

THÉORIE DE HODGE I

par PIERRE DELIGNE

On se propose de donner un dictionnaire heuristique entre énoncés en cohomologie ℓ -adique et énoncés en théorie de Hodge. Ce dictionnaire a notamment pour sources [3] et la théorie conjecturale des motifs de Grothendieck [2]. Jusqu'ici, il a surtout servi à formuler, en théorie de Hodge, des conjectures, et il en a parfois suggéré une démonstration.

Définition 1.1. Une structure de Hodge mixte H consiste en

- (a) un $\mathbb{Z}$ -module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$ (le « réseau entier ») ;
- (b) une filtration croissante finie W sur $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ (la « filtration par le poids ») ;
- (c) une filtration décroissante finie F sur $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ (la « filtration de Hodge »).

Ces données sont soumises à l'axiome :

Il existe sur $\text{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ une (unique) bigraduation par des sous-espaces $H^{p,q}$ telle que

(i)

$$\text{Gr}_W^n(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q};$$

(ii) la filtration F induit sur $\text{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ la filtration

$$\text{Gr}_W(F)^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q'};$$

(iii) $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

Un morphisme $f : H \rightarrow H'$ est un homomorphisme $f_{\mathbb{Z}} : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow H'_{\mathbb{Z}}$ tel que $f_{\mathbb{Q}} : H_{\mathbb{Q}} \rightarrow H'_{\mathbb{Q}}$ et $f_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \rightarrow H'_{\mathbb{C}}$ soient respectivement compatibles aux filtrations W et F .

Les nombres de Hodge de H sont les entiers

$$h^{p,q} = \dim H^{p,q} = h^{q,p}. \quad (1.2)$$

On dit que H est pure de poids n si $h^{p,q} = 0$ pour $p+q \neq n$ (i.e. si $\text{Gr}_W^i(H) = 0$ pour $i \neq n$). On dit encore que H est une structure de Hodge de poids n .

La structure de Hodge de Tate $\mathbb{Z}(1)$ est la structure de Hodge de poids -2 , purement de type $(-1, -1)$, pour laquelle $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}} = 2\pi i\mathbb{Z} = \text{Ker}(\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$. On pose $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$.

On peut montrer que les structures de Hodge mixtes forment une catégorie abélienne. Si $f : H \rightarrow H'$ est un morphisme, alors $f_{\mathbb{Q}}$ et $f_{\mathbb{C}}$ sont strictement compatibles aux filtrations W et F ([1], 2.3.5).

2. Soient A un anneau normal intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$, K son corps des fractions et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K . Soit K_{nr} la plus grande sous-extension de $\overline{K}$ non ramifiée en chaque idéal premier de A . On sait que, ou on pose,

$$\pi_1(\text{Spec}(A), \overline{K}) = \text{Gal}(K_{nr}/K).$$

Pour chaque point fermé x de $\text{Spec}(A)$, défini par un idéal maximal m_x de A , le corps résiduel $k_x = A/m_x$ est fini ; le point x définit une classe de conjugaison de « substitutions de Frobenius » $\varphi_x \in \pi_1(\text{Spec}(A), \overline{K})$. On pose $q_x = \#k_x$ et $F_x = \varphi_x^{-1}$.

Soient K un corps de type fini sur le corps premier de caractéristique p , $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , ℓ un nombre premier $\neq p$ et H un $\mathbb{Z}_{\ell}$ - (ou un $\mathbb{Q}_{\ell}$ -) module de type fini muni d'une action continue ρ de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$. On supposera toujours par la suite qu'il existe A comme plus haut, avec ℓ inversible dans A , tel que ρ se factorise par

$$\pi_1(\text{Spec}(A), \overline{K}) = \text{Gal}(K_{nr}/K).$$

On dira que H est pur de poids n si pour tout point fermé x d'un ouvert non vide de $\text{Spec}(A)$, les valeurs propres α de F_x agissant sur H sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue

$$|\alpha| = q_x^{n/2}.$$

Principe 2.1. Si le module galoisien H « provient de la géométrie algébrique », il existe sur $H_{\mathbb{Q}_\ell} = H \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ une (unique) filtration croissante W (la « filtration par le poids »), invariante par Galois, telle que $\text{Gr}_n^W(H)$ soit pur de poids n .

On peut penser que $\text{Gr}_n^W(H)$ est de plus semi-simple.

Lorsqu'on dispose de la résolution des singularités, on peut souvent donner de W une définition conjecturale, dont la correction résulte des conjectures de Weil [5] (cf. 6).

Soit μ le sous-groupe de $\overline{K}^*$ formé des racines de l'unité. Le module de Tate $\mathbb{Z}_\ell(1)$, défini par

$$\mathbb{Z}_\ell(1) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, \mu),$$

est pur de poids -2 . On pose $\mathbb{Z}_\ell(n) = \mathbb{Z}_\ell(1)^{\otimes n}$.

Il est trivial que tout morphisme $f : H \rightarrow H'$ est strictement compatible à la filtration par le poids.

Le principe 2.1 concorde avec le fait que toute extension de $\mathbb{G}_m$ (« poids -2 ») par une variété abélienne (« poids $-1 > -2$ ») est triviale.

