Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies.

Par

ANDRÉ MARKOFF à St. Pétersbourg.

Dans cette note j'ai en vue de traiter la question des limites précises de minima des formes quadratiques indéfinies

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

d'un même déterminant

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

La question analogue pour les formes binaires a été traitée dans mes mémoires «Sur les formes quadratiques» (Mathem. Annalen XV et XVII).

Il y a été démontré, que les limites précises des minima des formes quadratiques indéfinies

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

d'un même déterminant

$$D = b^2 - ac$$

forment la série

$$\sqrt{\frac{4}{5}D},\ \sqrt{\frac{1}{2}D},\ \sqrt{\frac{100}{221}D}, \cdots$$

laquelle nous pouvons prolonger infiniment.

Il est très vraisemblable, que les limites précises des minima des formes ternaires font aussi une série infinie. Mais à présent je ne puis établir que les trois premiers membres de cette série:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)},\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)},\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)},$$

(D) étant la valeur absolue de D.

Conformément à cela nous allons démontrer la proposition suivante.

La limite supérieure précise des minima des toutes formes indéfinies

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

d'un même déterminant D, est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_0 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}D}\,(x^2 + xy + y^2 - 2z^2)^{*)}.$$

Pour les formes non équivalentes à la forme φ_0 cette limite est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}D}\,(x^2 + xy - y^2 - 2z^2).$$

Pour les formes non équivalentes aux formes φ_0 et φ_1 cette limite est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}D}\,(x^2 + y^2 - 3z^2).$$

Enfin, si l'on exclut les formes équivalentes aux formes φ_0, φ_1, φ_2 la valeur absolue de chaque autre forme f peut être faite plus petite que

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)},$$

x, y, z étant les nombres entiers et

$$x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

Pour simplifier les recherches nous supposons

$$D = 1,$$

en remplaçant la forme f d'un déterminant arbitraire par la forme

$$\frac{ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy}{\sqrt[3]{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2}}.$$

Outre cela nous supposons que tous les rapports

$$\frac{a'}{a},\ \frac{a''}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{b'}{a},\ \frac{b''}{a}$$

sont des nombres rationnels.

---

*) Ce résultat m'avait été communiqué dejà longtemps par M. A. Korkine, il y a 20 ans.

Dans cette supposition chaque forme f a un minimum et peut être réduite ainsi que la valeur absolue de son premier coefficient a est égale à ce minimum.

Quant aux formes, pour lesquelles les rapports

$$\frac{a'}{a},\ \frac{a''}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{b'}{a},\ \frac{b''}{a}.$$

sont des nombres irrationnels, on ne peut pas assurer que chacune de ces formes a un minimum; mais il n'est pas difficile d'étendre la proposition, enoncée plus haut, aussi sur ces formes.

En considérant avec la forme

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

son adjointe

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

nous avons les relations

$$\begin{array}{llll}
A = a'a'' - b^2, & B = b'b'' - ab, & a = A'A'' - B^2, & b = B'B'' - AB, \\
A' = a''a - b'^2, & B' = b''b - a'b', & a' = A''A - B'^2, & b' = B''B - A'B', \\
A'' = aa' - b''^2, & B'' = bb' - a''b'', & a'' = AA' - B''^2, & b'' = BB' - A''B''.
\end{array}$$

De la théorie des formes quadratiques on sait la proposition suivante.

Si la forme f par la substitution

$$\begin{aligned}
x &= \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1, \\
y &= \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \\
z &= \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1
\end{aligned}$$

se transforme dans la forme

$$f_1 = a_1 x_1{}^2 + a_1{}' y_1{}^2 + a_1{}'' z_1{}^2 + 2b_1 y_1 z_1 + 2b_1{}' z_1 x_1 + 2b_1{}'' x_1 y_1$$

équivalente à f, la forme F adjointe à f se transforme par la substitution

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\
Y_1 &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\
Z_1 &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z
\end{aligned}$$

dans une forme

$$F_1 = A_1 X_1{}^2 + A_1{}' Y_1{}^2 + A_1{}'' Z_1{}^2 + 2B_1 Y_1 Z_1 + 2B_1{}' Z_1 X_1 + 2B_1{}'' X_1 Y_1.$$

équivalente à F et adjointe à f_1.

