \int_2^x \frac{dy}{\sqrt{y}\log y} < L_1(x),$$

und da

$$\int_2^x \frac{dy}{\sqrt{y}\log y} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y}$$

ist, so ergibt sich für $x > 2$

$$(11) \qquad L_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}\log 2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{\log y} < \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\log y} < L_1(x) - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{\log y}.$$

Man setze

$$F(x) = L(x) - \frac{1}{2} L_1(x) + \Phi(x).$$

Ersetzt man in (2) s durch $2s$, multipliziert die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und subtrahiert sie von der ursprünglichen, so erhält man folgende für $\Re(s) > 1$ geltende Gleichung:

*) Bulletin de l'Academie royale des sciences et des lettres de Danemark Copenhague 1902, No. 1.

$$\log \zeta(s) - \frac{1}{2}\log \zeta(2s) - \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} - \frac{1}{5}\sum_p p^{-5s} - \frac{1}{7}\sum_p p^{-7s} - \cdots = \sum_p p^{-s}$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{F(n)-F(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L(n)-L(n-1)}{n^s} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{L_1(n)-L_1(n-1)}{n^s}$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n)-\Phi(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-s}}{\log n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)}}{\log n} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \Phi(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= + s - a + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} - \int_a^s \zeta(s)\,ds - \frac{s}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}}{\log n}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^s \zeta\left(s+\frac{1}{2}\right) ds + s\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{n-\infty} \Phi(n)\,R_n(s),$$

wo a und $R_n(s)$ dieselbe Bedeutung haben wie beim Beweise des Satzes III, und die Integrationswege so zu wählen sind, daß auf denselben beständig $\Re(s) > 1$ bleibt. Setzt man nun

$$B(s) = \frac{1}{s}\Bigg(\sum_{n=2}^{n=\infty} \Phi(n)\,R_n(s) - \frac{s-a}{2} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-a}}{\log n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}}{\log n} + \log \zeta(a)$$

$$- \frac{1}{2}\log \zeta 2a - \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} - \frac{1}{5}\sum_p p^{-5s} - \frac{1}{7}\sum_p p^{-7s} - \cdots\Bigg),$$

so stellt $B(s)$ einen für $\Re(s) > \frac{1}{3}$ regulären analytischen Funktionszweig dar und man hat

$$(12) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n^{s+1}} = B(s) + \frac{1}{s}\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s) - \frac{\zeta'(2s)}{\zeta(2s)} - \frac{1}{2}\zeta\left(s+\frac{1}{2}\right)\right) ds,$$

wo der Integrationsweg so zu wählen ist, daß auf demselben beständig $\Re(s) > 1$ bleibt. Da nun die Funktion unter dem Integralzeichen an den Punkten $s = \frac{1}{2}$ und $s = 1$ regulär bleibt, und mithin die durch das Integral gegebene Funktion im Gebiete $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$ nur an den komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ singulär und zwar logarithmisch unendlich wird, so führt von der Gleichung (12) genau dieselbe Schlußweise unter Berücksichtigung von (1) und (11) zum Beweise der Sätze IV und II, wie sie aus der Gleichung (4) unter Berücksichtigung von (1) den Beweis der Sätze III und I lieferte.

Zum Schlusse möchte ich mir noch folgende Bemerkung erlauben: Wenn $\nu > \frac{1}{2}$ wäre, so könnte man offenbar in den Ungleichungen des Satzes IV das Zusatzglied $\frac{1}{2}\int\limits_2^{\sqrt{x}}\frac{dy}{\log y}$ fortlassen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlören. Es gäbe also zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen positiven Größe ε über jeder vorgeschriebenen Zahl x_1 Werte von x, so daß

$$F(x) - \int\limits_2^{x}\frac{dy}{\log y} > x^{\nu-\varepsilon} \tag{13}$$

wäre. Nun hat aber die bis 3 000 000 durchgeführte Zählung der Primzahlen durch Gauß und Goldschmidt es wahrscheinlich gemacht, daß

$$F(x) < \int\limits_2^{x}\frac{dy}{\log y}$$

bleibt. Ließe sich dieser Satz beweisen, so würde aus (13) sich ergeben, daß $\nu = \frac{1}{2}$ sein muß, d. h. daß die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Betrag $\frac{1}{2}$ haben.
