

Über mehrfache Ordnungstypen. I.

Von

FRIEDRICH RIESZ in Lőcse (Ungarn).

Man ist gewohnt, jene Eigenschaften der transfiniten Punktmannigfaltigkeiten, die auf dem Begriffe der Häufungsstelle beruhen, und die man als geometrische Eigenschaften von den arithmetischen zu unterscheiden pflegt, als untrennbar von der Lagerung jener Mengen im stetig ausgedehnten Raume zu betrachten. Herr G. Cantor hatte zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß der Begriff der Fundamentalreihe und damit auch der Begriff der Häufungsstelle rein arithmetischer Natur sind und ausschließlich an dem Begriffe des Ordnungstypus haften. Damit ließen sich auch die weiteren, scheinbar geometrischen Begriffe auf die Ordnungstypen übertragen.

Für lineare Ordnungstypen sind die bezüglichen Untersuchungen von Herrn Cantor angestellt worden; dagegen sind die Ordnungstypen der transfiniten mehrfach geordneten Mengen noch nicht untersucht. Bei dem Aufschwunge, den in letzter Zeit die Theorie der ebenen und räumlichen Punktmannigfaltigkeiten erfahren hat, erscheint es wünschenswert, daß auch die Grundlagen einer Theorie der mehrfachen transfiniten Ordnungstypen durchgearbeitet werden. Aus dem genannten Gesichtspunkte sind es dann besonders die perfekten Ordnungstypen, die uns interessieren; die Untersuchung der perfekten zusammenhängenden Typen und ihrer Teilmengen führt zu einer Disziplin, welche die Analysis Situs der linearen Räume als Spezialfall enthält.

Dabei können von den Methoden der Mengenlehre nur jene angewandt werden, welche ausschließlich mit dem Begriffe des Ordnungstypus operieren. Der Begriff der Distanz oder des Jordanschen „écart“ wird zu entbehren sein, und es muß also der Begriff der Umgebung in jener allgemeineren Fassung übertragen werden, die auch schon sonstigen mengentheoretischen Untersuchungen geläufig ist. Damit fällt aber auch eines der wichtigsten Hilfsmittel der Lehre über Punktmengen fort, näm-

lich die gleichmäßige Stetigkeit der stetigen Funktion. Dieselbe wird jedoch ersetzt, indem es gelingt, den Heine-Borelschen Satz, der für sie die natürliche Grundlage bildet, sinngemäß zu übertragen.

I. Eine Menge heißt *n*-fach geordnet, wenn für das Rangverhältnis ihrer Elemente *n* verschiedene Rangordnungen maßgebend sind. Das Rangverhältnis in bezug auf die *i*^{te} Rangordnung wird durch die Zeichen

$$a \succ_i b; \quad a \prec_i b; \quad a \bar{\prec}_i b$$

ausgedrückt, je nachdem *a* in bezug auf die *i*^{te} Rangordnung auf *b* folgt, ihm vorangeht oder mit ihm von gleichem Range ist; für zwei verschiedene Elemente kann nicht in bezug auf sämtliche Rangordnungen das Gleichheitszeichen gelten.

Können nun zwei *n*-fach geordnete Mengen umkehrbar eindeutig aufeinander so bezogen werden, daß die Rangverhältnisse erhalten bleiben, so sagt man, die beiden Mengen seien *ähnlich geordnet* oder *ähnlich*. Das Gemeinsame aller ähnlichen Mengen nennt man ihren *Ordnungstypus*. Er ist nach Cantor der Allgemeinbegriff, der entsteht, wenn man von der Beschaffenheit der Elemente abstrahiert, die Rangordnung aber beibehält.

Den Ordnungstypus der geordneten Menge *M* bezeichne ich durch \overline{M} .

II. Ist *a* irgend ein Element der geordneten Menge, und gibt es *n* Paare $b_1, c_1; \dots; b_n, c_n$ von Elementen, welche den Ungleichungen

$$b_i \prec_i a \prec_i c_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

genügen, so nenne ich die Gesamtheit aller Elemente *u*, für welche ebenfalls die Ungleichungen

$$b_i \prec_i u \prec_i c_i$$

gelten, eine *Umgebung* des Elementes *a*. Ich sage, die Elemente *u* seien *innerhalb* dieser Umgebung gelegen. Ich sage von einem Elemente *r*, es wäre *auf dem Rande* der Umgebung gelegen, wenn es teilweise Ungleichungen obiger Form, teilweise oder ausschließlich aber Gleichungen von einer der Formen

$$r \bar{\prec}_i b_i \\ r \bar{\prec}_i c_i$$

genügt.

Gibt es für ein Element *a* keine *n* Paare b_i, c_i von der obigen Art, so läßt sich noch immer eine *Umgebung* in weiterem Sinne, eine *einseitige Umgebung* desselben definieren, indem die fehlenden b_i , resp. c_i durch *a* selbst ersetzt werden.

III. Eine *n*-fach geordnete Menge, resp. ihr Ordnungstypus heiße *vollständig*, wenn es für jede beliebige Kombination von *n* verschiedenen, teilweise oder ganz identischen Elementen a_1, \dots, a_n der Menge immer ein Element *x* gibt, so daß

$$x \bar{\prec}_i a_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

sei.

Jeder einfache Ordnungstypus ist vollständig.

