

La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$

Pierre Deligne* (Bures-sur-Yvette)

1. Énoncé du théorème

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments, $\overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, $\varphi \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ la substitution de Frobenius $x \mapsto x^q$, et $F = \varphi^{-1}$ le Frobenius géométrique.

Soit X un schéma (séparé de type fini) sur $\mathbb{F}_q$, et soit $\overline{X}$ le schéma sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ qui s'en déduit par extension des scalaires. Pour tout point fermé x de X , soit $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ le degré sur $\mathbb{F}_q$ de l'extension résiduelle. La fonction zêta $Z(X, t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ est définie par

$$Z(X, t) = \prod_{x \in X} (1 - t^{\deg(x)})^{-1} \quad (x \text{ point fermé de } X),$$

$$\log Z(X, t) = \sum_{n>0} \#X(\mathbb{F}_{q^n}) \frac{t^n}{n}.$$

Pour tout nombre premier ℓ premier à q , la cohomologie ℓ -adique à supports propres $H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ de $\overline{X}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$, sur lequel $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ agit par transport de structures. D'après Grothendieck, on a

$$Z(X, t) = \prod_i \det(1 - Ft, H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}.$$

Prenons pour X une surface projective non singulière. On sait dans ce cas que les facteurs

$$P_i(t) = \det(1 - Ft, H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

de $Z(X, t)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels indépendants de ℓ . La conjecture de Weil affirme ici que les racines du polynôme $P_i(t)$ sont de valeur absolue complexe $q^{-i/2}$. Cette conjecture est invariante par extension finie du corps fini de base. Pour X comme plus haut, et $i \neq 2$, elle résulte de Weil [9]. Si, pour simplifier, on suppose X géométriquement connexe, on a en effet

$$P_0(t) = 1 - t, \quad P_4(t) = 1 - q^2 t,$$

$$P_1(t) = \det(1 - \varphi t; T_\ell(\text{Pic}^0(X)_{\text{red}})), \quad P_3(t) = P_1(qt).$$

*Cet article a été rédigé pendant un séjour à l'Université de Warwick, que je remercie de son hospitalité.

Soient k un corps de caractéristique 0 et X une surface projective non singulière géométriquement connexe sur k . On dit que X est une surface $K3$ si X est régulière et de diviseur canonique trivial, c'est-à-dire si $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ et que Ω_X^2 est isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Pour les mirifiques propriétés de ces surfaces, on renvoie à [8]. Nous utiliserons surtout les faits suivants.

1.1. Lemme. (i) On a $h^{2,0} = h^{0,2} = 1$.

(i) On a $H^2(X, T_X^1) = 0$ (les déformations infinitésimales ne sont pas obstruées), l'application déduite du produit intérieur

$$H^1(X, T_X^1) \otimes H^0(X, \Omega_X^2) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Omega_X^1) \quad (1.1.1)$$

est bijective, et $H^0(X, T_X^1) = 0$ (X n'a pas d'automorphismes infinitésimaux).

On a

$$h^{2,0} =_{\text{dfn}} \dim H^0(X, \Omega_X^2) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1,$$

et (i) s'en déduit par symétrie de Hodge. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on a par symétrie de Hodge et dualité de Serre

$$h^{0,1} = h^{1,0} = h^{2,1} = h^{1,2} = 0.$$

Puisque $\Omega_X^2 = \mathcal{O}_X$, l'isomorphisme $\text{iproduit intérieur}$

$$T_X^1 \otimes \Omega_X^2 \xrightarrow{\sim} \Omega_X^1$$

induit des isomorphismes $T_X^1 \simeq \Omega_X^1$. La nullité de $H^2(X, T_X^1)$ se déduit donc de celle de $h^{1,2}$, et il est clair que (1.1.1) est bijectif. Le même argument donne $H^0(X, T_X^1) = 0$.

1.2. Lemme. Soit Y_0 une surface projective non singulière sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique V de corps résiduel fini k , un morphisme propre et lisse $f_V : Y \rightarrow \text{Spec}(V)$ de fibre générale une surface $K3$ et $i : \mathbb{F}_q \rightarrow k$ tel que $Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k \simeq Y \otimes_V k$.
- (ii) Il existe un schéma intègre S de corps des fractions de caractéristique 0, un point $s \in S$, un morphisme propre et lisse $f : Y \rightarrow S$ de fibre générale une surface $K3$ et $i : \mathbb{F}_q \rightarrow k(s)$ tel que $Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k(s) \simeq Y_s$.

La démonstration utilise un passage à la limite standard. Si les conditions équivalentes de 1.2 sont remplies, on dit que Y_0 se relève en une surface $K3$.

1.3. Théorème. Une surface projective non singulière sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ qui se relève en une surface $K3$ vérifie la conjecture de Weil.

Ce théorème a été obtenu indépendamment par Pjateckii-Shapiro et Šafarevitch.

Il s'applique par exemple aux surfaces de degré 4 dans $\mathbb{P}^3$. Les nombres de Betti d'une surface $K3$ sont $(1, 0, 22, 0, 1)$; le théorème implique

donc que

$$|\#X(\mathbb{F}_q) - \#\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)| \leq 21q.$$

La théorie conjecturale des motifs de Grothendieck (en particulier sa théorie du $\mathfrak{g}$ roupe de Galois motivique) m'a été très utile pour construire la démonstration. Dans ce langage (qui ne sera pas utilisé par la suite), l'idée est, en gros, de construire par réduction de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{F}_q$ une variété abélienne A et un $\mathfrak{m}$ orphisme injectif de motifs

$$H^2(X) \hookrightarrow H^1(A) \otimes H^1(A),$$

pour déduire la conjecture de Weil pour X du théorème de Weil pour A . Toutefois, nous ne définissons pas ce $\mathfrak{m}$ orphisme par un cycle algébrique; ce n'est donc pas un morphisme au sens de [5]. En théorie de Hodge, son mode de définition a l'analogue suivant (qui ne sera pas utilisé par la suite).