Pour notre but le cas particulier de cette proposition est important, où la forme f se transforme par la substitution

$$x = x_1, \quad y = \beta' y_1 + \gamma' z_1, \quad z = \beta'' y_1 + \gamma'' z_1$$

et la forme F — par la substitution

$$X_1 = X, \quad Y_1 = \beta' Y + \beta'' Z, \quad Z_1 = \gamma' Y + \gamma'' Z,$$

la différence

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$$

étant égale à ± 1.

Dans ce cas

$$a = a_1, \qquad A = A_1$$

et les formes binaires

$$a'y^2 + 2byz + a''z^2, \qquad A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

se transforment, par les substitutions indiquées, dans les formes équivalentes

$$a_1'y_1^2 + 2b_1y_1z_1 + a''z_1^2, \qquad A_1'Y_1^2 + 2B_1Y_1Z_1 + A_1''Z_1^2.$$

Il est aussi important de remarquer la représentation de la forme f par les sommes

$$f = a\left(x + \frac{b''}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{A''y^2 - 2Byz + A'z^2}{a}$$
$$= a\left(x + \frac{b''}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{A''}{a}\left(y - \frac{B}{A''}z\right)^2 + \frac{z^2}{A''}.$$

La seconde de ces deux représentations manifeste, que des deux nombres

$$a, \; A''$$

l'un au moins doit être négatif; car dans le cas contraire la forme f est une forme positive.

Il est facile de voir que ce résultat s'étend aussi à chacune des 5 paires:

$$(1)\; a, A'; \quad (2)\; a', A; \quad (3)\; a', A''; \quad (4)\; a'', A; \quad (5)\; a'', A'.$$

En supposant que la valeur absolue de a est égale au minimum de la forme f, nous allons distinguer deux cas:

(1) $$a > 0, \qquad a < 0.$$

Dans le cas

$$a > 0,$$

les nombres

$$A', \; A''$$

sont négatifs et par conséquent les formes

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2, \qquad ax^2 + 2b''xy + a'y^2$$

sont indéfinies.

Cela étant, nous pouvons assurer que les minima des deux formes

$$\frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}} \quad \text{et} \quad \frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}$$

sont plus petits que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, si ces formes ne sont pas équivalentes aux formes

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{4}{5}}\,(x^2 - xy - y^2), \qquad \psi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x^2 - 2xy - y^2).$$

D'autre part le minimum de la forme

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

et le minimum de la forme

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2$$

ont, par supposition, la même valeur a.

Il en résulte, que le cas

$$a > 0$$

peut être réduit au cas

$$a < 0,$$

si l'une des deux formes

$$\frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}}, \qquad \frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}$$

est equivalente à la forme ψ_0 ou à la forme ψ_1.

Et l'on aura

$$a < \sqrt{-\frac{1}{2}A'}, \qquad a < \sqrt{-\frac{1}{2}A''},$$

s'il n'y a pas cette équivalence.

Or en considérant la forme négative

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2,$$

pour laquelle on a

$$A'A'' - B^2 = a,$$

nous pouvons supposer, que cette forme est réduite de telle manière, qu'on a

$$A'A'' \leqq \frac{4}{3}a.$$

En combinant la dernière inégalité avec les inégalités

$$a < \sqrt{-\frac{1}{2}A'}, \qquad a < \sqrt{-\frac{1}{2}A''}$$

on trouvera

$$a < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Donc le cas $a > 0$ peut être réduit au cas $a < 0$, si nous excluons les formes, dont la valeur absolue peut s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

En abordant le cas

$$a < 0,$$

nous pouvons supposer la forme indéfinie

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

réduite de telle manière, qu'on aura

$$A' < 0, \quad A'' > 0, \quad \xi > 1 \quad \text{et} \quad \eta > 1$$

en désignant par

$$\xi \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\eta}$$

deux racines de l'équation

$$A'\xi^2 + 2B\xi + A'' = 0.$$

Soient

$$\xi = \xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots}} \qquad \text{et} \qquad \eta = \eta_0 = \alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \ddots}$$

les développements des quantités ξ et η en fractions continues ordinaires, les nombres

$$\cdots,\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots$$

étant entiers et positifs.