Betrachtet man sämtliche Komplexe, die aus je n verschiedenen, teilweise oder sämtlich identischen Elementen einer n -fach geordneten Menge gebildet werden, so läßt sich die Menge derselben wieder als n -fach geordnete Menge auffassen, wenn man übereinkommt, daß zwei Komplexe $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$ und $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$ für identisch betrachtet werden, sobald für sämtliche i

$$a_i \bar{i} b_i;$$

sonst aber für die Komplexe A und B die Beziehungen

$$A \begin{matrix} i \\ \bar{i} \\ B \\ \langle i \end{matrix}$$

gelten, je nachdem

$$a_i \begin{matrix} i \\ \bar{i} \\ b_i \\ \langle i \end{matrix}$$

Die so definierte geordnete Menge ist von vollständigem Ordnungstypus. Ich nenne sie *den zur Menge gehörigen vollständigen Ordnungstypus*. Die primäre Menge ist dann jener Teilmenge der zugehörigen vollständigen Menge ähnlich, für deren Elemente $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_n$, wenn für deren Elemente ihr Rangverhältnis in der vollständigen Menge erhalten bleibt. Jeder Ordnungstypus läßt sich somit als Teiltypus des zugehörigen vollständigen Ordnungstypus auffassen.

Man kann jeden vollständigen Ordnungstypus auch als die aus n einfachen Ordnungstypen gebildete Komplexmenge auffassen. Damit läßt sich die Theorie der n -fachen Ordnungstypen auf jene der einfachen zurückführen.

IV. Eine Umgebung im engeren Sinne eines Elementes nenne ich *vollständig*, wenn sie zugleich Umgebung desselben innerhalb der zugehörigen vollständigen Menge ist. Jedes Element, das eine vollständige Umgebung besitzt, heißt *inneres Element*, jedes sonstige heißt *Randelement* der Menge.

V. Außer der zur Menge gehörigen vollständigen Menge lassen sich noch andere Ordnungstypen definieren, die in enger Beziehung zu ihr stehen. Sind i_1, i_2, \dots, i_k k der ersten n Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung, so läßt sich eine k -fach geordnete Menge definieren derart, daß jedem Elemente a der primären Menge ein Element a' dieser Menge entspricht und für irgend zwei Elemente die Beziehungen

$$a' \begin{matrix} i_j \\ \bar{i}_j \\ b' \\ \langle i_j \end{matrix} \quad (j = 1, \dots, k)$$

gelten, je nachdem

$$\frac{i_j \rangle}{a \ i_j \ b.} \\ \langle i_j$$

Irgend zwei Elementen, welche in bezug auf alle k Rangordnungen von gleichem Range sind, entspricht dasselbe Element a' .

Die so definierte Menge nenne ich eine k -fache *Projektion* der primären Menge. Es gibt $\binom{n}{k}$ k -fache Projektionen.

Die Projektionen einer vollständigen Menge sind ebenfalls vollständig.

VI. Die bisher entwickelten Begriffe lassen sich für sämtliche Ordnungstypen definieren, unabhängig davon, ob dieselben endlich oder transfinit sind; der Begriff der Häufungsstelle ist hingegen für die Theorie der transfiniten Ordnungstypen charakteristisch.

Das Element a heißt eine *Häufungsstelle* der Teilmenge T des Ordnungstypus \bar{M} , wenn es in jeder Umgebung von a Elemente aus T gibt, die von a verschieden sind; anderenfalls heißt das Element a in bezug auf die Menge T *isoliert*. Es ist dann klar, daß nur transfinite Teilmengen Häufungsstellen besitzen können. Es folgt auch unmittelbar aus der Definition, daß sämtliche Häufungsstellen von T auch Häufungsstellen für jede Teilmenge von \bar{M} sind, welche T enthält. Jedes Element also, das Häufungsstelle für irgend eine Teilmenge ist, ist auch sicher Häufungsstelle von \bar{M} selbst.

Der Ordnungstypus \bar{M} heißt *abgeschlossen*, wenn jede transfinite Teilmenge eine Häufungsstelle besitzt.

Für die Abgeschlossenheit eines Ordnungstypus läßt sich leicht eine notwendige und hinreichende Bedingung angeben, welche nur eine Klasse von Teilmengen in Betracht zieht. Man definiere als *Fundamentalreihe* jede wohlgeordnete Reihe von Elementen aus \bar{M} ohne letztes Element, für welche in bezug auf jede der Rangordnungen eine der folgenden 3 Möglichkeiten besteht:

1. Die Wohlordnung deckt sich mit der natürlichen Anordnung der Elemente in der Rangordnung;
2. sie deckt sich mit der inversen Anordnung derselben;
3. alle Elemente der Reihe sind in bezug auf die Rangordnung von demselben Range.

Je nach den verschiedenen Möglichkeiten in bezug auf die einzelnen Rangordnungen kann man in einem n -fachen Ordnungstypus $3^n - 1$ verschiedene Arten von Fundamentalreihen unterscheiden.

Das Element a heiße *Grenzelement* der Fundamentalreihe, wenn für jede Umgebung desselben die Elemente der Fundamentalreihe von einem

gewissen Elemente an alle in der Umgebung liegen. Daß es für jede Fundamentalreihe nur ein Grenzelement geben kann, leuchtet unmittelbar ein. Ich sage dann, *die Fundamentalreihe konvergiere gegen das Element a* .

Das Grenzelement einer Fundamentalreihe ist immer eine Häufungsstelle derselben.

