

nehmen. Durch das Savart'sche Polariskop in der Modification, wie ich es oben beschrieben habe, ist uns aber ein Mittel gegeben, diese und analoge Fragen mit großer Genauigkeit zu beantworten.

Bern, im December 1862.

II. Ueber Anwendung der Quenstedt'schen Krystall-Projection; von Websky, Oberberggrath in Breslau.

Die von Quenstedt angegebene Projections-Weise der Krystalle ¹⁾ beruht darauf, daß man die Flächen eines Krystalls durch den Endpunkt einer $= 1$ gesetzten Axe legt und die Sectionslinien derselben auf einer — in der Regel durch die anderen Axen gehenden Ebene verzeichnet; jeder Schnittpunkt zweier Sectionslinien bildet einen Zonenpunkt und repräsentirt eine Zonenaxe, deren Lage zu den Hauptaxen bestimmt wird durch den Zonenpunkt einerseits und andererseits durch den über der Projections-ebene gedachten Endpunkt der $= 1$ gesetzten Axe.

In Nachstehendem wird die Aufgabe behandelt: zu einem solchen Projectionsbilde eines Krystalls die Sectionslinien eines zweiten, mit dem ersteren nach einem bekannten Zwillingsgesetz verbundenen Krystalls, bezogen auf die Axen des ersteren, hinzuzufügen, so daß man beide Krystalle in ihrer Verbindung zeichnen und berechnen kann, gerade so, als wenn sie ein einziges Individuum wären.

1) Methode der Krystallographie von Quenstedt, 1840. — Beiträge zur rechnenden Krystallographie von Quenstedt, 1848. — Handbuch der Mineralogie von Quenstedt, 1855. — Elemente der rechnenden Krystallographie von Schröder, 1852. — Lehrbuch der Krystallographie von Rammelsberg, 1852.

Naumann ¹⁾ theilt alle Zwillingskrystalle in zwei Klassen, nämlich in solche mit parallelen Axen, sogenannte *Ergänzungs-Zwillinge*: welche in den Systemen mit rechtwinkligen Axen nur bei hemiëdrisch ausgebildeten Krystallen und beziehungsweise bei einigen Zwillingen der schiefaxigen Krystall-Systeme vorkommen; und zweitens in solche mit nicht parallelen Axen; die letzteren werden definirt als eine Vereinigung zweier Individuen nach dem Gesetz, daß

- 1) das eine Individuum gegen das andere um eine reelle, auf irgend einer bestimmten Fläche — der Zwillingsfläche — senkrecht stehende Linie — gedreht erscheint und
- 2) diese Drehung immer einen Winkel von 180° umfaßt.

Nur die Darstellung der Zwillinge der zweiten Klasse in der Form einer Quenstedt'schen Projectionsfigur macht einige Schwierigkeiten, da die der ersteren nur in der Ergänzung zur Vollflächigkeit besteht.

Des bequemeren Ausdrucks halber will ich trotz der physikalischen Gleichheit dasjenige Individuum, in dessen Axenebene die Projections-Ebene liegt „*Grundkrystall*“ nennen, wogegen das andere Individuum, dessen Elemente auf die Axen des Grundkrystalls bezogen ausgedrückt werden sollen „*Nebenkrystall*“ heißen mag; *correspondirende* „Zonenpunkte, Sectionslinien etc. will ich solche Elemente des Nebenkrystalls nennen, welche mit gegebenen des Grundkrystalls gleiche Coordinaten, Axenschnitte etc. haben und in *demselben* Quadranten liegen.

Zur Grundlage dient die Lösung der Aufgabe

zu einem gegebenen Zonenpunkt *P* (Fig. 6 Taf. IV eine perspectivische Zeichnung) im Grundkrystall den correspondirenden Zonenpunkt zu finden.

Die Projections-Ebene gehe durch die Axen *a*, *b* des dreiaxigen — nicht rechtwinkligen — Systems der Axen *a*, *b*, *c*; *Z* sey der Zonenpunkt der Zwillingsaxe also *CZ* die Zwillingsaxe selbst; dann ist *PZ* die Sectionslinie einer

1) Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie, Bd. II S. 202.

Ebene durch den Zonenpunkt P und die Zwillingsaxe, in der gleichzeitig die Zonenaxe PC liegt. Denken wir uns nun PC und CZ fest verbunden und gleichmäÙig um CZ um den Winkel von 180° gedreht, so beschreibt PC um CZ einen Kegelmantel, tritt aber am Ende der Drehung wieder in die Ebene PCZ und zwar mit der Stellung CQ ein, in der Winkel $PCZ = ZCQ = \alpha$ ist.