En nous servant des désignations des mémoires mentionnées «Sur les formes quadratiques binaires indéfinies», nous posons

$$\xi_k = \alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1} + \ddots}, \qquad \eta_k = \alpha_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k-2} + \ddots},$$

$$\frac{2}{L_k} = \xi_k + \frac{1}{\eta_k}$$

et nous aurons

$$A' = -L_0\sqrt{-a}, \qquad A'' = L_{-1}\sqrt{-a}.$$

D'un autre coté, en considérant les formes

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2 \quad \text{et} \quad ax^2 + 2b''xy + a'y^2,$$

nous pouvons etablir les égalités

$$a = -\mu\sqrt{-A'} \quad \text{et} \quad a = -\nu\sqrt{A''},$$

où l'on a

$$\mu^2 \leqq \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \nu^2 \leqq \frac{4}{3}.$$

Ces égalités nous donnent les formules

$$-a = \sqrt[3]{\mu^4 L_0^2} = \sqrt[3]{\nu^4 L_{-1}^2}.$$

Or on peut prendre chaque paire

$$L_{2l},\quad L_{2l-1}$$

au lieu des nombres

$$L_0,\quad L_{-1},$$

en remplacant les formules précédentes par celles plus générales

$$-a = \sqrt[3]{\mu_l^4 L_{2l}^2} = \sqrt[3]{\nu_l^4 L_{2l-1}^2},$$

et on aura

$$\mu_l^2 \leqq \frac{4}{5}, \qquad \nu_l^2 \leqq \frac{4}{3}.$$

Excluons de nos recherches toutes les formes dont la valeur absolue peut s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

En ajoutant l'inégalité

$$-a \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

aux inégalités et aux formules précédentes on obtient

$$\frac{2}{L_{2l}} \leqq 2\mu_l^2\sqrt{3} \leqq \sqrt{7{,}68} < 2{,}772,$$

$$\frac{2}{L_{2l-1}} \leqq 2\nu_l^2\sqrt{3} < \sqrt{21{,}34} < 4{,}62.$$

Or les inégalités

$$\frac{2}{L_{2l}} < 2{,}772 \quad \text{et} \quad \frac{2}{L_{2l-1}} < 4{,}62$$

ne peuvent être satisfaites que dans les cas, où la série

$$\cdots, \alpha_{-4}, \alpha_{-2}, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \cdots$$

ne contient pas des nombres plus grands que 2 et la série

$$\cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_3, \cdots$$

ne contient pas des nombres plus grands que 3; car on a

$$4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 4{,}62.$$

Quant aux quantités μ_l^2 nous allons démontrer d'abord l'impossibilité de ces trois suppositions

$$(1) \quad \mu_{l-1}^2 = \mu_l^2 = \frac{4}{5},\ \mu_{l+1}^2 < \frac{1}{2}; \qquad (2)\ \mu_{l-1}^2 < \frac{1}{2},\ \mu_l^2 = \mu_{l+1}^2 = \frac{4}{5};$$

$$(3)\ \mu_{l-1}^2 < \frac{1}{2},\ \mu_l^2 = \frac{4}{5},\ \mu_{l+1}^2 < \frac{1}{2}.$$

Pour démontrer l'impossibilité de la première supposition

$$\mu_{l-1}^2 = \mu_l^2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_{l+1}^2 < \frac{1}{2},$$

nous remarquons qu'elle donne

$$\frac{2}{L_{2l-2}} = \frac{2}{L_{2l}} \geqq \frac{221}{125}\,\frac{2}{L_{2l+2}};$$

car la quantité μ_{l+1}^2 étant plus petite que $\frac{1}{2}$ ne peut monter au dessus de $\frac{100}{221}$.