1.4. Lemme. *Soit H une variation de structures de Hodge de poids n sur un schéma S . Si le système local $H_{\mathbb{Z}}$ n'a pour sections globales que la section s et ses multiples, alors s est en tout point de S de type $(n/2, n/2)$.*

1.5. Notations. 1.5.1. On notera en indice les extensions de scalaires: si M_A est un module sur un anneau (commutatif à unité) A (ou un schéma sur A , par exemple un groupe algébrique sur A), on désignera par M_B le module sur la A -algèbre B (ou le schéma sur B) qui s'en déduit par extension des scalaires.

1.5.2. Si un groupe G agit sur un ensemble X , on notera $g * x$ le transformé de x par g .

1.5.3. Quand une égalité est la définition de l'un des membres, on la note $=_{\text{dfn}}$.

2. Structures de Hodge polarisées

Pour manier les structures de Hodge, nous utiliserons le formalisme exposé dans [4] et brièvement rappelé ci-dessous.

2.1. Soient $\underline{S}$ le groupe algébrique réel des éléments inversibles de la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{C}$, $w : \mathbb{G}_{m_{\mathbb{R}}} \rightarrow \underline{S}$ l'inclusion de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ et $t : \underline{S} \rightarrow \mathbb{G}_{m_{\mathbb{R}}}$ l'inverse de la norme; on a $tw(x) = x^{-2}$. Soit V un vectoriel réel de dimension finie. Il revient au même de se donner

- a) $\rho : \underline{S} \rightarrow \text{GL}(V)$ de poids n : $\rho w(x) * v = x^n \cdot v$;
- b) une bigraduation de Hodge de poids n de $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q} \quad \text{avec} \quad \overline{V^{p,q}} = V^{q,p};$$

- c) une filtration de Hodge de poids n de $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$: c'est une filtration décroissante avec

$$F^p(V_{\mathbb{C}}) \oplus \overline{F^{n-p+1}(V_{\mathbb{C}})} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{C}}.$$

On a

$$F^p(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p' \geq p} V^{p', q'};$$

pour $z \in \underline{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$ et $v^{p,q} \in V^{p,q}$, on a

$$z * v^{p,q} = z^p \bar{z}^q v^{p,q}.$$

On pose $C = \rho(i)$; c'est l'opérateur C de Weil. On a $Cv^{p,q} = i^{p-q}v^{p,q}$. Pour $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, une bigraduation de Hodge est dite de *type* $\mathcal{E}$ si les *nombre de Hodge* $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$ sont nuls pour $(p,q) \notin \mathcal{E}$.

2.2. On appellera ici *structure de Hodge de poids n* H la donnée d'un $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini $H_{\mathbb{Z}}$ et d'une bigraduation de Hodge de poids n de $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$. La *structure de Hodge de Tate* $\mathbb{Z}(n)$ est la structure de Hodge de type $\{(-n, -n)\}$ donnée par

$$\mathbb{Z}(n)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}(n)_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^n \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}.$$

Une polarisation d'une structure de Hodge de poids n H est un morphisme de structures de Hodge

$$\psi : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{Z}(-n)$$

telle que, sur $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, la forme bilinéaire réelle

$$(2\pi i)^n \psi(x, Cy)$$

soit symétrique et définie positive. La forme ψ est alors $(-1)^n$ -symétrique.

Une *structure de Hodge de poids n rationnelle* consiste en un $\mathbb{Q}$ -vectoriel $H_{\mathbb{Q}}$ et une bigraduation de Hodge de poids n de $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$. On désigne par $\mathbb{Q}(n)$ la structure de Hodge rationnelle sous-jacente à $\mathbb{Z}(n)$. La définition des polarisations est laissée au lecteur.

L'énoncé suivant reformule un théorème de Riemann.

2.3. Scholie. *Le foncteur $A \mapsto H^1(A, \mathbb{Z})$ identifie les variétés abéliennes polarisées aux structures de Hodge polarisées de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$.*

De la fin de ce n^o, nous n'utiliserons que 2.11(iii') $\Rightarrow$ (ii). Pour prouver cette implication, on peut se limiter à ne considérer que des groupes connexes, ce qui rend 2.5 inutile ou évident.

2.4. Soit G un groupe algébrique linéaire réel. On dit que G est *compact* si $G(\mathbb{R})$ est compact et que toute composante connexe de $G(\mathbb{C})$ a un point réel. Le foncteur évident est alors une équivalence de la catégorie des représentations linéaires algébriques de G avec la catégorie des représentations linéaires du groupe compact $G(\mathbb{R})$.

2.5. Lemme. *Tout sous-groupe algébrique réel H d'un groupe algébrique réel compact G est compact.*

On sait que l'application

$$(g, \ell) \longmapsto g \cdot \exp(i\ell) : G(\mathbb{R}) \times \text{Lie}(G) \longrightarrow G(\mathbb{C})$$

est bijective. Il suffit de prouver que, pour tout sous-groupe réel H de G et tout $h = g \cdot \exp(i\ell) \in H(\mathbb{C})$, on a $\ell \in \text{Lie}(H)$. Puisque $\bar{h} \in H(\mathbb{C})$, on a

$$\exp(2i\ell) = \bar{h}^{-1}h \in H(\mathbb{C}).$$

Regardons $G(\mathbb{C})$ comme l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique réel. Soit $\bar{J} \subset H(\mathbb{C})$ l'adhérence de Zariski, dans ce groupe, de $J = \{\exp(ni\ell) \mid n \in 2\mathbb{Z}\}$. Les $g \in J$, donc les $g \in \bar{J}$, vérifient $g^{-1} = \bar{g}$, d'où $\text{Lie}(\bar{J}) \subset i\text{Lie}(G)$. L'algèbre de Lie $\text{Lie}(\bar{J})$ est abélienne, et $\exp(\text{Lie}(\bar{J}))$ est un groupe, nécessairement d'indice fini dans $\bar{J}$. Il existe donc n et $\ell' \in \text{Lie}(\bar{J})$ tel que

$$\exp(ni\ell) = \exp(\ell').$$

On a alors $i\ell \in \text{Lie}(\bar{J}) \subset \text{Lie}(H)$ et $\ell \in \text{Lie}(H)$, ce qui achève la démonstration.