Wenn man diese neue Richtung CQ als Zonenpunkt ausdrücken will, so ist, da sie bereits durch C geht, dieselbe nur bis zu ihrem Durchschnittspunkt P_1 ¹⁾ mit der Projectionsebene zu verlängern, welcher Durchschnittspunkt wegen der Lage von CQ in der Ebene PCZ in die Verlängerung der Sectionslinie PZ fallen muÙ, oder mit anderen Worten:

der correspondirende Zonenpunkt liegt auf der Verbindungslinie zwischen dem Zonenpunkt und dem Zonenpunkt der Zwillingsaxe.

Dies gilt sowohl für rechtwinklige, wie für schiefwinklige Axen.

Um den Ort des Punktes P_1 zu bestimmen, muÙ die Entfernung P_1Z ermittelt werden.

Man berechnet unter Berücksichtigung der Axenwinkel aus den Coordinaten des Zonenpunktes Z der Zwillingsaxe $= \frac{a}{m_0}, \frac{b}{n_0}$ und aus den Coordinaten $= \frac{a}{m}, \frac{b}{n}$ des Zonenpunktes P die Dreiecksseiten PC , CZ und PZ , ferner aus diesen die Winkel $PCZ = \alpha$, $CZP = \beta$. Nun ist in dem Dreieck P_1CZ bekannt die gemeinschaftliche Seite CZ , dagegen

$$\text{Winkel } P_1CZ = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$$

$$\text{Winkel } CP_1Z = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$$

und folglich

$$P_1Z = CZ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Wenn der Winkel $\alpha > 90^\circ$ ist, so fällt P_1 zwischen P und Z , wenn $\alpha < 90^\circ$, so fällt P_1 auÙerhalb der Länge

1) Es ist dies in der Fig. 6 der rechts liegende der beiden Punkte P , an dem leider der Index ₁ vergessen worden. P .

PZ und zwar seitlich P , wenn $\alpha > \beta$, seitlich Z , wenn $\alpha < \beta$ wird.

Ist $\alpha = 90^\circ$, so fallen P und P_1 zusammen; wird $\alpha = \beta$, so wird die Linie CQ parallel PZ , d. h. parallel der Projectionsebene und der Zonenpunkt P_1 liegt im Unendlichen.

Ein wichtiger Umstand ist nun, dafs

Zonenpunkte, welche im Grundkrystall in *einer* Sectionslinie liegen, ihre correspondirenden auch in *einer* Sectionslinie liegend auffinden lassen.

Die Richtigkeit ergibt sich durch die Betrachtung, dafs die gemeinschaftliche Lage der Zonenpunkte in *einer* Sectionslinie nicht Anderes bedeutet, als dafs die von ihnen vertretenen Zonenaxen in *einer* Fläche liegen, welche eben durch jene Sectionslinie dargestellt wird; da nun diese Zonenaxen bei einer Drehung des ganzen Individuums aus dieser Fläche nicht heraustreten, so müssen auch ihre correspondirenden Zonenpunkte in irgend einer geraden Linie liegend aufgefunden werden; dagegen wird die Reihenfolge der correspondirenden in sofern eine andere seyn, als eine gewisse Anzahl derselben in einer anderen Stelle der Reihe und in umgekehrter Ordnung, verglichen mit den ihnen entsprechenden Zonenpunkten des Grundkrystalls, auftritt.

Erwägen wir nun, dafs der gegebene Zonenpunkt, sein correspondirender und der Zonenpunkt der Zwillings-Axe in einer geraden Linie liegen, so finden wir,

wenn zu zwei gegebenen Zonenpunkten P und T die correspondirenden P_1 und T_1 bekannt sind, zu allen zwischen P und T liegenden Zonenpunkten z. B. R, S, U etc. die correspondirenden R_1, S_1, U_1 etc., wenn wir die Linien RZ, SZ, UZ etc. bis zum Durchschnitt mit der Linie P_1T_1 in den Punkten R_1, S_1, U_1 etc. verlängern.

Die Zonenpunkte fallen — wie wir oben fanden — mit ihren correspondirenden zusammen, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist; diefs trifft, weil die Zwillingsaxe senkrecht auf der Zwillings-Fläche steht, zu für alle Zonenpunkte in der Sec-

tionslinie der Zwillingsfläche; die von ihnen repräsentirten Zonen sind daher *gemeinschaftliche*, im Grund- und Nebenkry stall zusammenfallende; ist daher

zu einem Zonenpunkte P der correspondirende P_1 bekannt, so findet man zu allen durch P gehenden *Sectionslinien* die correspondirenden, wenn man ihre Durch schnittspunkte A, B etc. in der Sectionslinie der Zwillings-Fläche mit dem correspondirenden Zonenpunkte P_1 verbindet.