D'autre part on a

$$\frac{2}{L_{2l}} = \xi_{2l} + \cfrac{1}{\alpha_{2l-1} + \cfrac{1}{\eta_{2l-1}}} = \eta_{2l+1} + \cfrac{1}{\alpha_{2l+1} + \cfrac{1}{\xi_{2l+2}}}$$

$$\frac{2}{L_{2l-2}} = \eta_{2l-1} + \cfrac{1}{\alpha_{2l-1} + \cfrac{1}{\xi_{2l}}}, \quad \frac{2}{L_{2l+2}} = \xi_{2l+2} + \cfrac{1}{\alpha_{2l+1} + \cfrac{1}{\eta_{2l+1}}}$$

et ensuite

$$\frac{\alpha_{2l-1}\,\xi_{2l} + 1}{\alpha_{2l-1}\,\eta_{2l-1} + 1} \cdot \frac{2}{L_{2l-2}} = \frac{2}{L_{2l}} = \frac{\alpha_{2l+1}\,\eta_{2l+1} + 1}{\alpha_{2l+1}\,\xi_{2l+2} + 1} \cdot \frac{2}{L_{2l+2}}.$$

A force de ces formules la supposition considerée fournit l'égalité

$$\xi_{2l} = \eta_{2l-1}$$

et l'inégalité

$$\eta_{2l+1} \geqq \frac{221}{125}\,\xi_{2l+2} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l+1}}.$$

Mais en vertu des conditions, établies auparavant, on doit avoir

$$\eta_{2l+1} < 3, \quad \xi_{2l+2} > \alpha_{2l+2} + \frac{1}{4} \geqq \frac{5}{4}, \quad \alpha_{2l+1} \leqq 3.$$

Cela étant, il est facile d'établir les égalités

$$\alpha_{2l} = \alpha_{2l-2} = 2, \quad \alpha_{2l+2} = 1$$

et l'inégalité

$$\eta_{2l+1} > 2{,}21 + \frac{32}{125} = 2{,}466$$

laquelle ne peut être satisfaite que pour

$$\alpha_{2l-1} = 1,$$

car la fraction $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}$, égale à $\frac{4}{9}$, est plus petite que 0,466.

Il en résulte l'inégalité

$$\frac{2}{L_{2l}} > 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} + \frac{1}{4}$$

incompatible à l'inégalité établie plus haut

$$\frac{2}{L_{2l}} < 2{,}772.$$

De même manière on peut écarter la seconde supposition

$$\mu_{l-1}^2 < \frac{1}{2}, \qquad \mu_l^2 = \mu_{l+1}^2 = \frac{4}{5}.$$

Enfin, en faisant la troisième supposition

$$\mu_{l-1}^2 < \frac{1}{2}, \quad \mu_l^2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_{l+1}^2 < \frac{1}{2},$$

on parvient aux inégalités

$$\eta_{2l+1} \geqq \frac{221}{125}\,\xi_{2l+2} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l+1}},$$
$$\xi_{2l} \quad \geqq \frac{221}{125}\,\eta_{2l-1} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l-1}},$$

et au moyen de ces inégalités on trouve

$$\alpha_{2l} = 2, \quad \alpha_{2l-1} = 1, \quad \alpha_{2l+1} = 1.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\frac{2}{L_{2l}} > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

incompatible aussi à l'inégalité précédente

$$\frac{2}{L_{2l}} < 2{,}772.$$

Nous pouvons exclure aussi les cas, où toutes les quantités μ_l^2 sont plus petites que $\frac{1}{2}$.