Die Fundamentalreihe heiße eine *Cantorsche*, wenn ihr die Ordnungszahl ω der der Größe nach geordneten positiven ganzen Zahlen zukommt. *Eine Cantorsche Fundamentalreihe hat ihr Grenzelement zur einzigen Häufungsstelle. Damit also ein Ordnungstypus abgeschlossen sei, ist es sicher notwendig, daß jede Cantorsche Fundamentalreihe desselben ein Grenzelement besitze. Daß aber diese Bedingung für die Abgeschlossenheit des Typus auch hinreicht, folgt daraus, daß jede transfinite Teilmenge, wie man leicht zeigt, Cantorsche Fundamentalreihen enthält; die etwaigen Grenzelemente derselben sind dann zugleich Häufungsstellen der Teilmenge.*

Aus der gegebenen Bedingung folgt unmittelbar, daß sowohl jede *Projektion eines abgeschlossenen Ordnungstypus* wie auch der zugehörige *vollständige Ordnungstypus* ebenfalls abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heiße *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Häufungsstellen enthält und wenn jede weitere Teilmenge derselben eine Häufungsstelle besitzt.

Man zeigt nach bekannter Art, daß es für jede abzählbare Reihe von abgeschlossenen Mengen, von denen jede in allen vorhergehenden enthalten ist, wenigstens ein Element gibt, das sämtlichen Mengen gemeinsam ist.

Jede Teilmenge eines abgeschlossenen Ordnungstypus, welche alle ihre Häufungsstellen enthält, ist notwendig abgeschlossen.

VII. Ein Element a des Ordnungstypus \bar{M} heiße ein *Hauptelement* desselben, wenn es Häufungsstelle irgend einer Teilmenge ist, wenn also in jeder Umgebung desselben noch andere Elemente liegen. Diese definierende Eigenschaft des Hauptelementes läßt sich auch in folgender Form fassen: *Innerhalb jeder Umgebung des Hauptelementes gibt es weitere Umgebungen desselben.*

Ein Element, das nicht Hauptelement ist, heiße *isoliert*.

Das Hauptelement heiße ein *Cantorsches*, wenn es Grenzelement einer Cantorschen Fundamentalreihe ist.

Gibt es für ein Hauptelement a eine wohlgeordnete Reihe von Umgebungen, so daß jede Umgebung in allen vorhergehenden enthalten und a das einzige allen Umgebungen der Reihe gemeinsame Element ist, so sage ich, die Reihe *konvergiere* gegen das Element a und das Element a sei *zugänglich*. Die kleinste Mächtigkeit aller wohlgeordneten Reihen von Umgebungen, die gegen das Element a konvergieren, nenne ich die *Zugänglichkeit* von a . Das Element a heiße *einfach zugänglich*, wenn seine

Zugänglichkeit die erste Mächtigkeit ist, wenn es also eine abzählbare Folge von Umgebungen gibt, die gegen das Element α konvergiert.

Alle Elemente des der Größe der Koordinaten nach geordneten Zahlenraumes sind einfach zugängliche Hauptelemente; im allgemeinen jedoch wird die Unzugänglichkeit der Hauptelemente die Regel, die Zugänglichkeit den Ausnahmefall bilden.

Ich zeige nun, daß in jeder Teilmenge T , welche das zugängliche Element α zur Häufungsstelle hat, wenigstens eine Fundamentalreihe enthalten ist, die gegen α konvergiert. Betrachtet man nämlich irgend eine wohlgeordnete Menge ineinander gelegener Umgebungen, die gegen das Element α konvergiert, so läßt sich zunächst mittels derselben eine wohlgeordnete Menge von Elementen aus T ausscheiden, derart, daß es für jedes Element der Menge eine Umgebung aus der Umgebungsmenge gibt, welche das Element enthält, alle Elemente des zugehörigen Abschnittes aber ausschließt, und daß es für jede Umgebung von α ein Element der Menge gibt, von welcher an alle Elemente in der Umgebung liegen. Man definiert diese Menge auf folgende Weise. Man denke sich zu jeder Umgebung der wohlgeordneten Menge ein von α in bezug auf jede Rangordnung verschiedenes Element aus T zugeordnet, das in jener Umgebung liegt. Es sei a_1 jenes Element, das der Umgebung u_1 zugeordnet ist. Man betrachte nun sämtliche wohlgeordneten Mengen von Elementen, welche a_1 zum ersten Elemente haben und folgende Eigenschaft besitzen: jedes Element ist einer Umgebung zugeordnet, welche die erste ist, deren sämtliche Projektionen die Projektionen aller Elemente des zugehörigen Abschnittes ausschließen. Daß es solche Mengen gibt, und daß sämtliche als Abschnitte einer einzigen A unter ihnen betrachtet werden können, welche das Element α zur Häufungsstelle hat, zeigt man nun mittels bekannter Schlußart. Man muß dabei voraussetzen, daß die Gesamtheit aller Elemente von T , die in bezug auf keine Rangordnung mit α von gleichem Range sind, α zur Häufungsstelle hat; anderenfalls wird die Untersuchung auf einen Ordnungstypus zurückgeführt, dessen Mannigfaltigkeit kleiner als n ist.

Die so definierte wohlgeordnete Menge läßt sich endlich in höchstens 2^n Teilmengen zerlegen, von denen jede in der für die ganze Menge bestimmten Wohlordnung in bezug auf jede Rangordnung eine der beiden Eigenschaften besitzt, daß sie entweder stets wächst, oder stets abnimmt. Je nachdem folgt auch α auf alle Elemente oder es geht allen voran. Es gibt dann wenigstens eine unter diesen Teilmengen, für welche α eine Häufungsstelle ist; dieselbe stellt dann in der Wohlordnung eine Fundamentalreihe dar, die gegen α konvergiert.