Zu den gemeinschaftlichen Zonenpunkten gehört auch derjenige, welcher im Unendlichen der Sectionslinie der Zwillingsfläche liegt, oder mit anderen Worten, dessen Zonenaxe mit der Sectionslinie der Zwillingsfläche parallel geht; alle Flächen, welche dieser Zone im Grund- und Nebenkry stall angehören, bilden Sectionslinien, welche der Sectionslinie der Zwillingsfläche parallel liegen. Zu diesen Flächen gehört auch diejenige des Grundkry stalls, welche parallel der Projectionsebene (wohlgemerkt durch C) geht, (für rechtwinklige Axen die Gradendfläche), und daher durch keine Sectionslinie repräsentirt wird, da diese im Unendlichen liegt; dagegen erzeugt ihre correspondirende eine mit der Sectionslinie der Zwillingsfläche parallele Sectionslinie.

Aus dem bisher Gesagten, sowohl für rechtwinklige wie schiefwinklige Axen geltend, folgt, dafs man überhaupt nur der directen Bestimmung des Zonenpunktes Z der Zwillings-Axe und *eines* correspondirenden Zonenpunktes P_1 neben den gemeinschaftlichen Zonen der Axenschnitte A und B der Zwillingsfläche bedarf, um alle andern correspondirenden Elemente des Nebenkry stalls aus den gegebenen des Grundkry stalls mit alleiniger Hülfe der Zonenpunkt- und Sectionslinien-Formeln deduciren zu können.

An Stelle eines beliebigen Punktes P wählt man aber zweckmäfsig den Zonenpunkt O des Zeichens $= \frac{a}{\infty}, \frac{b}{\infty}$, d. h. den Nullpunkt des Axensystems des Grundkry stalls, weil seine Benutzung sich am meisten an die Bezeichnungsweise der Flächen durch Axenschnitte anschliesst.

Die Deduction gestaltet sich dann, wie folgt; zunächst

ist ersichtlich, daß der correspondirende Zonenpunkt O_1 in der Verbindungslinie von Z nach O , beziehungsweise in ihrer Verlängerung liegen muß. In dem schiefwinkligen Axensysteme a, b, c (Fig. 7 Taf. IV), worin OA ein Stück der Axe a , OB ein solches der Axe b und die Axe c so in O errichtet ist, daß ihr Endpunkt C senkrecht über V gedacht wird, sey AB die Sectionslinie der Zwillingfläche, Z der Zonenpunkt der Zwillingsaxe und O_1 der correspondirende Zonenpunkt von O .

Die Linie O_1A ist nun die correspondirende Sectionslinie von OA , weil A ein Zonenpunkt der Sectionslinie der Zwillingfläche ist (wohlgemerkt *nicht* von der Axe a selbst, welche nur für den Grundkrystall mit der Sectionslinie der Fläche $= \infty a : b : \infty c$ zusammenfällt); ebenso ist die Linie O_1B die correspondirende von OB . Alle von den Axenschnitten der Axe a repräsentirten Zonen, z. B. $\frac{a}{m}, \frac{1}{\infty} b$ haben ihre correspondirenden Zonenpunkte in der Linie O_1A , welche erhalten werden, wenn man die ersteren mit Z verbindet und diese Verbindungslinien bis zum Durchschnitte mit O_1A , also z. B. für $\frac{a}{m}$ in $\frac{a}{m_1}$ verlängert. Analog werden die correspondirenden Zonenpunkte der Sectionslinie OB in der Linie O_1B gefunden.

Für den Axenschnittpunkt des Zeichens $= \infty a, \frac{1}{\infty} b$ muß aus Z die Linie ZD_1 parallel mit OA und ebenso für den Axenschnittpunkt des Zeichens $= \frac{1}{\infty} a, \infty b$ aus Z die Linie ZE_1 parallel mit OB gezogen werden, um die correspondirenden Zonenpunkte der für den Grundkrystall im Unendlichen liegenden Zonenpunkte D und E zu finden. Die Punkte O_1, D_1 und E_1 bestimmen nun die Lage der drei Hauptaxen c, a und b des Nebenkristalls, bezogen auf die Axen des Grundkrystalls, indem man diese Punkte nur mit dem über der Projectionsebene erhaben gedachten Endpunkt der Axe c in C zu verbinden hat, um die Axen selbst zu erhalten; die Verbindungslinie E_1D_1 ist die

Sectionslinie der correspondirenden Fläche des Zeichens $= \infty a : \infty b : c$, welche im Grundkrystall ihre Sectionslinie im Unendlichen hat; der Parallelismus mit der Sectionslinie der Zwillingssähe geht aus der Construction hervor.