En effet dans ces cas on doit avoir

$$\frac{2}{L_{2l}} \leqq \frac{200}{221}\sqrt{3} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

et par conséquent

$$\cdots = \alpha_{-4} = \alpha_{-2} = 1 = \alpha_0 = \alpha_2 = \cdots,$$
$$\cdots = \alpha_{-3} = \alpha_{-1} = 3 = \alpha_1 = \alpha_3 = \cdots.$$

Cela étant, la forme

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

est identique à celle ci

$$-\sqrt{\frac{-4a}{21}}\,(3Y^2 - 3YZ - Z^2)$$

et la forme $\frac{f}{a}$ peut être presentée par la somme

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a}z + \frac{b''}{a}y\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}\,(y^2 - 3yz - 3z^2).$$

Cette somme se réduit à

$$\left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}},$$

pour

$$y = 1, \qquad z = 0$$

à

$$\left(x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}},$$

pour

$$y = 1, \qquad z = -1,$$

et à

$$\left(x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}$$

pour

$$y = 4, \qquad z = +1.$$

À cause de l'inégalité

$$f^2 \geqq a^2$$

il en résulte, que les valeurs absolues des sommes

$$x + \frac{b''}{a}, \quad x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}, \quad x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}$$

ne peuvent s'abaisser au dessous de la quantité

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}}.$$

Or cette quantité doit être plus grande que celle ci

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{4}{7}}} = 0{,}49\cdots;$$

car nous supposons $-a^3 \geqq \frac{1}{3}$.

D'autre part, en choisissant convenablement les nombres entiers x, on peut faire les valeurs des sommes

$$x + \frac{b''}{a}, \quad x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}, \quad x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}$$

plus petites que $\frac{1}{2}$ ou égales à $\frac{1}{2}$.

Conformément à cela nous pouvons établir les égalités

$$x_0 + \frac{b''}{a} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right), \quad x_1 - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a} = \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right),$$

$$x_2 + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a} = \varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \delta_2\right),$$

où les nombres x_0, x_1, x_2 sont entiers, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont égaux à ± 1, et enfin $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ satisfont aux inégalités

$$0 \leqq \delta_0 < 0{,}01, \quad 0 \leqq \delta_1 < 0{,}01, \quad 0 \leqq \delta_2 < 0{,}01.$$

Mais en combinant ces égalités il est facile d'obtenir l'égalité impossible

$$5x_0 - x_1 - x_2 = \frac{5\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} - 5\varepsilon_0\delta_0 + \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2,$$

dont le premier membre est un nombre entier et le second n'est pas un nombre entier.

Donc il reste deux suppositions sur les valeurs des nombres μ_i^2:

1) tous ces nombres sont égaux à $\frac{4}{5}$;

2) parmi les nombres μ_i^2 se trouve $\frac{1}{2}$.

Si tous les nombres μ_i^2 sont égaux au $\frac{4}{5}$, on aura

$$L_{-2} = L_0 = L_2$$

et ensuite

$$\xi_0 = \eta_{-1}, \qquad \xi_2 = \eta_1.$$

Or ces égalités s'expriment par les suivantes

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_{-2} = \alpha_4 = \alpha_{-4} = \alpha_6 = \alpha_{-6} = \cdots, \\ &\alpha_1 = \alpha_{-3} = \alpha_5 = \alpha_{-7} = \alpha_9 = \cdots, \\ &\alpha_{-1} = \alpha_3 = \alpha_{-5} = \alpha_7 = \alpha_{-9} = \cdots. \end{aligned}$$

Il en résulte que dans notre supposition $\left(\mu_i^2 = \frac{4}{5}\right)$ tous les nombres α_{2i} doivent avoir la même valeur 2 ou 1.

Et si l'on pose

$$\alpha_{2i} = 2,$$

la série

$$\cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_3, \cdots$$

ne peut contenir que 2 et 3, car on a

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} > 2{,}9.$$

Dans les mêmes suppositions cette série doit contenir 3, car la somme

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}},$$

égale à $2\sqrt{2}$, est aussi plus grande que $\frac{8}{5}\sqrt{3}$.