2.6. Lemme. *Soit G un groupe algébrique réel. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) G est compact;
- (ii) pour toute représentation linéaire réelle (resp. complexe) de G , il existe une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) symétrique (resp. hermitienne) définie positive et G -invariante;
- (iii) pour une représentation fidèle de G , il existe une forme comme en (ii).

Pour G connexe, ces conditions équivalent encore à

- (iii') pour une représentation de G , de noyau fini, il existe une forme comme en (ii).

Pour G compact, la G -invariance équivaut à la $G(\mathbb{R})$ -invariance et (ii) est classique. Si (iii) est vérifié, G est sous-groupe d'un groupe orthogonal ou unitaire, et on applique 2.5. La condition (iii') implique que $G(\mathbb{R})$ est compact (comme revêtement fini d'un groupe compact); si G est connexe, G est donc compact.

2.7. Soit G un groupe algébrique linéaire réel. Pour tout automorphisme involutif σ de G , soit $G^{(\sigma)}$ la forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$ définie par l'involution antilinéaire $g \mapsto \sigma(\bar{g})$. On dit que σ est une *involution de Cartan* si $G^{(\sigma)}$ est compact.

Soit C un élément de $G(\mathbb{R})$ de carré central. Une représentation réelle (resp. complexe) de G sera dite C -polarisable s'il existe sur V une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) G -invariante ψ telle que la forme $\psi(x, Cy)$ soit symétrique (resp. hermitienne) et définie positive. On dit alors que ψ est une C -polarisation de V . Un cas particulier du lemme suivant est énoncé sans démonstration dans [4].

2.8. Lemme. *a) Que ψ soit une C -polarisation de V ne dépend que de la classe de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison de C .*

b) Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\text{ad } C$ est une involution de Cartan de G ;
- (ii) toute représentation réelle (resp. complexe) de G est C -polarisable;
- (iii) G admet une représentation réelle (resp. complexe) C -polarisable fidèle.

Si G est connexe, ces conditions équivalent encore à

- (iii') G admet une représentation réelle (resp. complexe) C -polarisable de noyau fini.

Pour prouver a), on note que $\psi(x, gCg^{-1}y) = \psi(g^{-1}x, Cg^{-1}y)$. Une forme sesquilinéaire ψ sur une représentation complexe de G est G -invariante si et seulement si

$$\psi(gx, \bar{g}y) = \psi(x, y) \quad \text{pour } g \in G(\mathbb{C}).$$

Cette condition équivaut à

$$\psi(gx, CC^{-1}\bar{g}Cy) = \psi(x, Cy) \quad \text{pour } g \in G(\mathbb{C})$$

(remplacer y par Cy), i.e. à la $G^{(\text{ad } C)}$ -invariance de $\psi(x, Cy)$. La forme $\text{resp}^{\text{ée}}$ de 2.8 résulte donc de 2.6. La forme non $\text{resp}^{\text{ée}}$ s'en déduit:

- a) la complexifiée (resp. réellifiée) d'une représentation réelle (resp. complexe) C -polarisable est C -polarisable;
- b) une polarisation de V induit une polarisation de toute sous-représentation de V ;
- c) pour V réel (resp. complexe), on a $V \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

2.9. Soient G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$, et t et w des morphismes définis sur $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} G \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m,$$

avec $tw(x) = x^{-2}$ et w central. Soit de plus un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} & \xrightarrow{w} & \underline{S} & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} & \xrightarrow{w} & G_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}. \end{array}$$

Une représentation définie sur $\mathbb{Q}$ $V_{\mathbb{Q}}$ de G est dite *homogène de poids n* si $w(x) * v = x^n \cdot v$ ($v \in V$). Toute représentation est somme de représentations homogènes. Soit $V_{\mathbb{Q}}$ une représentation de poids n . Alors, h munit $V_{\mathbb{Q}}$ d'une structure de Hodge rationnelle de poids n .

On regardera $\mathbb{Q}(n)_{\mathbb{Q}}$ comme une représentation de G , par la règle

$$g * x = t(g)^n \cdot x.$$

Cette convention est raisonnable, car $\underline{S}$ agit sur $\mathbb{Q}(n)_{\mathbb{R}}$ par la même formule. Une *polarisation* d'une représentation de poids n $V_{\mathbb{Q}}$ de G est une forme G -invariante

$$\psi : V_{\mathbb{Q}} \otimes V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}(n)$$

telle que $\psi(x, h(i)y)$ soit une forme symétrique et définie positive sur $V_{\mathbb{R}}$. Une polarisation ψ , étant G -invariante, est aussi $\underline{S}$ -invariante, donc une polarisation de la structure de Hodge rationnelle $V_{\mathbb{Q}}$.

2.10. Lemme. *Pour que la représentation $V_{\mathbb{Q}}$ soit polarisable, il faut et il suffit que la représentation $V_{\mathbb{R}}$ soit $h(i)$ -polarisable.*

Soit $P_{\mathbb{Q}}$ (resp. $P_{\mathbb{R}}$) l'espace des formes bilinéaires $(-1)^n$ -symétriques G -invariantes sur $V_{\mathbb{Q}}$ (resp. $V_{\mathbb{R}}$). On a $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes P_{\mathbb{Q}}$. Les $h(i)$ -polarisations forment un ouvert de $P_{\mathbb{R}}$, et les polarisations de $V_{\mathbb{Q}}$ forment la trace de cet ouvert sur $P_{\mathbb{Q}}$. Le lemme en résulte.