Die Punkte D_1 , E_1 und O_1 sind für das Zeichnen der Zwillingskrystalle von Wichtigkeit, weil man aus ihnen und in Verbindung mit der Lage des Punktes V und der Länge der Verticalen VC aufer der Richtung auch das Verkürzungs-Verhältniß der Axen des Nebenkrystalls für beliebige Ansichten ohne Schwierigkeit construiren und berechnen kann.

Nunmehr haben wir nur noch den Weg zu ermitteln, auf welchem aus den Axenschnitten der Zwillingssähe $= \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ der Zonenpunkt Z der Zwillingssähe, sowie der correspondirende Zonenpunkt O_1 zu finden sey; diese Ermittlung ist für rechtwinklige Äxen leicht, für schiefwinklige mit einigen Weitläufigkeiten verbunden; im Allgemeinen benutzen wir aber hierzu neben der Projectionsebene durch die Axen a, b eine zweite Projectionsebene durch die Zwillingssähe CZ und die Axe c , in welcher also auch die Zonenaxe OC und folglich auch deren correspondirende O_1C belegen ist; ferner erscheinen in ihr die Projectionsebene der Axen a, b des Grundkrystalls und die mit ihr parallele Fläche $= \infty a : \infty b : c$ als parallele Sectionslinien O_1O und C nach ∞N durch die Punkte O und C , sowie die correspondirende Fläche der letztgenannten als Sectionslinie CN_1 , deren directe Bestimmung im Interesse der Kürze der Rechnung oft von Werth ist.

Die zu bestimmenden Elemente sind nun

- 1) die Richtung der Linie OZ gegen eine der Axen a oder b ;
- 2) die in dieser Linie zu messenden Centraldistanzen OZ , O_1O und N_1O .

Für rechtwinklige Axen steht die Projectionsebene durch die Zwillingssähe und die Axe c , sowohl senkrecht auf der Projectionsebene durch die Axen a und b , als auch auf der

Zwillingsfläche, und somit senkrecht auf der Sectionslinie der Zwillingsfläche.

Wenn daher in der Projectionsebene durch die Zwillingsaxe TC (Taf. IV Fig. 8) die Sectionslinie der Zwillingsfläche ist, so ist der Winkel $TCO = \delta =$ der Neigung der Zwillingsfläche zur Axe c und bestimmt durch die Gleichung

$$\tan \delta = \frac{TO}{CO},$$

oder, wenn $CO = 1$ gesetzt wird

$$\tan \delta = \frac{\frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{\nu}}{\sqrt{\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{b}{\nu}\right)^2}},$$

woraus, da Winkel $TCZ = 90^\circ$, die Centraldistanz OZ des Zonenpunktes der Zwillingsaxe $= \cotg \delta$ folgt.

Da ferner Winkel $O_1CO = 180^\circ - 2(90^\circ - \delta) = 2\delta$, so ergibt sich die Centraldistanz $O_1O = \tan 2\delta$, und aus der Rechtwinkligkeit der Axen die Centraldistanz $ON_1 = \cotg 2\delta$.

Direct aus den Axenabschnitten $= \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ der Zwillingsfläche abgeleitet, ist

$$OZ = \sqrt{\left(\frac{\mu}{a}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{b}\right)^2}$$

und die Coordinaten des Zonenpunktes Z

$$\frac{a}{m_0} = -\frac{\mu}{a}, \quad \frac{b}{n_0} = -\frac{\nu}{b} \dots$$

Für schiefwinklige Axen kann man die Coordinaten des Zonenpunktes Z entweder durch Auflösung einer Reihe von sphärischen und ebenen Dreiecken finden, oder für das schiefwinklige Axensystem ein rechtwinkliges substituieren; indessen scheint sich mit Rücksicht auf die Anwendung geometrischer Construction nachstehender Weg am meisten zu empfehlen.

