

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 6.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der practischen Geometrie.

Von Herrn Hofrath und Ritter *Gaußs*.

Ihrem Wunsche zufolge schicke ich Ihnen die Vorschriften zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe der practischen Geometrie: die Lage eines Punktes aus den an demselben gemessenen horizontalen Winkeln zwischen andern Punkten von genau bekannter Lage zu finden. Der Gegenstand ist zwar ganz elementarisch, und jeder, der den Geist der Methode der kleinsten Quadrate kennt, kann sich die Vorschriften leicht selbst entwickeln: inzwischen wird jene Aufgabe als eine der nützlichsten in der praktischen Geometrie auch wol oft von solchen Personen benutzt werden können, die nicht ganz in jenem Falle sind, und denen daher die Mittheilung der Formeln nicht unlieb ist.

Die Coordinaten eines der bekannten Punkte sein a, b , jene von Norden nach Süden, diese von Osten nach Westen positiv gezählt — ob die Abscissenlinie wahrer Meridian ist oder nicht, ist hier gleichgültig; eben so x, y genäherte Coordinaten des zu bestimmenden Punkts, und dx, dy deren noch unbekannte Verbesserungen. Man bestimme φ und r nach den Formeln

$$\tan \varphi = \frac{b-y}{a-x}, \quad r = \frac{a-x}{\cos \varphi} = \frac{b-y}{\sin \varphi}$$

indem man φ in demjenigen Quadranten wählt, der r positiv macht, und setze noch

$$\alpha = \frac{206265'' \cdot (b-y)}{rr}, \quad \varepsilon = - \frac{206265'' \cdot (a-x)}{rr}$$

Dann ist das Azimuth des ersten Punkts vom zweiten aus gesehen (die Richtung der Abscissenlinie als 0 betrachtet)

$$= \varphi + \alpha dx + \varepsilon dy$$

wo die beiden letzten Theile in Secunden ausgedrückt sind.

In Beziehung auf einen zweiten Punkt von bekannter Lage sollen $\varphi', \alpha', \varepsilon'$, in Beziehung auf einen dritten $\varphi'', \alpha'', \varepsilon''$ u. s. w. dasselbe bedeuten, was $\varphi, \alpha, \varepsilon$ in Beziehung auf den ersten sind.

Sind die Winkelmessungen an dem zu bestimmenden Orte auf Einmal mit einem Theodolithen ohne Repetition

gemacht, indem bei unverrücktem Instrument das Fernrohr nach der Reihe auf die verschiedenen bekannten Punkte geführt ist, so sollten, wenn h, h', h'' u. s. w. die dabei abgelesenen Winkel bedeuten, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \varphi &= h + \alpha dx + \varepsilon dy \\ \varphi' &= h' + \alpha' dx + \varepsilon' dy \\ \varphi'' &= h'' + \alpha'' dx + \varepsilon'' dy \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

durch die Substitution der wahren Werthe von dx und dy alle einerley Werth bekommen, wenn die Beobachtungen absolut genau wären, und wenn man also drei derselben unter sich gleich setzte, würde man durch Elimination die Werthe von dx und dy erhalten. Sind überhaupt nur drei bekannte Punkte beobachtet, so läßt sich auch nichts weiter thun; ist aber ihre Anzahl größer, so werden die Fehler der Winkelmessungen am vollkommensten ausgeglichen, indem man alle obigen Ausdrücke addirt, die Summe mit der Anzahl dividirt, die Differenz zwischen diesem Quotienten und jedem einzelnen Ausdruck $= 0$ setzt, und diese Gleichungen nach der bekannten Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate behandelt.

