Über Complexcurven.[1]

Von **Konrad Zindler** in Wien.

Die Aufgabe, die sämmtlichen Curven eines linearen Complexes zu finden, hat Lie auf mehrere Arten gelöst (S. z. B. Geom. d. Berührungstransformationen, S. 234—237, 239; auch Math. Ann. Bd. V. S. 169), das analoge Problem für den tetraedralen Complex hat er auf Quadraturen zurückgeführt, in denen noch eine willkürliche Function auftritt (Geom. d. Berührungstransf. S. 327). Die Frage nach den Integralcurven einer beliebigen Monge'schen Gleichung[2])

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

führt bekanntlich auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung (vgl. a. a. O. S. 553, auch S. 256). Man kann jedoch sofort auch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung erhalten, in der allerdings noch willkürliche Functionen auftreten, wenn man zwei der drei Größen x, y, z als willkürliche Functionen eines Parameters wählt. Dasselbe gilt natürlich auch für den Specialfall, dass die Monge'sche Gleichung einen Liniencomplex darstellt. Hier ist aber noch ein anderes Verfahren möglich:

Es sei ein Complex durch seine Differentialgleichung:

$$\Phi(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx';\ x', y', z') = 0 \tag{1}$$

gegeben. Wir setzen die Gleichungen einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ in der Form an

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + v.\lambda(u) \\ y &= \psi(u) + v.\mu(u) \\ z &= \chi(u) + v.\nu(u). \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn sie abwickelbar ist und zugleich dem Complexe angehört, wird sie durch ihre Rückkehrkante zu einer Complexcurve führen. Die erstere Bedingung liefert die Gleichung:

---

[1]) Vortrag, gehalten in der Sect. 1. (Mathem.) der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in München, Sept. 1899.

[2]) Ich bediene mich der Terminologie und der Bezeichnungen von Lie und Scheffers; vgl. besonders a. a. O. S. 248, 251.

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \varphi' & \psi' & \chi' \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Damit $\mathfrak{R}$ dem Complexe angehöre, muss (1) erfüllt sein, wenn man für x' y' z' aus (2) die Werte $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, d. h. λ, μ, ν einsetzt. Dies liefert die Bedingung:

$$\Phi(\psi\nu - \chi\mu, \chi\lambda - \varphi\nu, \varphi\mu - \psi\lambda; \lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{4}$$

Zur Bestimmung der sechs Functionen φ, ψ, χ, λ, μ, ν hat man also die zwei Gleichungen (3) und (4), von denen die letztere die Ableitungen dieser Functionen nicht enthält. Denkt man sich also etwa eine derselben vermöge (4) durch die fünf anderen ausgedrückt, so bleiben in (3) noch vier Functionen willkürlich, während sich für die letzte eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ergibt.

Wenn man $\mathfrak{R}$ von vornherein als Tangentenfläche einer Curve annimmt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi + v\varphi' \\ y &= \psi + v\psi' \\ z &= \chi + v\chi', \end{aligned} \tag{5}$$

so ist (3) von selbst erfüllt, und es treten in (4) φ', ψ', χ' an Stelle von λ, μ, ν, wodurch diese Gleichung genau die Form der ursprünglichen Monge'schen Gleichung annimmt, nur dass jetzt die Symbole φ, ψ, χ Functionen eines Parameters bedeuten, von denen zwei willkürlich sind (vgl. den ersten Absatz). Nimmt man die Bogenlänge als unabhängigen Parameter, so hat man eine einzige willkürliche Function, die sich der Natur der Sache nach nicht mehr beseitigen lässt. Es ist übrigens von vornherein klar, dass eine und dieselbe Monge'sche Gleichung, die man gewöhnlich so zu interpretieren pflegt, dass sie jedem Raumpunkt einen Elementarkegel zuordnet, zur Differentialgleichung einer Complex*curve* wird, sobald man durch passende Einschränkung der willkürlichen Elemente die Fortschreitungsrichtung in jedem Punkte endlichdeutig macht.

Hiernach könnte der frühere Ansatz (2) überflüssig scheinen; es ist jedoch zu bemerken, dass die Gleichungen der abwickelbaren Regelfläche möglicherweise in der Form (2) einfacher sein können, als in der Form (5). In diesem Fall würde man durch passende Wahl der willkürlichen Functionen aus (3) und (4) eine einfachere Differentialgleichung erhalten können, als durch Verwendung der ursprünglichen Monge'schen Gleichung. Fehlt z. B. in (4) eine der drei Functionen φ, ψ, χ (oder in der ursprünglichen Gleichung (1) eins der drei Argumente x, y, z), so lässt sich aus (3) die Ableitung der betreffenden Function berechnen und somit die Bestimmung sämmtlicher Complexcurven auf Quadraturen zurückführen, was aus der ursprünglichen Gleichung (1) nicht unmittelbar ersichtlich ist.[1])

[1]) Im Vortrag wurde noch darauf aufmerksam gemacht, dass ein Satz von Lie (a. a. O. S. 308), wornach die Torsion einer Complexcurve in einem Punkt nur vom Linienelement des betreffenden Punktes abhängen soll, nicht allgemein richtig ist. Dies sieht man zunächst an Beispielen leicht ein: Der Complex

$$x'^2 + y'^2 - \varkappa^2 z'^2 = 0$$

(vgl. a. a. O. S. 255) enthält auch alle Schraubenlinien mit der Neigung arccot $\varkappa$ gegen die xy-Ebene. Durch ein gegebenes Linienelement gehen ihrer noch ∞^1 von verschiedener Torsion. Beim allgemeineren Complex sämmtlicher Treffgeraden einer im Endlichen gelegenen Curve erkennt man durch eine Überlegung ebenfalls die Unabhängigkeit der Torsion vom Linienelement. Der Fehler im Beweise liegt darin, dass a. a. O. S. 310 die Formel (73) [die nicht, wie (72) eine Identität ist], der Reihe nach partiell nach einer einzigen der Größen x', y', z' differenziert wird. Doch hat schon, wie mir Herr Scheffers inzwischen mittheilte, Demoulin in den Comptes Rendus, Aug. 1892 den in Rede stehenden Satz aufgestellt, ihn dann ebenda Mai 1897 zurückgezogen und durch den richtigen ersetzt (wornach die Torsion und die erste Krümmung aller Complexcurven, die durch ein gegebenes Linienelement gehen, daselbst in derselben linearen Relation stehen), auch erwähnt, dass sich der Satz bei Lie finde.