Die Zugänglichkeit des Elementes α bildet somit eine hinreichende Bedingung dafür, damit in der Teilmenge T , welche das Element α zur

Häufungsstelle hat, eine Fundamentalreihe enthalten sei, die gegen a konvergiert. Die Bedingung ist jedoch keineswegs notwendig. Um zu einer notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingung zu gelangen, spalte man den Ordnungstypus \bar{M} in Teiltypen, so daß zwei Elemente dann und nur dann zu demselben Teiltypus gezählt werden, wenn sie in bezug auf a von derselben Rangbeziehung sind. Das Element a werde sämtlichen Teiltypen zugezählt. Betrachtet man nun diese Teiltypen und die durch sie aus der Menge T ausgeschiedenen Teilmengen gesondert, so gelangt man zu der *notwendigen und hinreichenden Bedingung*: *Es muß unter den Teiltypen wenigstens einen geben, so daß das Element a in bezug auf denselben zugänglich und dabei Häufungsstelle der in demselben enthaltenen Teilmenge von T sei.*

Für einfache Ordnungstypen kann man die Existenz einer Fundamentalreihe aus der Möglichkeit der Wohlordnung der Teilmenge folgern.

Die kleinste der Mächtigkeiten aller Fundamentalreihen aus T , die gegen a konvergieren, heiße die *Häufung der Teilmenge T in der Umgebung von a* . Dieselbe ist niemals größer als die Zugänglichkeit.

Ein drittes Aleph, das für die Umgebung der Häufungsstelle charakteristisch ist, ist die kleinste der Mächtigkeiten aller Teilmengen von T , die in den Umgebungen von a enthalten sind. Dieses letzte Aleph ist für Teilmengen des stetigen Raumes schon durch G. Cantor definiert worden und heiße nach ihm die *Mächtigkeit T in der Umgebung des Elementes a* .

Die definierten drei Mächtigkeiten sind für die Struktur der Ordnungstypen, resp. ihrer Teilmengen von Wichtigkeit; sie sind Invarianten der stetigen Abbildung.

VIII. Ein Ordnungstypus heiße *in sich dicht*, wenn jedes Element Hauptelement ist; ist jedes Element ein Cantorsches Hauptelement, so heiße er *in sich dicht im Sinne Cantors*.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß *der zu einem in sich dichten Ordnungstypus gehörige vollständige Ordnungstypus ebenfalls in sich dicht ist*; er ist in sich dicht im Sinne Cantors, wenn dies für die primäre Menge der Fall ist. Dagegen ist eine Projektion eines in sich dichten Typus nicht notwendig in sich dicht.

Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heißt *in sich dicht*, wenn sie alle ihre Elemente zu Häufungsstellen hat.

Ein zugleich abgeschlossener und in sich dichter Ordnungstypus, wie auch eine zugleich abgeschlossene und in sich dichte Teilmenge heißen *perfekt*. Der perfekte Ordnungstypus ist ein *Cantorscher**), wenn alle Elemente Cantorsche Hauptelemente sind.

*) Indem ich den Begriff des Hauptelementes allgemeiner als Herr Cantor fasse, bezeichne ich jene Klassen der Hauptelemente, wie auch der vom Begriffe des

IX. Die *Ableitung* T' einer Teilmenge T , die *Komplementärmenge*, wie auch die Begriffe *überall dicht* und *nirgends dicht* für Teilmengen werden hier analog wie für Punktmannigfaltigkeiten definiert. Damit die *Ableitung einer Teilmenge T abgeschlossen* sei, ist notwendig und hinreichend, daß T selbst in einer abgeschlossenen Teilmenge enthalten sei. Die kleinste abgeschlossene Menge dieser Eigenschaft ist dann die Vereinigungsmenge $\{T, T'\}$ von T und T' , d. h. die Gesamtheit aller Elemente, die entweder der Menge T oder ihrer Ableitung oder aber beiden angehören.

Die Teilmengen T_1, T_2 heißen *isoliert* in bezug aufeinander, wenn den Mengen $\{T_1, T_1'\}$ und $\{T_2, T_2'\}$ kein Element gemeinsam ist.

X. Ein Ordnungstypus heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht in zwei isolierte Teilmengen zerlegt werden kann, die Komplementärmengen zueinander sind. Eine Teilmenge heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht zwei isolierte Teilmengen enthält, die sie ganz ausmachen.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß *nur in sich dichte Ordnungstypen* im Sinne unserer Definition *zusammenhängend* sein können.

Eine Teilmenge, die selbständig einen zusammenhängenden Ordnungstypus abgibt, ist nicht notwendig zusammenhängend; und es muß auch nicht jede zusammenhängende Teilmenge selbständig von zusammenhängendem Ordnungstypus sein.

Jede zusammenhängende Teilmenge bleibt zusammenhängend, wenn man ihr beliebige Häufungsstellen beifügt.

Ich sage von einer Teilmenge τ , sie *störe den Zusammenhang* der Menge M oder der Teilmenge T , wenn es zwei Teilmengen T_1, T_2 gibt, die nicht ganz τ angehören, insgesamt die Menge M , resp. die Teilmenge T samt τ ausmachen, so daß die gemeinsamen Elemente und Häufungsstellen der Mengen $\{T_1, T_1'\}$ und $\{T_2, T_2'\}$ der Menge τ angehören.

Läßt sich eine Menge in zwei isolierte Teilmengen spalten, so ist jede zusammenhängende Teilmenge der Menge ganz in einer derselben enthalten. Auf Grund dieser Bemerkung beweist man leicht folgende Sätze

Die Vereinigungsmenge jeder abzählbaren Folge von zusammenhängenden Teilmengen, von denen jede mit der nächstfolgenden wenigstens ein Element gemein hat, ist ebenfalls zusammenhängend.

Die Vereinigungsmenge einer Menge von zusammenhängenden Teilmengen, für welche es eine zusammenhängende Teilmenge gibt, die mit jeder der Mengen wenigstens ein Element gemein hat und ganz der Vereinigungsmenge angehört, ist zusammenhängend.