2.11. Proposition. *a) Que ψ soit une polarisation de V ne dépend que de la classe de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison de h .*

b) Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) *$\text{ad } h(i)$ est une involution de Cartan de $\text{Ker}(t)_{\mathbb{R}}$;*
- (ii) *toute représentation homogène de G est polarisable;*
- (iii) *G admet une famille fidèle de représentations homogènes polarisables.*

Si G est connexe, ces conditions équivalent à

- (iii') *G admet une représentation polarisable ρ telle que $\text{Ker}(\rho) \cap \text{Ker}(t)$ soit fini.*

L'assertion a) résulte de 2.8.a). Si G est connexe, alors $\text{Ker}(t)$ est connexe: sinon t serait de la forme t_0^n , avec $n > 1$. Puisque $twx = x^{-2}$, on aurait $n = 2$, et $w(-1) \notin \text{Ker}(t)^0$. Ceci est absurde, car

$$w(-1) \in h(\text{Ker}(t : \underline{S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}})),$$

qui est connexe. Ceci dit, b) résulte de 2.10 et 2.8.b).

3. Rappels sur le groupe spinoriel

Pour les rappels contenus dans ce n^o, on pourra consulter [3].

3.1. Soit V un module libre sur un anneau A , muni d'une forme quadratique Q . Le module V s'identifie à un sous-module de l'algèbre de Clifford $C(V)$; dans $C(V)$, on a

$$v \cdot v = Q(v).$$

On désignera par $C^+(V)$ la partie paire de $C(V)$.

Si V est un module libre sur A , muni d'une forme bilinéaire symétrique ψ , on désignera par $C(V)$ (ou par $C(V, \psi)$) l'algèbre de Clifford de V muni de la forme quadratique $\psi(x, x)$.

3.2. Supposons que A soit un corps de caractéristique 0, et que Q soit non dégénérée. On note $\text{CSpin}(V)$ le *groupe de Clifford*. C'est le groupe algébrique des éléments inversibles g de $C^+(V)$ tels que $gVg^{-1} = V$. On définit un morphisme de $\text{CSpin}(V)$ dans $\text{SO}(V)$ par

$$g \longmapsto (v \longmapsto gvg^{-1}).$$

Le noyau de ce morphisme est réduit aux scalaires: on dispose d'une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{w} \text{CSpin}(V) \longrightarrow \text{SO}(V) \longrightarrow 0.$$

Le groupe spinoriel $\text{Spin}(V)$ est le sous-groupe algébrique de $\text{CSpin}(V)$ noyau de la norme spinorielle

$$N : \text{CSpin}(V) \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Désignons par t l'inverse de N ; on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & \\
& & & \downarrow & & & \\
& & & \text{Spin}(V) & & & \\
& & & \downarrow & \searrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{w} & \text{CSpin}(V) & \longrightarrow & \text{SO}(V) \longrightarrow 0 \\
& & \searrow & & \downarrow & & \\
& & x \mapsto x^{-2} & & \mathbb{G}_m & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & &
\end{array} \tag{3.2.1}$$

Par définition, on dispose aussi de

$$\alpha : \text{CSpin}(V) \hookrightarrow C^+(V)^*. \tag{3.2.2}$$

3.3. On note $(C^+(V))_s$ la représentation de $\text{CSpin}(V)$ sur $C^+(V)$ donnée par

$$g * x = \alpha(g) \cdot x. \tag{3.3.1}$$

On note $(C^+(V))_{\text{ad}}$ la représentation de $\text{CSpin}(V)$ sur $C^+(V)$ déduite de l'action de $\text{SO}(V)$ sur $C^+(V)$ par transport de structures. On a

$$g *_{\text{ad}} x = \alpha(g) \cdot x \cdot \alpha(g)^{-1}. \quad (3.3.2)$$

L'action de $\text{CSpin}(V)$ sur $(C^+(V))_s$ est compatible à la structure de $C^+(V)$ -module à droite de $(C^+(V))_s$. On a un isomorphisme de représentations

$$\text{End}_{C^+(V)}((C^+(V))_s) = (C^+(V))_{\text{ad}}. \quad (3.3.3)$$

On a un isomorphisme de représentations

$$(C^+(V))_{\text{ad}} = \bigoplus^{2i} \bigwedge V. \quad (3.3.4)$$

3.4. Supposons A algébriquement clos. Distinguons deux cas.

1) $\dim(V)$ *impair*: $C^+(V)$ est ici une algèbre de matrices. Soit W un $C^+(V)$ -module simple; W est une *représentation spinorielle* de $\text{CSpin}(V)$:

$$g * W = \alpha(g) \cdot W.$$

On a des isomorphismes de représentations

$$(C^+(V))_s = \text{somme de copies de } W, \quad (3.4.1)$$

$$(C^+(V))_{\text{ad}} = \text{End}_A(W). \quad (3.4.2)$$

2) $\dim(V)$ *pair*: $C^+(V)$ est ici produit de deux algèbres de matrices. Soient W_1 et W_2 deux $C^+(V)$ -modules simples non isomorphes et soit $W = W_1 + W_2$; W_1 et W_2 sont les *représentations semi-spinorielles*.

On a des isomorphismes de représentations

$$(C^+(V))_s = \text{somme de copies de } W, \quad (3.4.3)$$

$$(C^+(V))_{\text{ad}} = \text{End}_A(W_1) \times \text{End}_A(W_2). \quad (3.4.4)$$

Dans les deux cas, $C^+(V)$ est le bicommutant de la représentation W .

3.5. Proposition. Soient Γ un sous-groupe Zariski-dense de $\text{Spin}(V)$ et a un automorphisme de la A -algèbre $C^+(V)$, qui commute à l'action de Γ donnée par $\gamma \mapsto \alpha(\gamma) \cdot x \cdot \alpha(\gamma)^{-1}$. Alors, a est l'identité.

Il suffit de traiter le cas où A est un corps algébriquement clos et où Γ est le groupe Spin tout entier (en effet, commuter avec a est une condition Zariski-fermée).

Avec les notations de 3.4, identifions $C^+(V)$ à une sous-algèbre de $\text{End}_A(W)$.