In dem zwei- und eingliedigen Axensystem (Taf. IV Fig. 9a Projectionsbild) seyen AO und BO Theile der Axen a und b , und in O die Axe c so errichtet, daß C senk-

recht über V gedacht wird; mithin, wenn der Winkel $COV = \beta$, $OV = c \cos \beta$ und $CV = c \sin \beta$ ist; AB sey die Sectionslinie der Zwillingsfläche. Man zieht nun VU senkrecht auf AB und findet (Fig. 9b Profil) den Zonenpunkt Z der Zwillingsaxe durch die Proportion $VU:CV = CV:VZ$.

Man bilde nun (Fig. 9c Profil) aus OZ , CZ und $OC = c$ das Dreieck OCZ und findet die Centraldistanzen O_1O und N_1O durch Verdoppelung der Winkel OCZ und $N \propto CZ$ wie für den allgemein correspondirenden Zonenpunkt P_1 .

Für einen Zwilling des zwei- und eingliedrigen Systems, seyen (Fig. 10 Projectionsbild) AO und BO Theile der Axen a und b , und in O die Axe c so errichtet, daß ihr Endpunkt C senkrecht über V gedacht wird, so daß, wenn Winkel $BOC = \alpha$ und der Winkel zwischen den Axenebenen BOC und $BOA = B$,

$$LO = c \cos \alpha$$

$$LV = c \sin \alpha \cos B$$

$$CV = c \sin \alpha \sin B$$

gefunden wird; AB ist die Sectionslinie der Zwillingsfläche.

Unter Benutzung obiger Werthe zieht man VU senkrecht auf AB und bestimmt VZ durch die Proportion $VU:CV = CV:VZ$ und verfährt dann weiter, wie für das zwei- und einaxige System angegeben wurde.

Will man die Construction für den Zwilling des ein- und eingliedrigen Systems durch Rechnung verfolgen, so bedarf man noch der Hülfslinien VB und VO .

Da $BL = BO - LO$ und LV berechnet, so findet man mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks VBL die Seite VB und den Winkel VBL , welcher um den aus Dreieck OBA zu berechnenden Winkel OBA vermehrt, den Winkel VBU giebt. Aus diesem und der Seite VB folgt in dem rechtwinkligen Dreieck VBU die Seite VU , so daß dadurch das erste Glied der Proportion $VU:CV = CV:VZ$ gefunden wird, in der bereits die mittleren Glieder bekannt waren; ferner berechnet man aus Dreieck OVL den Winkel LVO , sowie die Seite OV ; da nun Winkel $UVL = \text{Winkel } OBA$, so ergiebt sich der Winkel OVZ als

Complement der Winkelsumme LVO und OBA , so daß die Elemente des Dreiecks OVZ gegeben sind, also die Länge OZ , d. h. die Centraldistanz des Zonenpunktes der Zwillingsaxe, sowie der Winkel zwischen OZ und den Axen a, b , berechnet werden kann.

Um das specielle Zwillingsgesetz eines Zwillingskrystalls d. h. die Zwillingsfläche oder Zwillingsaxe zu finden, dienen ganz besonders die gemeinschaftlichen Zonen zum Ausgangspunkt.

Wenn man deren zwei beobachtet, so ist die von ihnen bestimmte Fläche die Zwillingsfläche. Kann man direct oder indirect nur eine gemeinschaftliche Zone erkennen, so muß man den Umstand zu Hülfe nehmen, daß die Zwillingsfläche jederzeit den Winkel oder sein Complement halbt, den eine Fläche mit ihrer correspondirenden bildet.

Kann man keine gemeinschaftliche Zone beobachten, so muß man nach Anleitung des Vorstehenden drei Flächen des einen Individuums, die *nicht* in einer Zone liegen, bezogen auf die Axen des anderen Individuums durch Winkelmessung feststellen, die Axen des letzteren zum Projectionsbilde zum Anhalten nehmen und die durch Winkelmessung bestimmten Flächen in Form von Sectionslinien eintragen. Die von ihnen bestimmten drei Zonenpunkte werden nun als correspondirende betrachtet und mit den ihnen entsprechenden des Grundkrystalls durch Linien verbunden; schneiden sich letztere in einem Punkte, so ist dies der Zonenpunkt der Zwillingsaxe, wo nicht, so ist die betreffende Verwachsung nicht mit Hülfe einer hypothetischen Drehung von 180° um eine Zwillingsaxe zu erklären.