Gibt es für jedes Paar von Elementen einer Teilmenge zusammen-

Hauptelementes abhängenden Begriffe mit dem Namen Cantors, die für einfache Typen die Begriffe Cantors ergeben.

hängende Teilmengen, die beide Elemente enthalten, so ist auch die Teilmenge zusammenhängend.

XI. Läßt sich eine Projektion eines Ordnungstypus in zwei isolierte Teilmengen spalten, so ist dadurch auch eine Spaltung des Ordnungstypus in zwei isolierte Teilmengen definiert, jene nämlich, die die beiden Teilmengen der Projektion zu Projektionen haben. *Sämtliche Projektionen eines zusammenhängenden Ordnungstypus sind somit ebenfalls zusammenhängend.*

Für irgend zwei Teilmengen eines vollständigen Ordnungstypus, die Komplementärmengen zueinander sind, gibt es immer eine Zahl i und je ein Element a und b der beiden Teilmengen, so daß

$$a \bar{j} b$$

sei für alle $j \neq i$. Sind nun die beiden Teilmengen isoliert, so bilden auch die ihnen angehörenden Elemente der einfach geordneten Menge aller x , für welche für alle $j \neq i$

$$x \bar{j} a \bar{j} b,$$

zwei isolierte Teilmengen. Diese einfach geordnete Menge ist aber der i^{ten} einfachen Projektion des vollständigen Ordnungstypus ähnlich.

Damit also ein n -facher vollständiger Ordnungstypus zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß er die Komplexmenge von n zusammenhängenden, einfachen Ordnungstypen bilde.

Aus den beiden Sätzen folgt der für unsere weiteren Untersuchungen äußerst wichtige Satz, daß jeder zu einem zusammenhängenden Ordnungstypus gehörige vollständige Ordnungstypus ebenfalls zusammenhängend ist.

XII. *Damit ein perfekter Ordnungstypus zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß er nicht in zwei perfekte Teilmengen zerlegt werden kann, die Komplementärmengen zueinander sind.* Die Notwendigkeit dieser Bedingung leuchtet unmittelbar ein. Daß sie auch hinreicht, folgt daraus, daß, wenn ein perfekter Ordnungstypus überhaupt zwei isolierte Teilmengen besitzt, die Komplementärmengen zueinander sind, dieselben notwendig perfekt sind.

Dieselbe Bedingung gilt auch für zusammenhängende perfekte Teilmengen.

XIII. Um die perfekten, zusammenhängenden Typen näher zu untersuchen, wende ich mich zunächst zu den einfachen.

Jede Teilung der Elemente eines einfachen Ordnungstypus in zwei Klassen, so daß jedes Element einer und nur einer der beiden Klassen angehört und jedes Element der ersten Klasse jedem Elemente der zweiten Klasse vorangeht, nenne ich einen *Schnitt*.

Wie man leicht zeigt, sind die einfachen, perfekt zusammenhängenden

Ordnungstypen dadurch charakterisiert, daß es für jeden Schnitt ein und nur ein Element gibt, so daß kein Element der ersten Klasse auf dieses Element folgt und kein Element der zweiten Klasse ihm vorangeht. Das Element ist entweder letztes Element der ersten oder erstes Element der zweiten Klasse. Ich sage, das Element werde durch den Schnitt definiert. Es kann zwei uneigentliche Schnitte geben, bei denen die erste, resp. die zweite Klasse kein Element enthält; sie definieren eventuell ein erstes, resp. ein letztes Element.

XIV. Sind a und b irgend zwei Elemente und ist $a < b$, so nenne ich die Gesamtheit aller Elemente, die dem Elemente a nicht vorangehen und zugleich nicht auf das Element b folgen, das *Intervall* ab . a und b heißen *Endelemente*, die übrigen *innere Elemente* des Intervalls. Für Intervalle in einfachen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen besteht nun der Satz:

Wird für das Intervall ab eine unendliche Menge von Intervallen definiert, so daß jedes Element des Intervalles ab inneres Element wenigstens eines dieser Intervalle ist, so gibt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.)*

Um den Satz zu beweisen, definiere ich einen Schnitt auf folgende Art: Ich weise der zweiten Klasse jedes Element c zu, für welches $a < c$ ist, und es keine endliche Teilmenge der Intervallmenge gibt, so daß jedes Element des Intervalles ac inneres Element für wenigstens ein Intervall dieser Teilmenge wäre. Jedes andere Element weise ich der ersten Klasse zu. Daß hierdurch ein Schnitt definiert wird, d. h. daß jedes Element der ersten Klasse jedem Elemente der zweiten Klasse vorangeht, leuchtet unmittelbar ein. Jedenfalls gehört das Element a , wie auch eine Umgebung desselben der ersten Klasse an. Wäre nun der Satz nicht richtig, so müßte es Fälle geben, wo b der zweiten Klasse angehört; das durch den Schnitt definierte Element müßte dann dem Intervalle ab angehören, ohne mit a zusammenzufallen. Für dieses Element gäbe es nun jedenfalls ein umschließendes Intervall der Intervallmenge; dies führt aber zu Widerspruch, denn in diesem Intervalle müßten sowohl Elemente der ersten, wie der zweiten Klasse liegen.