Conformément à cela nous aurons trois cas

$$(1)\quad \xi = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}, \qquad (2)\quad \xi = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}},$$

$$(3)\quad \xi = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$

Dans le premier de ces trois cas on trouve

$$\frac{2}{L_{2l}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = \frac{2\sqrt{15}}{3},$$

$$a = -\sqrt[3]{\frac{16}{25} \cdot \frac{9}{15}} = -\sqrt[3]{\frac{48}{125}}.$$

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2 = -\sqrt{\frac{-a}{15}}\,(3Y^2 - 6YZ - 2Z^2)$$

et la forme $\frac{f}{a}$ peut être présentée par la somme

$$\left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right)^2 + \frac{5}{12}\,(2y^2 - 6yz - 3z^2).$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer, que la valeur absolue de cette somme peut s'abaisser au dessous de l'unité.

Pour cela il suffit de poser successivement

$$(1) \quad y = 0, \quad z = 1, \qquad\qquad (2) \quad y = 3, \quad z = 1,$$

en déterminant x par les inégalités

$$\frac{1}{2} \leqq \pm \left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right) \leqq 1,$$

et

$$(3) \quad y = 1, \quad z = 0,$$

en déterminant x par les inégalités

$$-\frac{1}{2} \leqq x + \frac{b''}{a} \leqq \frac{1}{2}.$$

Parmi les nombres ainsi obtenus

$$\left(x_0 + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x_1 + \frac{b'}{a} + 3\,\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x_2 + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

l'un au moins a la valeur absolue plus petite que l'unité.

En effet dans la supposition contraire la différence $\frac{b'}{a} - \frac{1}{2}$ et le produit $3\,\frac{b''}{a}$ se réduisent aux nombres entiers et en même temps la quantité $\frac{b''}{a}$ diffère d'un nombre entier par une quantité δ satisfaisante aux inégalités

$$\frac{1}{2} \geqq \delta \geqq \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Mais c'est impossible, car la quantité 3δ satisfaisante aux inégalités

$$\frac{3}{2} \geqq \delta \geqq 3\sqrt{\frac{1}{6}}$$

ne peut être un nombre entier.

De même manière il est facile d'écarter le cas (2), où l'on a

$$\xi = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$

Dans ce cas la forme $\frac{f}{a}$ se présente par la somme

$$\left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right)^2 + \frac{5}{68}(12y^2 - 36yz - 17z^2),$$

laquelle se réduit à

$$\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

pour

$$y = 0, \quad z = 1,$$

à

$$\left(x + \frac{b'}{a} + 3\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

pour

$$y = 3, \quad z = 1,$$

et à

$$\left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{15}{17},$$

pour

$$y = 1, \quad z = 0.$$

Or si l'on pose que les valeurs absolues des toutes trois expressions

$$\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x + \frac{b'}{a} + 3\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{15}{17}$$

ne s'abaissent au dessous de l'unité, on obtient ce résultat impossible, qu'il existe un nombre entier dans l'intervalle

$$\text{de} \quad 3\sqrt{\frac{2}{17}} \quad \text{jusqu'à} \quad \frac{3}{2}.$$

Enfin nous pouvons aussi écarter et le cas (3), où l'on a

$$\xi = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}}},$$

en remarquant que ce cas se réduit au cas précédent par la substitution

$$y = 5y_1 + 2z_1, \qquad z = 2y_1 + z_1.$$

Par les considérations précédentes nous avons établi l'impossibilité de la supposition, que toutes les quantités μ_i^2 sont égales à $\frac{4}{5}$ et en même temps les nombres α_{2i} sont égaux à 2.

Maintenant nous allons traiter les cas, où toutes les quantités μ_i^2 sont égales à $\frac{4}{5}$ et les nombres α_{2i} sont égaux à l'unité.

