11. *Ueber eine bei der theoretischen Einführung incompressibler Flüssigkeiten gebotene Vorsicht; von J. R. Schütz.*

1. Von einer *vollkommen incompressiblen* Flüssigkeit darf zweifellos mit demselben Rechte gesprochen werden, mit welchem man etwa in der Mathematik von einer unendlich grossen oder unendlich kleinen Grösse zu reden gewohnt ist. Aber nicht mit *grösserem* Rechte; wird zumal der Begriff der Incompressibilität in den analytischen Calcül eingeführt, so ist hierbei jedenfalls die Vorsicht geboten, *dass man zuvörderst die Flüssigkeit als compressibel behandelt und erst am Schlussresultat den Grenzübergang zur Incompressibilität macht.* In den meisten Fällen wird man dabei freilich zu demselben Ziele gelangen, welches auch ohne diesen Umweg rascher erreicht worden wäre; es ist aber ein Leichtes, Fälle anzugeben, in welchen diese zwei Wege zu weit auseinanderstehenden Resultaten führen.

Das oben geforderte vorsichtige Verfahren hat übrigens auch einen wohlberechtigten *physikalischen* Sinn. Denn da man keinen Anstand nimmt, auch in vollkommen incompressiblen Flüssigkeiten noch Druckschwankungen zuzulassen, so müssen schlechterdings auch Dichtigkeitsschwankungen als nothwendig coexistirend eingeräumt werden; die, wenn man so will, unendliche Kleinheit der letzteren darf uns aber offenbar nicht der Nothwendigkeit überheben, uns in jedem Falle davon zu überzeugen, von welcher Grössenordnung ihr Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit ist.

Wir definiren deshalb: *Eine Flüssigkeit ist vollkommen incompressibel, wenn sich deren Dichte von Zeit zu Zeit und von Ort zu Ort jedenfalls nur um Beträge ändern kann, die kleiner sind als jede angebbare kleine Grösse.*

2. Es soll nun der analytische Ausdruck für die Incompressibilitätsbedingung aufgestellt werden. Nach dem Vor-

gange Euler's sind wir gewohnt, denselben in der Gleichung zu sehen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z}\right) = 0,$$

worin u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten der Strömung und ϱ die Dichtigkeit zur Zeit t im Punkte x, y, z bedeuten. Indess ist dieser Ausdruck zwar sicherlich eine hinreichende, aber durchaus keine nothwendige Bedingung für die Incompressibilität. Denn es widerstreitet der im Artikel 1 gegebenen Definition keineswegs, dass die Grösse $\partial \varrho / \partial t$ jeden beliebigen endlichen Betrag annehmen kann; und dasselbe gilt auch von den Grössen $\partial \varrho / \partial x$, $\partial \varrho / \partial y$, $\partial \varrho / \partial z$, wobei wir selbst noch voraussetzen dürfen, dass sowohl ϱ als dessen ersten Derivirte *stetige* Functionen des Ortes und der Zeit sind.

Es entspricht vielmehr dem Sinn dieser Definition allein nur, als die nothwendige und hinreichende Bedingung für die vollkommene Incompressibilität einer Flüssigkeit die Forderung hinzustellen, *dass die bestimmten Integrale*

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d t, \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial x} d x, \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial y} d y, \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial z} d z,$$

genommen über jede angebbare Integrationsstrecke, Beträge liefern, die jedenfalls kleiner sind, als jede angebbare kleine Grösse. Hierzu mag aber betont werden, *dass dagegen ein beliebig erstrecktes bestimmtes Integral von der Form*

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d x, \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial x} d t \quad \text{oder} \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial x} d y \quad \text{etc.}$$

auch für vollkommen incompressible Flüssigkeiten im allgemeinen einen endlichen Betrag repräsentirt.

3. Um das Besprochene an einem einfachen Beispiele zu versinnlichen, setzen wir etwa

$$\varrho = C + f(x, y, z, t),$$

worin C eine Constante ist, während wir über die Function f der Variabelen x, y, z und t so verfügen, dass ihr absoluter Betrag, wenn die Flüssigkeit incompressibel ist, gegenüber C jedenfalls verschwindet.

Es kann nun z. B. der Grenzübergang zur Incompressibilität willkürlich dadurch hergestellt werden, dass man fordert, es solle für vollkommen incompressible Flüssigkeiten eine gewisse Grösse V, in der man, wenn man so lieber will, auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen in der Flüssigkeit sehen darf, grösser werden, als jede angebbare Grösse G. Die Incompressibilitätsbedingung kann dann so geschrieben werden

$$\lim \varrho = \text{const.}$$
$$(V > G)$$

Aber man erkennt, dass hierdurch nicht zugleich die Gleichungen verbürgt sind

$$\lim \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \text{oder} \quad \lim \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0 \text{ etc.}$$

Denn man braucht, um nur ein einziges Beispiel hinzuschreiben, bloss etwa

$$\varrho = C + \frac{a}{V} \sin b (c + Vt)$$

zu setzen (worin a, b, c noch beliebige Functionen von x, y, z sein können) um zwar der Bedingung

$$\lim \varrho = \text{const.}$$

zu genügen, während gleichzeitig der Grenzwerth

$$\lim \frac{\partial \varrho}{\partial t} = a \,.\, b \cos b (c + Vt)$$

im allgemeinen um einen endlichen Betrag von Null verschieden ist.

Es resultirt hieraus die Regel, dass wir ohne Bedenken die Dichte ϱ einer als incompressibel vorausgesetzten Flüssigkeit immer dann, aber auch nur dann schon zu Beginn der Rechnung gleich einer Constanten setzen dürfen, wenn dieselbe im Verlaufe der Rechnung keinerlei Differentiiroperationen mehr unterliegt.

Göttingen, Physik. Inst. d. Univ., März 1895.