XV. Der Begriff des Intervalles läßt sich zunächst für n -fache vollständige Ordnungstypen erweitern. Betrachtet man nämlich je ein Inter-

*) Der Satz bildet eine Erweiterung und Übertragung des Heine-Borelschen Satzes, der für eine abzählbare Menge von Intervallen des Kontinuums analog lautet. Der Borelsche Beweis, der mit den Distanz- und Abzählbarkeitsbegriffen operiert, läßt sich nicht übertragen. Der hier gegebene Beweis scheint auch einfacher als der Borelsche zu sein. Siehe auch meine Note „Sur un théorème de M. Borel“, C. R. (23 janvier 1905).

vall der einfachen Ordnungstypen, deren Komplexmenge der vollständige Ordnungstypus ist, so definieren diese Intervalle ebenfalls eine Komplexmenge, welche Teilmenge des vollständigen Ordnungstypus ist und die ich ein *Elementargebiet* desselben nenne. Elemente des Elementargebietes, die Komplexe aus nur inneren Elementen der Intervalle sind, heißen *innere Elemente* des Elementargebietes; die Gesamtheit der übrigen Elemente bildet die *Grenze* desselben.

Der Begriff des Elementargebietes läßt sich dann auch für jeden Ordnungstypus definieren, indem eine Teilmenge desselben Elementargebiet genannt wird, wenn sie Elementargebiet für den zugehörigen vollständigen Ordnungstypus ist.

XVI. Für vollständige Ordnungstypen, die Komplexmengen von einfachen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen sind, also für alle vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen gilt der Satz in XIV, wenn man an Stelle des Wortes Intervall das Wort Elementargebiet setzt. Ich beweise ihn mittels der Schlußmethode von n auf $n + 1$. Der Satz gilt nach XIV für $n = 1$. Er gelte für alle positiven ganzen Zahlen bis n . Betrachte man dann einen $(n + 1)$ -fachen vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, ein Elementargebiet E desselben und eine unendliche Menge von Elementargebieten, welche die Eigenschaft besitzt, daß jedes Element von E inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Gebietsmenge ist. Jede Gesamtheit aller Elemente des $(n + 1)$ -fachen Ordnungstypus, welchen dasselbe Element des $n + 1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus in der Projektion entspricht, bildet einen n -fachen vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, in welchem durch das Elementargebiet E und die transfinite Gebietsmenge ein Elementargebiet und eine Gebietsmenge von ähnlicher Eigenschaft ausgeschieden werden. Wendet man nun den für n als richtig vorausgesetzten Satz auf diesen n -fachen Ordnungstypus an, so folgt, daß es eine endliche Teilmenge von Elementargebieten der gegebenen Gebietsmenge gibt, so daß jedes Element, das zugleich dem Elementargebiete E und dem definierten n -fachen Ordnungstypus angehört, inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Teilmenge sei. Zu dieser Teilmenge gibt es nun ein Intervall des $n + 1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus, so daß jedes Element von E , dessen $n + 1^{\text{te}}$ einfache Projektion innerhalb dieses Intervalles liegt, inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der endlichen Teilmenge ist. Betrachtet man nun alle analogen n -fachen Ordnungstypen, die Elemente aus E enthalten, so bestimmen dieselben ein Intervall und eine Intervallmenge im $n + 1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus. Wendet man nun auf diese den Satz für $n = 1$ an, so ist dadurch der Satz bewiesen.

Ist somit E ein Elementargebiet eines vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Elementargebieten desselben von der Beschaffenheit, daß jedes Element von E inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Gebietsmenge ist, auch eine endliche Teilmenge solcher Elementargebiete.

XVII. Der soeben bewiesene Satz läßt sich noch allgemeiner fassen. Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heiße *im Endlichen gelegen*, wenn sie ausschließlich aus inneren Elementen besteht und wenn jede Fundamentalreihe aus ihr ein Grenzelement besitzt, das inneres Element ist. *Jede im Endlichen gelegene Teilmenge ist dann in einem Elementarbereiche des zugehörigen vollständigen Ordnungstypus enthalten.*

Ist nun der Ordnungstypus perfekt zusammenhängend und die im Endlichen gelegene Teilmenge abgeschlossen, und wird eine Menge von Elementargebieten definiert, derart, daß jedes Element der abgeschlossenen Menge inneres Element für wenigstens ein Gebiet der Gebietsmenge sei, so gibt es für jedes Element jenes Elementargebietes des zugehörigen vollständigen Typus, das die abgeschlossene Menge enthält, wenn es nicht der abgeschlossenen Menge angehört, ein umschließendes Elementargebiet, innerhalb dessen kein Element der abgeschlossenen Menge liegt. Die Gesamtheit dieser Elementargebiete bildet mit der vorgegebenen Gebietsmenge eine Gebietsmenge, auf die sich der gegebene Satz anwenden läßt. Die ausgeschiedene endliche Teilmenge zerfällt dann in zwei Teile, der eine gehört der vorgegebenen, der andere der abgeschlossenen Gebietsmenge an. Der erste Teil der endlichen Teilmenge besitzt aber die Eigenschaft, daß es darin für jedes Element der abgeschlossenen Menge wenigstens ein Elementargebiet gibt, für welches es inneres Element ist. Es besteht somit der Satz:

Ist A eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Elementargebieten von der Eigenschaft, daß jedes Element von A inneres Element für wenigstens eines derselben ist, eine endliche Teilmenge solcher Elementargebiete.

XVIII. Man definiere endlich als *Gebiet* jede zusammenhängende Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, deren Zusammenhang durch keine Teilmenge der Komplementärmenge gestört wird, die ausschließlich aus inneren Elementen besteht und keine Häufungsstelle der Komplementärmenge enthält. Die Gesamtheit jener Elemente der Komplementärmenge, die Häufungsstellen für das Gebiet sind, heißt die *Grenze* des Gebietes. *Die Grenze bildet eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge.* Die Grenze gehört dem Gebiete nicht an; wird sie ihm angeschlossen, so entsteht eine perfekt zusammenhängende Menge, die man schlechthin

ebenfalls Gebiet nennen kann; von Elementen, die dem ursprünglichen Gebiete angehören, wird man dann sagen, sie seien *innerhalb* des Gebietes gelegen.