On peut réduire ces cas aux six suppositions:

$$(1)\quad \xi = 1 + \frac{1}{\xi}, \qquad (2)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}, \qquad (3)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}},$$

$$(4)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}}}, \qquad (5)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}},$$

$$(6)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$

Or nous écartons les suppositions (2), (3), (5) et (6) par la seule remarque, que pour ces suppositions le rapport

$$\frac{L_{-1}}{L_0}$$

a les valeurs

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{11}$$

tandis que ce rapport dans les cas considerés ne peut s'abaisser au dessous de

$$\frac{4}{5} : \frac{4}{3} = \frac{3}{5}.$$

La supposition (1)

$$\xi = 1 + \frac{1}{\xi}$$

est aussi impossible.

En effet, cette supposition aboutit à l'égalité

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right)^2 + \frac{5}{4}(y^2 - yz - z^2)$$

et ensuite

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \qquad \text{pour} \quad y = 0, \qquad z = 1,$$

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{pour} \quad y = z = 1,$$

$$\frac{f}{a} = \left(x + 2\frac{b'}{a} - \frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{pour} \quad y = -1, \quad z = 2.$$

Mais il est facile de voir, que le minimum des valeurs absolues des trois expressions

$$\left(x+\frac{b'}{a}\right)^2-\frac{5}{4},\quad \left(x+\frac{b'}{a}+\frac{b''}{a}\right)^2-\frac{5}{4},\quad \left(x+2\,\frac{b'}{a}-\frac{b''}{a}\right)^2-\frac{5}{4}$$

est plus petit que l'unité.

Quant à la supposition (4)

$$\xi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi}}}},$$

elle donne

$$a = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

et

$$\frac{f}{a} = \left(x+\frac{b'}{a}\,z+\frac{b''}{a}\,y\right)^2+\frac{1}{4}(3y^2-6yz-5z^2).$$

En examinant la dernière expression $\frac{f}{a}$, nous trouvons, que sa valeur absolue ne s'abaisse au dessous de l'unité seulement dans les cas, où les deux différences

$$\frac{b'}{a}-\frac{1}{2},\qquad \frac{b''}{a}-\frac{1}{2}$$

sont des nombres entiers; car cette expression se réduit à

$$\left(x+\frac{b'}{a}\right)^2-\frac{5}{4}\quad \text{pour}\quad y=0,\quad z=1,$$

et à

$$\left(x+\frac{b''}{a}\right)^2+\frac{3}{4}\quad \text{pour}\quad y=1,\quad z=0.$$

Il en résulte une classe des formes f, dont le déterminant est égal à 1 et le minimum — à $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Cette classe se détermine par la forme

$$\begin{aligned} f &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{1}{4}(3y^2-6yz-5z^2)\right\} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2+y^2-z^2-yz-xz-xy\} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)-2z^2\} \end{aligned}$$

ou par la forme équivalente

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2-xy+y^2-2z^2\}.$$

Passons aux cas, où la quantité μ_l^2 obtient les valeurs différentes de $\frac{4}{5}$.

Pour ces cas nous avons établi, que parmi les valeurs μ_l^2 se trouve $\frac{1}{2}$. Et par conséquent dans tous ces cas on peut réduire la forme f de telle manière, que son premier coefficient a restera sans changement et que la forme

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

sera équivalente à la forme

$$a(x^2 - 2xy - y^2).$$

D'après cela on peut réduire la forme f à l'une des formes

$$-a(x^2 - 2xy - y^2) + 2byz + 2b'xz + a''z^2,$$

dont le minimum est égal à $-a$.

Nous avons obtenu ainsi l'un des cas considerés plus haut, où la forme f atteint son minimum avec le signe $+$.