Sind hingegen die Winkelmessungen unabhängig von einander gemacht, so gibt jede derselben sofort eine Gleichung zwischen den unbekannten Grössen dx und dy , und alle diese Gleichungen sind dann nach der Methode der kleinsten Quadrate zu combiniren, wobei man, wenn man will, auch noch auf die etwa ungleiche Zuverlässigkeit der Winkel Rücksicht nehmen kann. Wäre also z. B. der Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte $= i$, zwischen dem zweiten und dritten $= i'$ u. s. w. gefunden, inmer von der Linken zur Rechten gerechnet, so hätte man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha) dx + (\varepsilon' - \varepsilon) dy &= 0 \\ \varphi'' - \varphi' - i' + (\alpha'' - \alpha') dx + (\varepsilon'' - \varepsilon') dy &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Haben diese Winkelmessungen gleiche Zuverlässigkeit, so bildet man aus diesen Gleichungen zwei Normalgleichungen, die erste, indem man jene der Ordnung nach mit den respectiven Coefficienten von dx , d. i. die

erste mit $\alpha' - \alpha$, die zweite mit $\alpha'' - \alpha'$ u. s. w. multiplicirt und alles addirt; die andere, indem man dasselbe durch Multiplication mit den Coëfficienten von dy ausführt und gleichfalls addirt. Ist hingegen die Winkelmessung von ungleicher Genauigkeit, und z. B. die erste auf μ , die andere auf μ' u. s. w. Repetitionen gegründet, so müssen die Gleichungen beidemale vor der Addition auch erst noch mit diesen Zahlen μ , μ' u. s. w. respective multiplicirt werden. Aus den so gefundenen beiden Normalgleichungen werden dann dx und dy durch Elimination gefunden (Diese Vorschriften sind nur um derer willen beigefügt, denen die Methode der kleinsten Quadrate noch unbekannt ist, und für die vielleicht auch die Erinnerung noch nöthig seyn könnte, daß bei jenen Multiplicationen die algebraischen Zeichen von $\alpha' - \alpha$ u. s. w. sorgfältig beachtet werden müssen.) Endlich bemerke ich noch, daß hierbei nur die Fehler der Winkelmessungen ausgeglichen werden sollen, indem die Coordinaten der bekannten Punkte als genau angesehen werden.

Ich erläutere diese Vorschriften für den zweiten Fall noch an den mir von Ihnen mitgetheilten Winkelmessungen auf der Holkensbastion bei Copenhagen, obwohl, wie es scheint, die zuletzt angezeigte Voraussetzung dabei nicht genau genug statt findet; bei so kleinen Entfernungen haben kleine Unrichtigkeiten von einigen Zehnthellen eines Fusses in den gegebenen Coordinaten einen sehr viel grössern Einfluß, als die Fehler in den Winkelmessungen, und man darf sich daher nicht wundern, daß nach möglichster Ausgleichung der Winkel Differenzen zurückbleiben, die viel grösser sind, als bei den Beobachtungen der Winkel als möglich angenommen werden kann. Für den gegenwärtigen Zweck, wo nur ein Rechnungsbeispiel gegeben werden soll, kann dies jedoch gleichgültig seyn.

*Winkel auf Holkensbastion *).*

Friedrichsberg — Petri	73° 35' 22,8"
Petri — Erlösersturm	104° 57' 33,0"
Erlösersturm — Friedrichsberg	181° 27' 5,0"
Friedrichsberg — Frauenthurm	80° 37' 10,8"
Frauenthurm — Friedrichsturm	101° 11' 50,8"
Friedrichsturm — Friedrichsberg	178° 11' 1,5"

Coordinaten, von der Copenhagener Sternwarte gerechnet, in Pariser Fufs.

Petri	+ 487,7	+ 1007,7
Frauenthurm	+ 710,0	+ 684,2
Friedrichsberg	+ 2430,6	+ 8335,0
Erlösersturm	+ 2940,0	— 3536,0
Friedrichsturm	+ 3059,3	— 2231,2

*) Die Coordinaten der Punkte, und die Winkel auf Holkens Bastion beruhen beide auf Herrn Capit. v. Caroc's Messungen. S.