Da es für jedes Element innerhalb eines Gebietes ein umschließendes Elementargebiet gibt, das innerhalb des Gebietes liegt, so folgt, daß der zuletzt gegebene Satz auch in folgender Form ausgesprochen werden kann:

Ist A eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Gebieten von der Eigenschaft, daß jedes Element von A innerhalb wenigstens eines derselben liegt, eine endliche Teilmenge solcher Gebiete.

XIX. Man definiere als *Gebietekomplex* jede Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, die ausschließlich aus inneren Elementen besteht und keine Häufungsstelle der Komplementärmenge enthält. Elemente des Gebietekomplexes heißen *innerhalb* desselben; Elemente der Komplementärmenge, die Häufungsstellen für den Komplex sind, heißen *auf der Grenze* desselben gelegen. Die Grenze bildet eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge; samt der Grenze bildet der Gebietekomplex eine perfekte Menge.

Jedes Gebiet ist zugleich Gebietekomplex.

Kann der Gebietekomplex durch eine endliche Anzahl von Elementargebieten ausgefüllt werden, die auch übereinander greifen dürfen, so heiße er ein *Elementarkomplex*.

XX. Für irgend zwei im Endlichen gelegene, isolierte Teilmengen eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus gibt es einen Elementarkomplex, der die eine Menge im Inneren enthält, die andere ausschließt. Denn jede der Mengen, z. B. die erste, bildet samt ihrer Ableitung eine abgeschlossene Menge, von der jedes Element in ein Elementargebiet eingeschlossen werden kann, welches kein Element der zweiten Menge enthält. Es wird auf diese Art eine Menge von Elementargebieten definiert; aus derselben läßt sich nach XVII eine endliche Teilmenge, also ein Elementarkomplex ausscheiden, der die abgeschlossene Menge enthält.

XXI. Es sei A eine abgeschlossene, im Endlichen gelegene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus; alle Elemente der abgeschlossenen Menge seien zugänglich und zwar von derselben Zugänglichkeit. Man betrachte die Menge aller Elementarkomplexe, die die abgeschlossene Menge enthalten. Es kann aus derselben, wie man leicht zeigt, eine wohlgeordnete Menge von Gebietekomplexen ohne letztes Glied ausgeschieden werden, so daß jeder Komplex in allen vorhergehenden enthalten ist, und daß die Gesamtheit jener Elemente, die in allen Komplexen enthalten sind, die abgeschlossene Menge ausmacht. Man kann dann sagen, die *Komplexmenge* konvergiere gegen die abgeschlossene Menge.

Ist die abgeschlossene Menge zusammenhängend, so gibt es in jedem Gebietekomplexe, dem sie angehört, ein wohldefiniertes Gebiet, welches sie enthält und in welchem alle Gebiete ähnlicher Eigenschaft enthalten sind. Dasselbe wird gebildet durch die Gesamtheit aller zusammenhängenden Teilmengen des Gebietekomplexes, welche Elemente der abgeschlossenen Menge enthalten.

Es folgt hieraus, daß es für jede perfekt zusammenhängende, im Endlichen gelegene Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, die aus Elementen gleicher Zugänglichkeit besteht, eine wohlgeordnete Menge von Gebieten ohne letztes Glied gibt, welche gegen sie konvergiert.

Sind alle Elemente der abgeschlossenen Menge einfach zugängliche Hauptelemente, so kann das Verfahren so eingerichtet werden, daß die konvergente wohlgeordnete Menge eine abzählbare Folge abgibt.

XXII. Ist die Grenze eines Gebietes eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus im Endlichen gelegen und besteht sie aus Elementen gleicher Zugänglichkeit, so lassen sich auf dieselbe die geführten Betrachtungen anwenden. Es gibt dann eine wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ohne letztes Glied, so daß jeder Komplex alle folgenden enthält und die Gesamtheit der Elemente, die allen Komplexen angehören, die Gebietsgrenze ausmacht. Für jeden dieser Elementarkomplexe bildet die Gesamtheit jener Elemente des Gebietes, die weder dem Elementarkomplexe, noch der Grenze desselben angehören, ebenfalls einen Elementarkomplex. *Es gibt somit eine wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ohne letztes Glied, von denen jeder in allen folgenden enthalten ist, derart, daß die Gesamtheit aller Elemente, die in irgend einem dieser Komplexe enthalten sind, das ganze Gebiet ausmacht.*

Für irgend ein Element des Gebietes gibt es nun einen Elementarkomplex der Menge, in dem es enthalten ist; es gibt dann einen wohldefinierten Elementarkomplex, Teil jenes Elementarkomplexes, welcher zugleich ein Gebiet ist, das Element enthält und alle Elementarkomplexe ähnlicher Eigenschaft umfaßt. Die Grenze dieses Gebietes gehört der Grenze des Elementarkomplexes an. Durch jene wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ist dann auch die wohlgeordnete Menge dieser Elementarkomplexe bestimmt, welche Gebiete sind und alle dasselbe Element enthalten. Jedes Gebiet der Menge ist in allen folgenden enthalten. Die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem (also auch allen folgenden) dieser Gebiete angehören, bilden ein Gebiet, das im ursprünglichen Gebiete und dessen Grenze in der Grenze desselben enthalten ist; dasselbe ist aber mit dem ursprünglichen Gebiete identisch, denn die Grenze des Gebietes stört nicht den Zusammenhang.