Als Beispiel betrachten wir einen Zwilling des Staurooliths von Faido (Fig. 11 a, b). Der einfache Krystall zeigt die gewöhnlichen Flächen P, M, O und r . Nach Naumann ist der (von unserer Axe a halbirte) Winkel $M | M = 129^\circ 20'$ und der (von unserer Axe c halbirte) Winkel $r | r = 69^\circ 16'$; hiernach ist

$$\begin{aligned} a : b : c &= 0,69071 : 1,45902 : 1 \\ &= 1 : 2,11233 : 1,4478 \end{aligned}$$

Bei genügender Ausdehnung der Fläche O tritt an Zwillingen sogleich der Parallelismus der Kanten $O \mid r$ an je zwei Flächen des Zeichens r entgegen, dem auch die vier einspringenden Kanten folgen, welche die Flächen O des einen Krystalls mit den Flächen O_1 des anderen Krystalls machen. Die Zone des Zeichens $= a, \frac{1}{\infty} b$ ist daher eine gemeinschaftliche. Von dem einspringenden Winkel $O \mid O_1$ wurde mittest eines Tropfens leichtflüssigen Metalls (Composition nach Lipkowitz, Schmelzpunkt 60° R.) ein Abdruck genommen und der Winkel des Abdrucks mit $119^\circ 40'$ gemessen.

Da die anliegenden Flächen dieses Winkels correspondirende sind, so wird dieser Winkel von der Zwillingsfläche halbirt, so daß ihr ein Axenschnitt

$$\frac{b}{n} = \frac{\tan 59^\circ 50' \sin 34^\circ 38' b}{\tan 34^\circ 38' \tan 61^\circ 40'} = 0,67016 b$$

entspricht, wofür

$$0,6666 \dots b = \frac{2}{3} b$$

zu setzen ist, einer Abmessung von $119^\circ 24'$ entsprechend.

Führt man, um dem Zonenpunkte der Zwillingsaxe positive Coordinaten zu verschaffen, die Zwillingsfläche mit negativen Vorzeichen ein, so berechnen sich ihre Axenschnitte

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mu} &= -0,69071 = -\frac{1}{1,44778} \\ \frac{b}{\nu} &= -0,97268 = -\frac{1}{1,02809}. \end{aligned}$$

Es macht ferner die Linie OZ mit der Axe b einen Winkel von $54^\circ 37'$; die Centraldistanz OZ des Zonenpunktes der Zwillingsaxe ist

$$= \cotg 29^\circ 23' = +1,775678$$

und die Coordinaten des Punktes Z

$$\begin{aligned} \frac{a}{m_o} &= +1,44778 = +\frac{1}{0,69071} \\ \frac{b}{n_o} &= +1,02809 = +\frac{1}{0,97268}; \end{aligned}$$

die Centraldistanz $O_1 O$ ist $= -\tan 58^\circ 46' = -1,64916$ und die Coordinaten des Punktes O_1

$$\frac{n}{m} = -1,34487 = -\frac{1}{0,743564}$$

$$\frac{b}{n} = -0,955015 = -\frac{1}{1,047104};$$

die Centraldistanz $N_1 O$ ist $= 0,606257$ und die Axenschnitte der Sectionslinie der correspondirenden Gradendfläche

$$\frac{a}{\mu} = 0,743564 = \frac{1}{1,34487}$$

$$\frac{b}{\nu} = 1,047104 = \frac{1}{0,955015}.$$

Wir zeichnen jetzt das Projectionsbild (Taf. IV Fig. 12); zunächst das Axenkreuz mit dem Nullpunkte O und die Axenschnitte A und B der Zwillingfläche $= -a : -\frac{2}{3}b : c$; D wird der unendlich ferne Zonenpunkt in der Axe a und E derselben in der Axe b genannt; eingetragen werden nun noch für den Grundkrystall die Säule M mittelst der Sectionslinien OF und OG , und das Querprisma r mittelst der Sectionslinien AF und MG ; die Sectionslinie der Fläche O fällt mit der Axe a zusammen, die Sectionslinie der Fläche P liegt im Unendlichen.

Nun zieht man OZ senkrecht auch auf AB und giebt den Centraldistanzen $O_1 O$, OZ und $N_1 O$ die berechneten Werthe; die parallel mit AB durch N_1 gezogene Sectionslinie ist die correspondirende der Gradendfläche. Die Verbindung von O_1 mit A , einem gemeinschaftlichen Zonenpunkte, giebt die correspondirende Sectionslinie von OA , also die der Abstumpfung der scharfen Säulenkante, ebenso $O_1 B$ die der (nicht ausgebildeten) Abstumpfung der stumpfen Säulenkante, und die Durchschnittspunkte dieser beiden Linien D_1 und E_1 mit der durch N_1 gezogenen Sectionslinie der correspondirenden Gradendfläche: die correspondirenden Zonenpunkte der Axen a und b ; die Verbindung A und E_1 ist die correspondirende der Sectionslinie AF , da man diese auch mit AE bezeichnen kann.