Il existe un automorphisme $\bar{a}$ de W tel que

$$a(x) = \bar{a}x\bar{a}^{-1} \quad (x \in C^+(V)).$$

Pour $\gamma \in \text{Spin}(V)$, on a par hypothèse

$$\alpha(\gamma)\bar{a}\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1} \cdot x \cdot \bar{a}\alpha(\gamma)\bar{a}^{-1}\alpha(\gamma)^{-1} = x \quad (x \in C^+(V));$$

le commutateur $(\alpha(\gamma), \bar{a}) = \alpha(\gamma)\bar{a}\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1}$ est donc dans le centre de $C^+(V)$.

1) $\dim(V)$ *impair*: ici, $C^+(V) = \text{End}_A(W)$, et $\det_W((\alpha(\gamma), \bar{a})) = 1$, de sorte que $\alpha(\gamma)\bar{a}\alpha(\gamma)^{-1}\bar{a}^{-1}$ est une racine de l'unité ν . Puisque $\text{Spin}(V)$ est connexe, et que, pour $\gamma = e$, on a $\nu = 1$, on a même

$$(\alpha(\gamma), \bar{a}) = 1, \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\gamma)\bar{a} = \bar{a}\alpha(\gamma).$$

2) $\dim(V)$ *pair*: ici, $C^+(V) = \text{End}_A(W_1) \times \text{End}_A(W_2)$ et soit $\bar{a}$ permute les W_i , soit il les respecte. Dans les deux cas, on déduit de ce que

$$\det_{W_i}(\alpha(\gamma)) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

que

$$\det_{W_i}((\alpha(\gamma), \bar{a})) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

et on conclut comme plus haut que

$$\alpha(\gamma)\bar{a} = \bar{a}\alpha(\gamma).$$

Dans les deux cas, $\bar{a}$ est dans le commutant de la représentation, donc commute au bicommutant $C^+(V)$: a est l'identité.

4. Construction de variétés abéliennes

Dans ce paragraphe et une partie du suivant, nous exposons des résultats de [7].

4.1. Soit $V_{\mathbb{Z}}$ un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang $n + 2$ muni d'une forme bilinéaire de discriminant $\neq 0$

$$B : V_{\mathbb{Z}} \otimes V_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

On suppose B d'indice $(n+, 2-)$. On s'intéresse aux morphismes de poids 0 $h : \underline{S} \rightarrow \text{SO}(V_{\mathbb{R}})$ tels que

- 1) B est une polarisation de la représentation $V_{\mathbb{Q}}$ de $\text{SO}(V_{\mathbb{Q}})$;
- 2) les nombres de Hodge de $V_{\mathbb{C}}$ sont

$$h^{-1,1} = h^{1,-1} = 1 \quad \text{et} \quad h^{0,0} = n.$$

4.2. Un morphisme h comme plus haut se relève de façon unique en $\tilde{h} : \underline{S} \rightarrow \text{CSpin}(V_{\mathbb{R}})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} & \xrightarrow{w} & \underline{S} & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \\ \parallel & & \downarrow \tilde{h} & & \parallel \\ \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} & \longrightarrow & \text{CSpin}(V_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}. \end{array}$$

4.3. Lemme. *Relativement à $\tilde{h}$, toute représentation de $\mathrm{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})$ est polarisable (2.9).*

On applique le critère 2.11. b)(iii') à la représentation $V_{\mathbb{Q}}$ de $\mathrm{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})$.

4.4. Lemme. *La structure de Hodge de $C^+(V_{\mathbb{Q}})_{\mathrm{ad}}$ définie par $\tilde{h}$ est de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$.*

On a

$$C^+(V_{\mathbb{Q}})_{\mathrm{ad}} \simeq \bigoplus \bigwedge^{2i} V_{\mathbb{Q}},$$

et on conclut en utilisant que $h^{-1,1}(V_{\mathbb{Q}}) = 1$.

4.5. Proposition. *La structure de Hodge de $C^+(V_{\mathbb{Q}})_s$ définie par $\tilde{h}$ est de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$. La structure de Hodge $C^+(V_{\mathbb{Q}})_s$, munie du réseau $C^+(V_{\mathbb{Z}})$, définit donc une variété abélienne.*

Supposons tout d'abord n impair. Après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, $C^+(V_{\mathbb{Q}})$ devient une algèbre de matrices

$$C^+(V_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{End}(W).$$

Sur W , $\mathrm{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})_{\mathbb{C}}$ agit par $g \cdot w = \alpha(g) \cdot w$: c'est la représentation spinorielle. La représentation $C^+(V_{\mathbb{C}})_s$ est somme de $\dim(W)$ copies de W , de sorte qu'il suffit de prouver que la représentation de poids un W est purement de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$. Sinon, la représentation $\mathrm{End}(W) \simeq C^+(V_{\mathbb{C}})_{\mathrm{ad}}$ ne pouvait pas être purement de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$.

Pour n pair, on a de même

$$C^+(V_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{End}(W') \oplus \mathrm{End}(W''),$$

où W' et W'' sont les représentations semi-spinorielles. Comme plus haut, on prouve que W' et W'' sont de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$, donc aussi $C^+(V_{\mathbb{C}})_s$.

La seconde assertion résulte de 2.3 et 3.3.

4.6. La construction donnée dans ce n° cache le fait (dont nous ne ferons pas usage) suivant, qui se lit sur le diagramme de Dynkin et est la vraie raison pour laquelle tout marche.

