

SULLA TEORIA GENERALE DELLE ONDE PIANE,

Nota del prof. **Eugenio Beltrami**, in Pavia.

Adunanza del 14 giugno 1891

Nel recentissimo Volume che contiene le tanto desiderate Lezioni dell'illustre Kirchhoff sulla teoria della Luce (*) non veggio che sia fatto cenno d'un utile teorema, che pure scaturisce agevolmente dal procedimento ivi adottato e riprodotto dalla nota Memoria del 1876 *Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel*. Pensando che questo teorema non sia comunemente noto, mi permetto di qui dimostrarlo, ed approfitto dell'occasione per ripigliare *ab initio* la teoria generale delle onde piane, all'uopo di liberarla (senza verun pregiudizio della brevità) da quell'unica restrizione che ancora vi rimane, nella trattazione di Kirchhoff (**)

Il più generale moto per onde piane è rappresentato dalle formole :

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t), \quad w = w(s, t)$$

dove u, v, w sono le componenti di spostamento, t è il tempo ed s è un parametro definito dall'equazione

$$lx + my + nz = s,$$

(*) *Mathematische Optik*, Teubner 1891, XI u. XII Vorl

(**) Quella, cioè, che deriva dal supporre *a priori* rettilinee le vibrazioni.

l, m, n essendo i coseni di direzione della normale ai piani d'onda $s = \text{Cost}$. Il problema consiste nel riconoscere se, o sotto quali condizioni, si possa con queste espressioni di u, v, w soddisfare alle tre equazioni del moto :

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ etc.},$$

dove la densità del mezzo si suppone compenetrata, come divisore, nelle componenti di pressione X_x, X_y, X_z , etc

Osservando, in primo luogo, che per ogni funzione del parametro s , qual'è appunto ciascuna componente di pressione, sussistono le relazioni simboliche :

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = n \frac{\partial}{\partial s},$$

si scorge immediatamente che le tre equazioni del moto sono riducibili alla forma semplicissima :

$$\frac{\partial X_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Y_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Z_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

dove le quantità

$$X_s = lX_x + mX_y + nX_z,$$

$$Y_s = lY_x + mY_y + nY_z,$$

$$Z_s = lZ_x + mZ_y + nZ_z,$$

sono le componenti della pressione che si esercita sul piano d'onda, e queste tre equazioni sono, alla loro volta, surrogabili dall'unica

$$\frac{\partial (aX_s + bY_s + cZ_s)}{\partial s} + \frac{\partial^2 (au + bv + cw)}{\partial t^2} = 0,$$

dove a, b, c sono tre costanti arbitrarie.

In secondo luogo è da notarsi che, dalle ammesse forme di u, v, w , seguono, per le componenti di deformazione, le espressioni :

$$\begin{aligned}
 x_x &= l u_1, & y_z &= m w_1 + n v_1, \\
 y_y &= m v_1, & z_z &= n u_1 + l w_1, & \left(u_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \text{ etc.} \right) \\
 z_z &= n w_1, & x_y &= l v_1 + m u_1,
 \end{aligned}$$

talchè, denotando con Π il potenziale d'elasticità, cioè ponendo

$$X_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_x}, \quad X_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_y}, \text{ etc.},$$

si può scrivere

$$X_s = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_x} \frac{\partial x_x}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} \frac{\partial x_y}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z} \frac{\partial x_z}{\partial u_1} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial u_1},$$

cioè si ha

$$X_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \quad Y_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial v_1}, \quad Z_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial w_1},$$

dove :

$$\begin{aligned}
 a X_s + b Y_s + c Z_s &= -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} a + \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} b + \frac{\partial \Pi}{\partial w_1} c \right) \\
 &= -\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a} u_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial b} v_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial c} w_1 \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a} u + \frac{\partial \Pi'}{\partial b} v + \frac{\partial \Pi'}{\partial c} w \right),
 \end{aligned}$$

dove Π' è ciò che diventa Π quando al posto di x_x, x_y , etc si sostituiscono le quantità costanti

$$\begin{aligned}
 x'_x &= l a, & y'_z &= m c + n b, \\
 y'_y &= m b, & z'_x &= n a + l c, \\
 z'_z &= n c, & x'_y &= l b + m a
 \end{aligned}$$

L'equazione differenziale ottenuta più sopra può scriversi pertanto così .

$$\frac{\partial^2 (a u + b v + c w)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a} u + \frac{\partial \Pi'}{\partial b} v + \frac{\partial \Pi'}{\partial c} w \right).$$

In terzo ed ultimo luogo si osservi che per ricavare da quest'unica equazione un sistema equivalente a quello delle tre equazioni del

moto, basta assegnare alle costanti a, b, c (le quali vi entrano sempre in forma lineare ed omogenea) tre successive terne di valori indipendenti. Ora questa triplice determinazione indipendente può ottenersi introducendo una nuova incognita V e stabilendo le equazioni.