Es sind nun noch die correspondirenden Sectionslinien von OF , OG und MG zu finden; hierzu kann man verschiedene Wege einschlagen, nämlich:

1) Man ermittelt mit Hülfe der Dreiecke TCZ , GCZ und MCZ , worin C der außerhalb der Projectionslinie liegende Endpunkt der Axe c ist, die Lage der correspondirenden Zonenpunkte F_1 , G_1 und M_1 .

2) Man sucht den correspondirenden Zonenpunkt M_1 als Schnittpunkt von O_1A und ZM , wobei man die Schwierigkeit, daß M_1 sehr entfernt zu liegen kommt, durch die Construction des verjüngten Dreiecks $A(M)(M_1)$ beseitigt, so daß mit Hülfe eines zweiten verjüngten Dreiecks $E_1(A)(M_1)$ die Linie $E_1(M_1)$ als Verbindungslinie von E_1 mit dem sehr entfernten Zonenpunkte M_1 gefunden wird, die also die correspondirende Sectionslinie von MG bildet; sodann werden die correspondirenden Zonenpunkte G_1 und F_1 als Durchschnittspunkte der Linien GZ und FZ mit E_1A und E_1M_1 gefunden; ihre Verbindung mit O_1 giebt dann die Sectionslinien O_1F_1 und O_1G_1 .

3) Am bequemsten aber benutzt man die gemeinschaftlichen Zonenpunkte J , K und H , von denen man die ersten beiden mit O_1 und den letzten mit E_1 verbindet, so daß O_1J die correspondirende Sectionslinie von OF , O_1K die von OG , und E_1H die von MG ist. Nach dieser Weise rechnen wir wie folgt.

Aus den bekannten Coordinaten von O_1 und A folgt nach der Sectionslinienformel

$$\frac{1}{\mu} = -a = -\frac{1}{1,44778}$$

$$\frac{1}{\nu} = +0,691135 b = +\frac{1}{0,99169}.$$

Die Coordinaten des Zonenpunktes $J = -\frac{2}{3}a$, $-\frac{2}{3}b$ in Verbindung mit den Coordinaten von O_1 geben für die Sectionslinie O_1Z die Axenschnitte

$$\frac{1}{\mu} = +2,03099 a = +\frac{1}{0,71285}$$

$$\frac{1}{\nu} = -0,33418 b = -\frac{1}{2,05095};$$

ferner die Coordinaten des Zonenpunktes $K = +2a, -2b$ in Verbindung mit den von O_1 die Axenschnitte von O_1K

$$\frac{1}{\mu} = -3,86735 a = -\frac{1}{0,37436}$$

$$\frac{1}{\nu} = -1,31826 b = -\frac{1}{0,51992}.$$

Um die Axenschnitte der Sectionslinien E_1A und E_1H in Zahlen auszudrücken, bedürfen wir der Coordinaten des Zonenpunktes E_1 , welche wir aus den bekannten Axenschnitten der Linie E_1N_1 und den noch vorher zu berechnenden der Sectionslinie $O_1E_1 = O_1B$ finden.

Die Axenschnitte der Linie O_1E_1 folgen aus den Coordinaten der Zonenpunkte O_1 und B

$$\frac{1}{\mu} = -107,22947 a = -\frac{1}{0,0135017}$$

$$\frac{1}{\nu} = -\frac{2}{3} b = -\frac{1}{1,02809},$$

woraus in Verbindung mit den Axenschnitten von E_1N_1 sich die Coordinaten von E_1

$$\frac{1}{m} = +2,09614 a = +\frac{1}{0,69069}$$

$$\frac{1}{n} = -0,67972 b = -\frac{1}{1,008343}$$

ergeben; hiernach sind die Axenschnitte von E_1A

$$\frac{1}{\mu} = -a = -\frac{1}{1,44787}$$

$$\frac{1}{\nu} = -0,21954 b = \frac{1}{3,12197}$$

und für F_1H , da die Coordinaten von $H = +a, -\frac{4}{3}b$,

$$\frac{1}{\mu} = +3,25580 a = +\frac{1}{0,44468}$$

$$\frac{1}{\nu} = -1,93247 b = -\frac{1}{0,35467}.$$

Im Interesse einer genauen Basis für die Zeichnung berechnen wir noch die Coordinaten von D_1 als correspondirenden Zonenpunktes der Axe a , welche sich ergeben