Soit $V_{\mathbb{Z}}$ une structure de Hodge polarisée de poids 0 et de type $\{(1, -1), (0, 0), (-1, 1)\}$, avec $h^{1,-1} = 0$. Soit

$$r : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{SO}(V_{\mathbb{C}})$$

l'homomorphisme tel que $r(x) \cdot v^{pq} = x^p v^{pq}$ pour v^{pq} de type (p, q) . Soient T un tore maximal de $\mathrm{SO}(V_{\mathbb{C}})$, muni d'un système de racines simples Φ , $\tilde{T}$ l'image réciproque de T dans $\mathrm{Spin}(V_{\mathbb{C}})$, et $(w_{\alpha})_{\alpha \in \Phi}$ les poids fondamentaux de $\tilde{T}$. L'homomorphisme r admet un et un seul conjugué

$$r_0 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$

tel que les nombres rationnels $\langle w_\alpha, r_0 \rangle \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ soient tous positifs. On vérifie que r_0 est l'homomorphisme $H_{\alpha_1} : \mathbb{G}_m \rightarrow T$ relatif à la racine notée ci-dessous α_1 . Les nombres $\langle w_\alpha, r_0 \rangle$ sont les suivants:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 | & & | & & | & & | & & | & & | \\
 \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \dots & & \alpha_{\ell-2} & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell
 \end{array} & \text{pour } \mathrm{SO}(2, 2\ell - 1), \\
 \\
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 | & & | & & | & & | & & | & & | \\
 \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \dots & & \alpha_{\ell-3} & & \alpha_{\ell-2} & & \alpha_{\ell-1} \\
 & & & & & & & & & & & & \alpha_\ell
 \end{array} & \text{pour } \mathrm{SO}(2, 2\ell - 2).
 \end{array}$$

Soient w un poids dominant d'une représentation spinorielle ou semi-spinorielle et σ l'involution d'opposition. Le point est que

$$\langle w, r_0 \rangle + \langle \sigma w, r_0 \rangle = 1.$$

5. Construction de familles de variétés abéliennes

Nous ferons usage du théorème (à paraître) suivant de A. Borel.

5.1. Théorème (A. Borel). *Soit X/Γ le quotient d'un domaine hermitien symétrique par un groupe arithmétique sans torsion. On sait [2] que X/Γ est de façon naturelle une variété algébrique quasi-projective. Soient S un schéma réduit sur $\mathbb{C}$ et $f : S^{\mathrm{an}} \rightarrow X/\Gamma$ un morphisme d'espaces analytiques. Alors, f est algébrique.*

Soit S lisse sur $\mathbb{C}$. Pour la notion de variation de structures de Hodge $\underline{H}$ sur S , et celle de polarisation de $\underline{H}$, on renvoie à Griffiths [6]. On notera $\underline{H}_{\mathbb{Z}}$ le système local de $\mathbb{Z}$ -modules libres sur S défini par $\underline{H}$, et par $\underline{H}_s$ la structure de Hodge fibre de $\underline{H}$ en $s \in S$.

Pour X le demi-espace de Siegel, le théorème 5.1 a le corollaire suivant, qui généralise 2.3.

5.2. Scholie. *Le foncteur $(a : A \rightarrow S) \mapsto R^1 a_* \mathbb{Z}$ identifie les schémas abéliens polarisés A sur S aux variations de structures de Hodge polarisées de type $\{(0, 1), (1, 0)\}$ sur S .*

5.3. Dans la catégorie des variations de structures de Hodge sur S , toutes les opérations tensorielles habituelles ont un sens. Ainsi

a) si $\underline{H}$ et $\underline{H}'$ sont des variations de structures de Hodge, on dispose de variations de structures de Hodge

$$\underline{H} \otimes \underline{H}', \quad \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{H}, \underline{H}'), \quad \bigwedge^n \underline{H}, \quad \underline{H}^\vee, \quad \underline{\mathrm{End}}(\underline{H}), \dots$$

- b) si $\underline{H}$ est une variation de structures de Hodge de poids 0, et ψ une polarisation de $\underline{H}$ (ou un quelconque morphisme de structures de Hodge symétrique $\underline{H} \otimes \underline{H} \rightarrow \mathbb{Z}(0)$), on dispose de $C(\underline{H}, \psi)$ et $C^+(\underline{H}, \psi)$. En tout point $t \in S$, on a avec les notations de 3.4

$$C^+(\underline{H}, \psi)_t = C^+(\underline{H}_t, \psi)_{\text{ad}}.$$

5.4. Soit $(V_{\mathbb{Z}}, B)$ comme en 4.1, et soit X l'ensemble des $h : \underline{S} \rightarrow \text{SO}(V_{\mathbb{R}})$ du type considéré en 4.1. Se donner un tel h revient à se donner un sous-espace $V_{\mathbb{R}}^-$ de dimension 2 de $V_{\mathbb{R}}$, sur lequel B est défini négatif, et une orientation de $V_{\mathbb{R}}^-$: pour $z = \tau \cdot e^{i\theta} \in \underline{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$, $h(z)$ induit l'identité sur l'orthogonal de $V_{\mathbb{R}}^-$ et la rotation d'angle 2θ sur $V_{\mathbb{R}}^-$. Le groupe $\text{O}(V_{\mathbb{R}})$ agit sur X par transport de structure: $(g * h)(z) = g \cdot h(z) \cdot g^{-1}$, et la description ci-plus haut rend géométriquement évident que X est un espace homogène sous $\text{SO}(V_{\mathbb{R}})$. Le stabilisateur de $h \in X$ est un sous-groupe $\text{SO}(2) \times \text{SO}(n)$, composante neutre d'un sous-groupe compact *maximal*.

5.5. Pour $h \in X$, soit F_h la filtration de Hodge correspondante de $V_{\mathbb{C}}$. La fonction $h \mapsto F_h^1$ identifie X à un ouvert de l'espace des droites isotropes de $V_{\mathbb{C}}$. Cette construction munit X d'une structure complexe pour laquelle F_h est fonction holomorphe de h . On sait que, pour cette structure, les (deux) composantes connexes de X sont des domaines hermitiens symétriques.