$$(A) \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial a} = V^2 a, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial b} = V^2 b, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial c} = V^2 c,$$

le quali son quelle stesse cui condurrebbe la ricerca degli assi della quadrica $2\Pi' = 1$, se si considerassero le variabili a, b, c come coordinate d'un punto dello spazio. Questa quadrica, il di cui centro è nell'origine, è un ellissoide quando il potenziale Π è positivo: in tale ipotesi, adunque, l'incognita V^2 ammette tre valori positivi (dipendenti da l, m, n), generalmente distinti, e rappresentanti i quadrati inversi dei semiasse del detto ellissoide. Per ciascuno dei tre sistemi di valori corrispondenti delle quantità V^2, a, b, c (alle tre ultime delle quali giova assegnare il significato di coseni di direzione dei rispettivi semiasse), l'equazione differenziale si riduce alla forma

$$\frac{\partial^2 (au + bv + cw)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 (au + bv + cw)}{\partial s^2}$$

e possiede quindi il ben noto integrale generale

$$au + bv + cw = \varphi(s - Vt) + \psi(s + Vt),$$

dove φ e ψ sono simboli di funzioni arbitrarie e dove a, b, c sono i coseni di direzione del semiasse che ha per misura l'inversa della velocità di propagazione V .

Il primo membro dell'equazione testè ottenuta rappresenta la componente di spostamento nella direzione del detto semiasse se quindi si designano per poco con $\sigma, \sigma', \sigma''$ le tre componenti analoghe e con $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')$ i coseni di direzione dei semiasse cui queste componenti si riferiscono, si ha

$$u = a\sigma + a'\sigma' + a''\sigma'',$$

$$v = b\sigma + b'\sigma' + b''\sigma'',$$

$$w = c\sigma + c'\sigma' + c''\sigma''.$$

La risposta al problema è pertanto questa. Qualunque sia il piano d'onda, è possibile la propagazione, in amendue i sensi, di tre distinte onde a vibrazione rettilinea, con tre distinte velocità di propagazione; le direzioni delle tre corrispondenti vibrazioni formano una terna ortogonale, la di cui orientazione, del pari che le grandezze delle tre velocità di propagazione, dipendono dall'orientazione del dato piano d'onda.

Fissando ora l'attenzione sull'onda piana corrispondente ad uno dei tre moti rettilinei possibili, per esempio a quello che è definito da

$$u = a\sigma, \quad v = b\sigma, \quad w = c\sigma,$$

bisogna stabilire il concetto di ciò che deve intendersi per *raggio*

Questo concetto è da fondarsi, a mio avviso, sopra una proposizione che spetta alla teoria generale delle pressioni, ed è la seguente

Se O è un punto d'un mezzo elastico e Q una retta qualunque uscente da esso, esiste sempre una ed una sola altra retta R , uscente dal medesimo punto O , tale che le pressioni agenti su *tutti* gli elementi piani ω' , condotti per questa seconda retta R , sono *normali* alla prima retta Q

Si conduca infatti per O l'elemento piano ω normale a Q e sia R la retta secondo cui agisce la relativa pressione. Si consideri uno qualunque degli elementi piani ω' passanti, in O , per questa retta R . In virtù d'un teorema notissimo, la componente normale ad ω della pressione su ω' è uguale alla componente normale ad ω' della pressione su ω . Ma questa seconda componente è nulla, *per costruzione*, dunque è nulla anche la prima, cioè la pressione sull'elemento ω' è diretta normalmente a Q . La cercata retta R è dunque quella secondo cui agisce la pressione sull'elemento piano normale a Q e, mercè lo stesso teorema di reciprocità invocato dianzi, si riconosce molto facilmente non esservi alcun'altra retta che goda della medesima proprietà.

Se alla retta Q si attribuisce la direzione del *moto* che si verifica in O , si conclude dalla proposizione or ora stabilita che esiste sempre una retta R tale che, attraverso ogni elemento piano condotto per essa, non ha luogo veruno *scambio di energia*, nell'intorno del punto considerato

Ciò premesso, si assuma come direzione di Q , in un punto O

dell'onda, la direzione del moto locale, cioè quella che è definita dai coseni a, b, c , e si determini la retta d'azione R della pressione sull'elemento piano ω normale a Q . La direzione della retta R è quella del raggio. Essendo infatti questa direzione dovunque la stessa, poichè le componenti di pressione non variano, dall'uno all'altro punto dello spazio invaso dall'onda, se non per un fattore comune a tutte (che è la derivata di σ rispetto ad s), ogni porzione del mezzo contenuta in una superficie cilindrica colle generatrici parallele alla retta R non perde nè acquista energia da parte del mezzo circostante. Ora è appunto questa la proprietà che intrinsecamente caratterizza ciò che deve chiamarsi il raggio limitato da quella superficie cilindrica.

Tale è anche la costruzione cui perviene Kirchhoff; senonchè sembra opportuno ch'essa apparisca giustificata da una considerazione generale, qual'è quella che precede, tendente a stabilire *a priori* l'esistenza necessaria della direzione R .