$$\frac{1}{m} = +0,01955 \, a = \frac{1}{74,05993}$$

$$\frac{1}{n} = +0,68861 \, b = \frac{1}{0,99533}.$$

Der einspringende Winkel, den die Fläche $r = +a : x : b : c$, repräsentirt durch die Sectionslinie MH , mit ihrer correspondirenden, repräsentirt durch die Sectionslinie E_1H , macht, berechnet sich, wenn man die Axenschnitte von $MH = \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$ und die von $E_1H = \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\nu_1}$ nennt, mit Hülfe der Cosinusformel des regulären Systems durch den Ausdruck

$$\cos \varphi = - \frac{1 + \mu \mu_1 + \nu \nu_1}{\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2} \sqrt{1 + \mu_1^2 + \nu_1^2}} = \cos 144^\circ 17',$$

oder mit Hülfe des Zonenpunktes H , dessen Coordinaten $= \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ heißen mögen, als Complement der Differenz zweier Winkel φ_1 und φ_2 , gefunden durch die Ausdrücke

$$\tan \varphi_1 = \frac{\sqrt{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}{m \mu - n \nu} = \tan 39^\circ 9' 38''$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\sqrt{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}{m \mu_1 - n \nu_1} = \tan 74^\circ 52' 23'',$$

indem $\varphi = 180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1) = 144^\circ 17' 15''$ ist.

Die Fläche $O = x a : b : \infty c$ des Nebenkristalls, zu der die Sectionslinie O_1A gehört, macht mit den Säulenflächen des Grundkrystalls häufig einspringende Winkel; der mit der von OF repräsentirten Säulenfläche gebildete berechnet sich mit Hülfe des Durchschnittspunktes von O_1A und OF , dessen Coordinaten

$$\frac{1}{m} = + \frac{1}{0,647005}, \quad \frac{1}{n} = + \frac{1}{0,30630}$$

sind, auf $149^\circ 5'$, beziehungsweise $30^\circ 55'$; und der mit der von OG repräsentirten Säulenfläche gebildete mit Hülfe des Durchschnittspunktes von OG und O_1A , dessen Coordinaten

$$\frac{1}{m} = - \frac{1}{3,54256}, \quad \frac{1}{n} = + \frac{1}{1,67708}$$

sind, auf $81^\circ 15'$, beziehungsweise $98^\circ 45'$.

Die Zwillinge des Staurolithes haben schon bei den älteren Mineralogen wegen ihrer nahen Beziehungen zum regulären Krystallsystem Aufmerksamkeit erregt. Unser Projectionsbild giebt eine bequeme Anleitung dieser Speculation zu folgen; man erkennt, daß die dem Nebenkryrstalle angehörnden Coordinaten und Axenschnitte sehr nahe in rationellen Verhältnissen zu den Axeneinheiten des Grundkrystalls stehen, und es sämmtlich werden, wenn man ein einziges der Elemente des Nebenkryrstalls in das ihm nahe liegende rationelle Verhältniß eintreten läßt, wenn man z. B. die Coordinaten von $Z = +2a, +\frac{2}{3}b$, die von $E_1 = +2a, -\frac{2}{3}b$, die von $O_1 = -2a, -\frac{2}{3}b$ etc setzt; in diesem Falle findet aber das Häüy'sche Einheitsverhältniß der Axen, nämlich:

$$a : b : c = \sqrt{2} : 3 : 2$$

statt. Projicirt man nun die in unserer Figur durch Sectionslinien ausgedrückten Flächen auf die Ebene der Axen b und c und substituirt für diese beiden Axen zwei andere, welche mit ihnen 45° machen, und giebt ihnen die Einheitslänge von a , so erhalten sämmtliche Flächen rationelle Axenschnitte des regulären Krystallsystems, und zwar fallen:

in das Leucitoïd $= \frac{1}{3}a : a : a$ die Säulenflächen M ,

in das Leucitoëder $= \frac{1}{2}a : a : a$ die Flächen des Quersprismas r ,

in das Granatoëder $= a : a : \infty a$ die geraden Endflächen und Abstumpfungen der scharfen Säulenkante, sowohl für den Grundkrystall, als auch für den Nebenkryrstall; in der fünften Granatoëderfläche liegt dann die Zwillingfläche und in der längeren Diagonale der sechsten Granatoëderfläche die Zwillingaxe.