Als genäherte Coordinaten des Beobachtungsplatzes wurden angenommen:

$$x = + 2836,44 \quad y = + 444,33$$

Und damit fanden sich die Azimuthe:

Petri	166° 30' 42,56"	+ 19,92 dx	+ 83,04 dy
Frauenthurm	173° 33' 50,54"	+ 10,80 dx	+ 95,78 dy
Friedrichsberg	92° 56' 39,46"	+ 26,07 dx	+ 1,34 dy
Erlösersturm	271° 29' 25,38"	— 51,79 dx	— 1,35 dy
Friedrichsturm	274° 45' 41,48"	— 76,56 dx	— 6,38 dy

Der berechnete Winkel Friedrichsberg — Petri ist daher

$$73^{\circ} 34' 3'',10 - 6,15 \, dx + 81,70 \, dy$$

welches mit dem beobachteten verglichen die Gleichung

$$- 79'',70 - 6,15 \, dx + 81,70 \, dy = 0$$

gibt. Eben so erhält man die fünf andern Gleichungen

$$\begin{aligned} &+ 69,82 - 71,71 \, dx - 84,39 \, dy = 0 \\ &+ 9,08 + 77,86 \, dx + 2,69 \, dy = 0 \\ &+ 0,28 - 15,27 \, dx + 94,44 \, dy = 0 \\ &+ 0,04 - 87,36 \, dx - 102,16 \, dy = 0 \\ &- 3,42 + 102,63 \, dx + 7,72 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Aus der Verbindung dieser sechs Gleichungen erhält man, indem man den Beobachtungen gleiche Zuverlässigkeit beilegt, die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} &+ 29640 \, dx + 14033 \, dy = + 4168'' \\ &+ 14033 \, dx + 33219 \, dy = + 12383'' \end{aligned}$$

und hieraus die Werthe

$$dx = - 0,05, \quad dy = + 0,40$$

oder die verbesserten Coordinaten der Holkensbastion

$$+ 2836,39 \quad \text{und} \quad + 444,73$$

Die nach Substitution dieser Werthe von dx und dy zwischen den berechneten und beobachteten Winkeln zurückbleibenden Unterschiede sind noch viel zu groß, um den Messungen zugeschrieben werden zu können, und beweisen, was oben bemerkt ist, daß die Coordinaten der bekannten Punkte nicht auf Zehnthelle des Fusses zuverlässig waren, weshalb denn freilich auch die gefundene Verbesserung selbst diesmal etwas zweifelhaft bleibt.

Die bei dieser Rechnung zum Grunde gelegten genäherten Coordinaten der Holkensbastion waren durch die directe Methode aus dem vierten und fünften der obigen Winkel berechnet. Obgleich diese directe Methode als ein ziemlich erschöpfter Gegenstand zu betrachten ist, so setze ich sie doch der Vollständigkeit wegen hier auch noch her, in derjenigen Gestalt, in welcher ich sie anzuwenden pflege.

Es sein a, b die Coordinaten des ersten bekannten Punkts (man wählt denselben aus den drei bekannten nach Gefallen); die des zweiten sein in die Form

$$a + R \cos E, \quad b + R \sin E$$

gebracht, und die des dritten in dieselbe

$$a + R' \cos E', b + R' \sin E'$$

Die gesuchten Coordinaten des Beobachtungspunkts bezeichne man durch

$$a + \rho \cos \varepsilon, b + \rho \sin \varepsilon$$

Ferner sey der hier beobachtete Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte = M , der zwischen dem ersten und dritten = M' ; ich setze voraus, daß diese Winkel von der Linken zur Rechten genommen, und daß sie, falls sie so über 180° betragen haben, erst um 180° vermindert sind, oder was dasselbe ist, daß wenn ein Winkel in der verkehrten Ordnung unter 180° betrug, statt seiner das Complement zu 180° genommen ist *). Ich mache ferner

$$\frac{R}{\sin M} = n, \quad \frac{R'}{\sin M'} = n'$$

$$E - M = N, \quad E' - M' = N'$$

(wo nöthigenfalls vorher 360° addirt wird.)