5.6. Soit $W_{\mathbb{Q}}$ une représentation de poids n du groupe algébrique $\text{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})$: $w(x) * y = x^n \cdot y$. Soit $\underline{W}_{\mathbb{Q}}$ le système local constant sur X , de fibre $W_{\mathbb{Q}}$. Le groupe $\text{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})$ agit sur $(X, \underline{W}_{\mathbb{Q}})$ par

$$\gamma * (w \text{ en } h \in X) = (\gamma w \text{ en } \gamma h \gamma^{-1} \in X).$$

Chaque $h \in X$ définit $\tilde{h} : \underline{S} \rightarrow \text{CSpin}(V_{\mathbb{R}})$, d'où une $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge sur la fibre de $\underline{W}_{\mathbb{Q}}$ en $h \in X$. On obtient ainsi une variation de $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge de poids n sur X , encore notée $\underline{W}_{\mathbb{Q}}$:

- a) la filtration de Hodge est fonction holomorphe de h ;
- b) l'axiome de transversalité est vérifié (nous ne l'utiliserons que dans un cas trivial).

Cette construction est compatible au produit tensoriel. En particulier, une polarisation $\psi : W_{\mathbb{Q}} \otimes W_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}(-n)$ de la représentation $W_{\mathbb{Q}}$ définit une polarisation de $\underline{W}_{\mathbb{Q}}$.

Soient $W_{\mathbb{Z}}$ un réseau entier dans $W_{\mathbb{Q}}$ et Γ un sous-groupe de $\text{CSpin}(V_{\mathbb{Q}})$, discret dans $\text{CSpin}(V_{\mathbb{R}})$, agissant librement sur X et tel que $\Gamma W_{\mathbb{Z}} = W_{\mathbb{Z}}$. Alors, le système local constant $\underline{W}_{\mathbb{Z}}$ sur X , de fibre $W_{\mathbb{Z}}$, est sous-jacent à une variation de structure de Hodge Γ -équivariante $\underline{W}$ sur X , comme plus haut. Par passage au quotient, elle définit une variation de structures de Hodge $\underline{W}$ sur X/Γ .

Si $W_{\mathbb{Q}}$ est une représentation de $\mathrm{SO}(V_{\mathbb{Q}})$, la même construction s'applique aux sous-groupes discrets de $\mathrm{SO}(V_{\mathbb{Q}})$.

5.7. Proposition. *Soit $(\underline{H}, \psi)$ une variation de structures de Hodge polarisée de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$, avec $h^{1, -1} = 1$, sur un schéma lisse et connexe S . Il existe*

- a) *un revêtement fini étale surjectif $u : S_1 \rightarrow S$;*
- b) *un schéma abélien A sur S_1 ;*
- c) *une $\mathbb{Z}$ -algèbre C , et $\mu : C \hookrightarrow \mathrm{End}_{S_1}(A)$;*
- d) *un isomorphisme de variations de structures de Hodge*

$$u : C^+(\underline{H}, \psi) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbb{Z})$$

qui induise un isomorphisme de systèmes locaux d'algèbres

$$u_{\mathbb{Z}} : C^+(\underline{H}_{\mathbb{Z}}, \psi) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_C(R^1 a_* \mathbb{Z}).$$

Soit $(V_{\mathbb{Z}}, B)$ un $\mathbb{Z}$ -module muni d'une forme bilinéaire symétrique, isomorphe aux $(H_{s\mathbb{Z}}, \psi)$, et reprenons les notations de 5.4. Soient n un entier,

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathrm{SO}(V_{\mathbb{Z}}) \mid \gamma \equiv 1 \pmod{n}\}$$

et

$$\tilde{\Gamma} = \{\gamma \in \mathrm{CSpin}(V_{\mathbb{Q}}) \mid \alpha(\gamma) \equiv 1 \pmod{n} \text{ dans } C^+(V_{\mathbb{Z}})\}.$$

On suppose n assez grand pour que Γ et $\tilde{\Gamma}$ soient sans torsion.

Il existe un revêtement fini étale $v : S'_1 \rightarrow S$ tel que le système local $v^* \underline{H}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ soit trivial. Choisissons un isomorphisme σ_n entre ce système local et le système local constant $V_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. Soient $s \in S'_1$ et $\sigma : V_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} H_{s\mathbb{Z}}$ une isométrie telle que $\sigma \equiv \sigma_n \pmod{n}$ (on choisit σ_n de sorte que de tels σ existent). La structure de Hodge h_s de H_s définit $\sigma^{-1}(h_s) \in X$. L'image de $\sigma^{-1}(h_s)$ dans X/Γ ne dépend que de s . On définit ainsi

$$m : S'_1 \longrightarrow X/\Gamma$$

et un isomorphisme compatible aux polarisations

$$\underline{H} \simeq m^* \underline{V}.$$

Soit

$$S_1 = S'_1 \times_{X/\Gamma} X/\tilde{\Gamma} :$$

$$\begin{array}{ccccc} & & S_1 & & \\ & p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & \\ S & \xleftarrow{v} S'_1 & & & X/\tilde{\Gamma} \\ & \searrow m & & \swarrow & \\ & & X/\Gamma & & \end{array}$$

Sur S_1 , on dispose de

a) un isomorphisme $(vp_1)^* H \simeq (mp_1)^* \underline{V}$;

b) une variation de structure de Hodge, image réciproque par p_2 de celle sur $X/\tilde{\Gamma}$ définie par la représentation $(C^+(V_{\mathbb{Q}}))_s$ et le réseau $C^+(V_{\mathbb{Z}})$.

D'après 5.2, 5.6 et 4.5, cette variation de structures de Hodge correspond à un schéma abélien $a : A \rightarrow S_1$.

c) Soit C l'algèbre $C^+(V_{\mathbb{Z}})$. Le schéma abélien construit en b) est à multiplication complexe par C , et la variation de structures de Hodge $\underline{\text{End}}_C(R^1 a_* \mathbb{Z})$ est

$$p_2^*((\underline{C}^+(V_{\mathbb{Z}}))_{\text{ad}}).$$

Combinant ceci avec a), on trouve un isomorphisme de systèmes locaux d'algèbres et de variation de structures de Hodge

$$\underline{C}^+(vp_1^* H) \simeq \underline{\text{End}}_C(R^1 a_* \mathbb{Z}).$$

Ceci prouve 5.7.