Es gibt somit für jedes Gebiet eines perfekt zusammenhängenden Ord-

nungstypus, dessen Grenze im Endlichen gelegen ist und nur aus Elementen gleicher Zugänglichkeit besteht, eine wohlgeordnete Menge von Gebieten ohne letztes Glied, die zugleich Elementarkomplexe sind, so daß jedes in allen folgenden enthalten ist und die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem dieser Gebiete angehören, das ursprüngliche Gebiet ausmacht.

XXIII. Eine im Endlichen gelegene zusammenhängende Gebietsgrenze, in der jedes Element Häufungsstelle jener Menge ist, die die Komplementärmenge des Gebietes samt der Grenze bildet, heiße eine *geschlossene Grenze*. Indem man dem in XXII angegebenen Verfahren eine gegen die Grenze konvergierende wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen zugrunde legt, die zugleich Gebiete sind, was doch nach XXI für die zusammenhängende Grenze möglich ist, wenn nur dieselbe aus gleich zugänglichen Elementen besteht, so führt das Verfahren zu einer wohlgeordneten Menge ohne letztes Glied von Elementarkomplexen, die gleichzeitig Gebiete mit geschlossenen Grenzen sind; jedes Gebiet ist in allen folgenden enthalten und die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem dieser Gebiete angehören, macht das ursprüngliche Gebiet aus.

Man zeigt leicht, daß es für jedes Gebiet, dessen Grenze im Endlichen gelegen ist, eine wohldefinierte geschlossene Grenze gibt, derart, daß das Gebiet in jenem Gebiete, welches durch die geschlossene Grenze begrenzt wird, enthalten ist.

Hieraus und aus XXI folgert man dann, daß es für jedes Gebiet, das eine geschlossene, aus nur gleich zugänglichen Elementen bestehende Grenze hat, eine wohlgeordnete Menge ohne letztes Glied von Elementarkomplexen, die zugleich Gebiete sind, gibt, welche ebenfalls geschlossene Grenzen haben, derart, daß jedes Gebiet alle folgenden enthält und daß die Gesamtheit der Elemente, die allen Gebieten gemeinsam sind, das ursprüngliche Gebiet samt seiner Grenze ausmacht.

XXIV. Sind a und b zwei Elemente eines Ordnungstypus, die in bezug auf die i^{te} Rangordnung von verschiedenem, in bezug auf die übrigen Rangordnungen von gleichem Range sind, und bildet die Gesamtheit aller Elemente, die in bezug auf die i^{te} Rangordnung zwischen a und b liegen, und in bezug auf die übrigen Rangordnungen mit a und b von gleichem Range sind, samt a und b eine perfekte zusammenhängende Teilmenge, so nenne ich dieselbe eine *Strecke i^{ter} Art*, und bezeichne sie als die *Strecke ab* . a und b heißen *Endelemente*, die übrigen *innere Elemente* der Strecke. Zu jedem inneren Element eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus gibt es Strecken, für welche es inneres, wie auch solche, für welche es Endelement ist.

Aus einer endlichen Anzahl von Strecken lassen sich analog, wie in der Geometrie, einfache Streckenzüge zusammensetzen. Für irgend zwei

Elemente eines Gebietes gibt es immer Streckenzüge, die ganz dem Gebiete angehören und beide Elemente enthalten. Die Gesamtheit aller Streckenzüge nämlich, die das Element a enthalten, bildet eine Teilmenge A des Gebietes. Würde nun A nicht das ganze Gebiet ausfüllen, so müßte es, da der Zusammenhang des Gebietes durch die Komplementärmenge nicht gestört wird, ein Element h des Gebietes geben, welches Häufungsstelle sowohl der Menge A wie auch ihrer Komplementärmenge wäre. In einer vollständigen Umgebung von a , die dem Gebiete angehört, würden Elemente beider Komplementärmengen liegen, die sich miteinander, also auch mit a , durch Streckenzüge verbinden ließen; die Menge A muß somit das ganze Gebiet ausfüllen.

Die entwickelten Sätze bilden die Quelle für eine Reihe weiterer Sätze, besonders über Gebietsteilung, die analog lauten, wie die bekannten Sätze für Punktmannigfaltigkeiten. *)

XXV. Von dem Gesichtspunkte der entwickelten Theorie ist die Lehre von den transfiniten Punktmannigfaltigkeiten als die Theorie der Teilmengen eines gewissen zusammenhängenden Ordnungstypus aufzufassen, dessen sämtliche Elemente innerhalb Elementargebieten liegen, die perfekte Mengen ausmachen. Unter allen Ordnungstypen dieser Art ist die stetig ausgedehnte Zahlenmannigfaltigkeit durch gewisse Mächtigkeitseigenschaften ausgezeichnet. Man gelangt nun zur Frage nach der Verallgemeinerung dieser Theorie, indem man jene Mächtigkeitseigenschaften fallen läßt.

Ein n -facher Ordnungstypus der beschriebenen Art heiße ein *n -dimensionaler Bereich*, in Zeichen B^n . Werden zu den Projektionen desselben eventuell erste und letzte Elemente hinzugefügt, so daß dieselben zu perfekt zusammenhängenden Typen ergänzt werden, und die Komplexmenge gebildet, so läßt sich der Bereich als ein Gebiet derselben auffassen und jede im Endlichen gelegene Teilmenge der Komplexmenge, welche samt ihren Häufungsstellen dem Bereiche angehört, ist auch eine im Endlichen gelegene Teilmenge des Bereiches. Die erhaltenen Resultate lassen sich somit auf die Bereiche übertragen.

Löcse (Ungarn), im Januar 1905.

*) Bezüglich der Sätze für Punktmannigfaltigkeiten s. Schoenflies, Beiträge zur Theorie der Punktmengen II., Math. Ann., Bd. 59, S. 129.