Dies vorausgesetzt, hat man die beiden Gleichungen

$$\rho = n \sin (\varepsilon - N), \quad \rho = n' \sin (\varepsilon - N')$$

welche, wenn sie so geschrieben werden:

$$n = \frac{1}{\rho} \cdot \sin (\varepsilon - N), \quad n' = \frac{1}{\rho} \cdot \sin (\varepsilon - N'),$$

unter die Aufgabe Theor. Mot. C. C. p. 82. gehören. Die eine der dort gegebenen Auflösungen führt zu folgender Regel:

*) Die Absicht davon ist, die folgenden Grössen n, n' immer positiv zu machen, und dadurch weniger Aufmerksamkeit auf die algebraischen Zeichen nöthig zu haben.

Ich nehme an, daß n' grösser, wenigstens nicht kleiner als n ist, welches erlaubt ist, da es willkürlich ist, welchen Punkt man als den zweiten oder dritten betrachten will. Es sei

$$\frac{n}{n'} = \tan \zeta$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2} (N' - N)}{\tan 45^\circ - \zeta} = \tan \psi$$

Sodann wird

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (N + N') + \psi$$

und nachdem ε gefunden ist, wird ρ durch eine der obigen Formeln, oder besser, durch beide berechnet.

In unserm Beispiele haben wir, den Frauenthurm als den ersten, Friedrichsberg vorläufig als den zweiten und den Friedrichsthurm als den dritten Punkt betrachtet

$$a = +710,0 \quad b = +684,2$$

$$E = 77^\circ 19' 31'',92 \quad E' = 308^\circ 51' 45'',77$$

$$\log R = 3,8944205, \quad \log R' = 3,5733549$$

$$M = 99^\circ 22' 50'',20 \quad M' = 101^\circ 11' 50'',80$$

(zufolge obiger Anm.)

$$N = 337^\circ 56' 42'',72, \quad N' = 207^\circ 39' 54'',97$$

$$\log n = 3,9002650 \quad n' = 3,5817019$$

Da hier $n > n'$, so vertauschen wir die Ordnung und setzen

$$N = 207^\circ 39' 54'',97 \quad N' = 337^\circ 56' 42'',72$$

$$\log n = 3,5817019 \quad \log n' = 3,9002650$$

Hiernächst findet sich ferner $\zeta = 19^\circ 39' 3'',87$, $\psi = 80^\circ 45' 31'',69$, $\varepsilon = 353^\circ 33' 50'',53$, und $\log \rho = 3,3303990$, und die Coordinaten der Holkensbastion $+2836,441$ und $+444,330$.

Gaußs,

Brief von dem Herrn Professor und Ritter Bessel an den Herausgeber:

Die, in meinem letzten Briefe Ihnen mitgetheilten Grundzüge einer Methode, geodätische Vermessungen zu berechnen, lassen, für die Bequemlichkeit der Anwendung, nichts Wesentliches zu wünschen übrig; allein sie beruhen auf der sphärischen Berechnung der Dreiecke und sind daher noch einer Verbesserung fähig, welche freilich immer sehr klein und gewöhnlich ganz unbedeutend ausfallen wird, deren Kenntniß man aber doch nicht entbehren darf, theils weil Fälle vorkommen werden, wo die Genauigkeit der Rechnung auf's Höchste getrieben werden soll, theils weil man ohne diese Kenntniß nicht beurtheilen kann, wie viel man vernachlässigt. Daß die Voraussetzung der Kugelgestalt der Erdoberfläche, in der

Berechnung der Dreiecke Fehler erzeugt, welche nur von der Ordnung des Products der Abplattung in den Flächeninhalt der Dreiecke, oder von der Ordnung des Products der Abplattung in den sphärischen Excess sind, wird auch ohne Rechnung klar; aber, wenn die Vermessung sehr weit fortgeht, zum Beispiele wie die jetzt ausgeführte von Greenwich bis Seeberg, so sind diese Fehler nicht geradezu als unwesentlich zu vernachlässigen, zumahl wenn die Winkel mit einer solchen Genauigkeit beobachtet sind, wie bei der eben erwähnten Vermessung.

Ich habe daher die in meinem letzten Briefe erwähnte Aufgabe aufgelöst, indem ich genau untersucht habe, wie