6. Surfaces $K3$

6.1. Une surface $K3$ polarisée sur un corps de caractéristique 0, K , est une surface $K3$ sur K , soit Y , munie de $\eta \in \text{NS}(Y) = \text{Pic}(Y)$ qui soit la classe d'un faisceau inversible ample. Pour $K = \mathbb{C}$, on identifiera $\text{NS}(Y)$ à une partie de $H^2(Y, \mathbb{Z})$.

6.2. Une *famille de surfaces $K3$* paramétrée par un schéma S de caractéristique 0, est un morphisme propre et plat $f : Y \rightarrow S$ dont les fibres sont des surfaces $K3$. Une *polarisation* de $f : Y \rightarrow S$ est une section η de $\text{Pic}_S(Y)$, qui en chaque $s \in S$ est une polarisation de $Y_s = f^{-1}(s)$.

Pour tout nombre premier ℓ , on identifie η à une section de $R^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell}$; on désigne par $P^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell}$ l'orthogonal de η (pour le cup-produit); c'est un sous- $\mathbb{Z}_{\ell}$ -faisceau de $R^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell}$. Le cup-produit

$$R^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell} \otimes R^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell} \longrightarrow R^4 f_* \mathbb{Z}_{\ell}$$

et le morphisme trace

$$R^4 f_* \mathbb{Z}_{\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{\ell}(-2)$$

induisent

$$\psi_{\ell} : P^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell}(1) \otimes P^2 f_* \mathbb{Z}_{\ell}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell}. \quad (6.2.1)$$

6.3. Prenons pour S un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$. Alors, $R^2 f_* \mathbb{Z}$ est une variation de structures de Hodge sur S ; η est en tout point de type $(1, 1)$ et son orthogonal $P^2 f_* \mathbb{Z}$ est encore une variation de structures de Hodge. Comme plus haut, le cup-produit définit

$$\psi : P^2 f_* \mathbb{Z}(1) \otimes P^2 f_* \mathbb{Z}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}. \quad (6.3.1)$$

Cette fois, l'opposé de ψ est une polarisation de la variation de structures de Hodge $P^2 f_* \mathbb{Z}(1)$. De plus, ψ_ℓ se déduit de ψ via l'isomorphisme

$$(P^2 f_* \mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq P^2 f_* \mathbb{Z}_\ell(1).$$

Pour tout $s \in S$, la fibre en s $(P^2 f_* \mathbb{Z}(1))_s$ est la partie primitive de la cohomologie de $H^2(Y_s, \mathbb{Z})$. La structure de Hodge de $(P^2 f_* \mathbb{Z}(1))_s$ est de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$, avec $h^{-1,1} = 1$ ((1.1)(i)).

L'action de $\pi_1(S, s)$ sur $H^2(Y_s, \mathbb{Z})$ induit

$$\pi : \pi_1(S, s) \longrightarrow \mathrm{O}(P^2(Y_s, \mathbb{Z})(1)_{\mathbb{Z}}, \psi). \quad (6.3.2)$$

6.4. Proposition. *Pour toute surface K3 polarisée complexe Y_0 , il existe une famille de surfaces K3 polarisées $f : Y \rightarrow S$ comme plus haut, avec $Y_s \simeq Y_0$ pour un $s \in S$, et telle que l'image de π (6.3.2) soit d'indice fini.*

Soit $f_T^\wedge : Y_T^\wedge \rightarrow T^\wedge$ la déformation formelle verselle de Y_0 . Puisque $H^0(Y_0, T^1) = 0$, $T^\wedge$ est même un schéma formel de modules pour Y_0 , mais peu importe. Puisque $H^2(Y_0, T^1) = 0$ ((1.1)(i)), $T^\wedge$ est le spectre d'un anneau de séries formelles sur $\mathbb{C}$. De $f_T^\wedge$, on déduit une variation de structures de Hodge (non polarisée) sur $T^\wedge$. D'après (1.1.1), celle-ci est la déformation universelle de $\{ \text{la structure de Hodge } H^2(Y_0, \mathbb{Z}), \text{ munie du cup-produit} \}$.

Soit $\bar{\eta}$ l'image de η par l'application composée

$$H^2(Y_0, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\mathrm{DR}}^2(Y_T^\wedge / T^\wedge) \longrightarrow R^2 f_{T*}^\wedge \mathcal{O}.$$

Soit $S^\wedge$ le sous-schéma formel de $T^\wedge$ d'équation $\bar{\eta} = 0$ et soit $f^\wedge : Y^\wedge \rightarrow S^\wedge$ induit par $f_T^\wedge$. Puisque $h^{0,2} = 1$, $S^\wedge \subset T^\wedge$ est défini par une équation; celle-ci fait partie d'un système régulier de paramètres, de sorte que $S^\wedge$ est un anneau de séries formelles. Sur $S^\wedge$, η provient d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ ample sur $Y^\wedge$; $f^\wedge$ est donc algébrisable. En outre, sur $S^\wedge$, la variation de structure de Hodge polarisée $(P^2(Y^\wedge / S^\wedge, \mathbb{Z})(1), \psi)$ est une déformation universelle de $(P^2(Y_0, \mathbb{Z})(1), \psi)$.

Posons $S^\wedge = \mathrm{Spec}(A^\wedge)$, et exprimons $A^\wedge$ comme limite inductive d'anneaux de type fini sur $\mathbb{C}$. Puisque $Y^\wedge$ est algébrisable, il existe un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y^\wedge & \longrightarrow & Y \\ f^\wedge \downarrow & & \downarrow f \\ S^\wedge & \longrightarrow & S \end{array}$$

avec S de type fini sur $\mathbb{C}$ et Y une famille de surfaces K3 polarisée sur S (on ne suppose pas que $S^\wedge$ soit un complété de S). On peut prendre S normal et connexe; soit $s \in S$ l'image du point fermé de $S^\wedge$.