Le componenti di pressione sull'elemento piano testè denominato ω sono, per l'onda considerata,

$$X_x a + X_y b + X_z c, \quad \text{etc.}$$

e sono quindi proporzionali a

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial x_x} \frac{\partial x'_x}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_y} \frac{\partial x'_y}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_z} \frac{\partial x'_z}{\partial l}, \quad \text{etc}$$

che è quanto dire a

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial m}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial n}:$$

i coseni di direzione del raggio R sono dunque proporzionali, come conclude Kirchhoff, a queste tre ultime quantità. Ma ad esse se ne possono sostituire tre altre, molto più significative: ed è in tale sostituzione che principalmente consiste il teorema annunciato al principio di questa Nota.

Dalle equazioni (\mathcal{A}), per essere Π' funzione omogenea e quadratica dei tre coseni a, b, c , si deduce

$$2 \Pi' = V^2,$$

epperò, derivando rispetto ad l ,

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial l} = V \frac{\partial V}{\partial l}$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l} = V \frac{\partial V}{\partial l}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial m} = V \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial n} = V \frac{\partial V}{\partial n}.$$

giacchè tutti gli altri termini scompaiono in virtù delle stesse equazioni (A) e della relazione fra i coseni a, b, c . Si può per conseguenza affermare che *i coseni di direzione del raggio R' sono proporzionali alle quantità*

$$(B) \quad \frac{\partial V}{\partial l}, \quad \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \frac{\partial V}{\partial n}$$

Dalle equazioni che precedono, per essere Π' funzione omogenea e quadratica di l, m, n e per la già notata eguaglianza $2\Pi' = V^2$, si ricava inoltre

$$\frac{\partial V}{\partial l} l + \frac{\partial V}{\partial m} m + \frac{\partial V}{\partial n} n = V$$

dunque V è funzione omogenea e di 1° grado (in senso euleriano) delle tre quantità l, m, n . Ne risulta che dall'equazione

$$lx + my + nz = V,$$

rappresentante il piano generico d'onda, nella posizione ch'esso occupa dopo un'unità di tempo dal suo passaggio per l'origine, si passa a quella dell'involuppo di tutti i piani analoghi, eliminando l, m, n fra le tre derivate dell'equazione stessa rispetto a questi parametri, cioè fra le equazioni (di grado zero rispetto ad l, m, n).

$$(C) \quad x = \frac{\partial V}{\partial l}, \quad y = \frac{\partial V}{\partial m}, \quad z = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Ora queste equazioni definiscono il punto di contatto dell'involuppo col piano generico (l, m, n) basta dunque confrontarle colle espressioni

(B) per concludere senz'altro che *il punto di contatto dell'involuppo con ciascun piano d'onda si trova sempre sul raggio corrispondente a questo piano*

Questa proprietà fondamentale viene così ad essere stabilita senza far intervenire l'equazione esplicita della superficie d'onda: essa è resa indipendente dalla trasversalità delle vibrazioni e sussiste tal quale nel mezzo elastico più generale possibile.

La proprietà delle funzione $V(l, m, n)$ d'essere omogenea e di 1° grado in l, m, n , essenziale per la deduzione che precede, diventa del tutto intuitiva, se si guarda alla forma dell'equazione cubica che deve determinare V^2 . Quest'equazione, risultante dall'eliminazione di a, b, c fra le tre equazioni (A), ha la forma:

$$(D) \quad \begin{vmatrix} L - V^2 & N' & M' \\ N' & M - V^2 & L' \\ M' & L' & N - V^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dove L, M, N, L', M', N' sono sei funzioni omogenee e quadratiche delle sole variabili l, m, n : la quantità V^2 non può evidentemente non essere omogenea con queste sei funzioni.

Queste ultime si possono ridurre, con facili operazioni, alla forma seguente:

$$L = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Pi''}{\partial l^2} + \frac{1}{2} X''_x, \quad \dots, \quad L' = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Pi''}{\partial m \partial n} + \frac{1}{2} Y''_y, \quad \dots,$$

dove Π'', X''_x, Y''_y , etc. sono espressioni formate cogli argomenti

$$x''_x = l^2, \quad y''_y = m^2, \quad z''_z = n^2,$$

$$y''_x = 2 m n, \quad z''_x = 2 n l, \quad x''_y = 2 l m$$

come Π, X_x, Y_y , etc sono formate cogli argomenti x, y , etc.

L'equazione effettiva della superficie d'onda si può subito ottenere, senza artificio veruno, in coordinate plucheriane ξ, η, ζ , definite

dall'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

Confrontando infatti quest'equazione con quella del piano d'onda, si ha

$$l = -V\xi, \quad m = -V\eta, \quad n = -V\zeta$$

e l'equazione tangenziale in discorso può quindi già scriversi, in forma *implicita*, così.

$$V(\xi, \eta, \zeta) + 1 = 0.$$

In forma *esplicita* essa si ottiene scrivendo in (D). $\xi, \eta, \zeta, 1$ al posto di l, m, n, V^2 rispettivamente. La superficie d'onda nel mezzo elastico più generale è dunque della 6^a classe

Pavia, 23 maggio 1891

E. BELTRAMI.