Conformément à ce que nous avons déjà établi la forme

$$-ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

doit être indéfinie; et il est facile de voir que cette forme doit être équivalente à la forme

$$-a(x^2 - xz - z^2),$$

ou à la forme

$$-a(x^2 - 2z^2)$$

afin que $-a$ ne puisse pas s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Dans le cas, où la forme

$$-ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

est équivalente à la forme

$$-a(x^2 - xz - z^2),$$

la forme f peut être transformée de telle manière qu'on aura

$$\frac{f}{-a} = x^2 - 2y^2 - xz - z^2 + 2gyz,$$

le coefficient g étant lié avec a par la relation

$$-a^3\left(\frac{5}{2} - g^2\right) = 1.$$

Ce coefficient g peut être supposé positif, car on peut substituer $-y$ au lieu de y.

D'autre part, la forme

$$x^2 - 2y^2 - xz - z^2 + 2gyz$$

prend la valeur

$$-1+2g$$

pour

$$x=1, \quad y=z=-1$$

et la valeur

$$3-2g$$

pour

$$x=3, \quad y=-1, \quad z=1.$$

Le nombre g étant plus petit que $\sqrt{\frac{5}{2}}$, la différence

$$3-2g$$

est plus grande que -1 et par conséquent elle doit être égale à l'unité ou plus grande que l'unité; car dans le cas contraire la valeur absolue de la forme f s'abaisse au dessous de $-a$.

Il en résulte l'inégalité

$$g \leqq 1.$$

Par la raison analogue on doit poser

$$-1+2g=-1 \quad \text{ou} \quad 2g-1 \geqq 1.$$

En combinant ces inégalités, on trouve, qu'elles ne sont satisfaites que pour deux valeurs de g suivantes

$$g=0, \quad g=1.$$

En posant

$$g=1$$

on obtient la forme

$$f=+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,(x^2-2y^2-xz-z^2+2yz)$$

$$=-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\left(z^2-z(2y-x)+(2y-x)^2-2(y-x)^2\right),$$

laquelle est équivalente à la forme obtenue plus haut

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,(x^2-xy+y^2-2z^2)$$

et par conséquent ne donne aucun resultat nouveau.

En posant ensuite

$$g=0$$

nous recevons la forme

$$f=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,(x^2-xz-z^2-2y^2)$$

dont le minimum est égal à $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

Enfin il nous reste à supposer, qu'on a

$$f=-a(x^2-2xy-y^2)+2byz+2b'zx+a''z^2$$

et la forme

$$-ax^2+2b'zx+a''z^2$$

est équivalente à celle ci

$$-a(x^2-2y^2).$$

Or il est facile réduire cette supposition à celle plus simple, que l'on a

$$\frac{f}{-a}=x^2-2y^2-2z^2+2gyz,$$

le coefficient g étant lié à a par la formule

$$-(4-g^2)\,a^3=1.$$

D'autre part, en considérant la valeur de la forme

$$x^2-2y^2-2z^2+2gyz$$

pour

$$x=y=1 \quad \text{et} \quad z=\pm 1,$$

il est facile de s'assurer que la valeur absolue de g ne peut s'élever au dessus de 1.

D'après cela, ayant égard à la condition

$$-a^3 \geqq \frac{1}{3},$$

nous devons poser

$$g=\pm 1.$$

Il en résulte une classe des formes, dont le minimum est égal à $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Cette classe se détermine par la forme

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(x^2-2y^2-2z^2+2yz)$$

$$=-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{(y+z+x)^2+(y-2z-x)^2-3(x+z)^2\}$$

ou par la forme équivalente

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2+y^2-3z^2\}.$$

Donc il n'existe que les trois classes des formes ternaires indéfinies

$$f=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''yx,$$

dont la valeur absolue ne s'abaisse pas au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, le déterminant

$$D=aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2$$

étant égal à l'unité.

Ces trois classes se déterminent par les formes

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,(x^2-xy+y^2-2z^2),$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,(x^2-xy-y^2-2z^2),$$

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,(x^2+y^2-3z^2),$$

dont les minima sont respectivement égaux à

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}},\quad \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée.

St. Pétersbourg, Octobre 1901.