3. Traduction. Les modules galoisiens qui apparaissent en cohomologie ℓ -adique ont pour analogue, sur $\mathbb{C}$, les structures de Hodge mixte. On a de plus le dictionnaire

module pur de poids n	structure de Hodge de poids n
filtration par le poids	filtration par le poids
homomorphisme compatible à Galois	morphisme
module de Tate $\mathbb{Z}_\ell(1)$	structure de Hodge de Tate $\mathbb{Z}(1)$.

4. Soit X une variété algébrique complexe (= schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, qu'on supposera séparé). Il existe un sous-corps K de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que X puisse être défini sur K (i.e. provienne par extension des scalaires de K à $\mathbb{C}$ d'un K -schéma X'). Soit $\overline{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\mathbb{C}$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ agit alors sur les groupes de cohomologie ℓ -adique $H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$; on a

$$H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell = H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) = H^*(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell).$$

D'après 3, il y a lieu de s'attendre à ce que les groupes de cohomologie $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ portent des structures de Hodge mixtes naturelles. C'est ce qu'on peut prouver (voir [1], 3.2.5, pour le cas où X est lisse ; la démonstration est algébrique, à partir de la théorie de Hodge classique [6]). Pour X projectif et lisse, les conjectures de Weil impliquent que $H^n(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est pur de poids n , tandis que la théorie de Hodge classique munit $H^n(X, \mathbb{Z})$ d'une structure de Hodge de poids n . Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ et pour K assez grand, $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$ commute à Galois (par transport de structure) ; de même, $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$ est un morphisme de structures de Hodge mixte. Pour X lisse, la classe de cohomologie dans $H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))$ d'un cycle algébrique de codimension n , Z , défini sur K , est invariante par Galois, i.e. définit

$$c(Z) \in \text{Hom}_{\text{Gal}}(\mathbb{Z}_\ell(-n), H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell)).$$

De même, la classe de cohomologie $c(Z) \in H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est purement de type (n, n) , i.e. correspond à

$$c(Z) \in \text{Hom}_{\text{H.M.}}(\mathbb{Z}(-n), H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

5. Si $f : H \rightarrow H'$ est un morphisme, compatible à Galois, entre $\mathbb{Q}_\ell$ -vectoriels de poids différents, on a $f = 0$. De même, si $f : H \rightarrow H'$ est un morphisme de structures de Hodge mixte pures de poids différents, alors f est de torsion. Une remarque plus utile est la suivante.

Scholie 5.1. Soient H et H' des structures de Hodge de poids n et n' , avec $n > n'$. Soit $f : H_{\mathbb{Q}} \rightarrow H'_{\mathbb{Q}}$ un homomorphisme tel que $f : H_{\mathbb{C}} \rightarrow H'_{\mathbb{C}}$ respecte F . Alors $f = 0$.

6. Soient X une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$, $D = \sum_{i=1}^n D_i$ un diviseur à croisements normaux dans X , somme de diviseurs lisses, et j l'inclusion dans X de $U = X - D$. Pour $Q \subset [1, n]$, on pose

$$D_Q = \bigcap_{i \in Q} D_i.$$

En cohomologie ℓ -adique, on a canoniquement

$$R^q j_* \mathbb{Z}_\ell = \bigoplus_{\#Q=q} \mathbb{Z}_\ell(-q)_{D_Q}, \quad (6.1)$$

et la suite spectrale de Leray pour j s'écrit

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Z}_\ell(-q) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Q}_\ell). \quad (6.2)$$

D'après les conjectures de Weil [5], $H^p(D_Q, \mathbb{Q}_\ell)$ est pur de poids p , de sorte que E_2^{pq} est pur de poids $p + 2q$. En tant que quotient d'un sous-objet de E_2^{pq} , E_r^{pq} aussi est pur de poids $p + 2q$. D'après 5, $d_r = 0$ pour $r \geq 3$, car les poids $p + 2q$ et $p + 2q - r + 2$ de E_r^{pq} et $E_{r+r, q-r+1}^{pq}$ sont différents. On a donc $E_3^{pq} = E_\infty^{pq}$. À une renumérotation près, la filtration par le poids de $H^*(U, \mathbb{Q}_\ell)$ est l'aboutissement de (6.2)

$$\mathrm{Gr}_n^W(H^k(U, \mathbb{Q}_\ell)) = E_3^{2k-n, n-k}. \quad (6.3)$$

7. En cohomologie entière, pour la topologie usuelle, la suite spectrale de Leray pour j s'écrit

$$'E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Z}). \quad (7.1)$$

Puisque chaque D_Q est une variété projective non singulière, $'E_2^{pq}$ est muni d'une structure de Hodge de poids p . On pose $E_2^{pq} = 'E_2^{pq} \otimes \mathbb{Z}(-q)$ (structure de Hodge de poids $p + 2q$). Comme groupe abélien, $E_2^{pq} = 'E_2^{pq}$; il y a intérêt à considérer (7.1) comme une suite spectrale de terme initial E_2^{pq} . D'après 3, il faut s'attendre à ce que

$$d_2 : E_2^{pq} \rightarrow E_2^{p+2, q-1}$$

soit un morphisme de structure de Hodge. On le prouve en interprétant d_2 comme un morphisme de Gysin. Dès lors, E_3^{pq} est muni d'une structure de Hodge de poids $p + 2q$. D'après 3, on s'attend à ce que, modulo torsion, la suite spectrale (6.4)¹ dégénère au terme E_3 ($E_3 = E_\infty$), et à ce que la nullité des d_r ($r \geq 3$) soit une application de 5.1. Ce programme est mené à bien dans [1] 3.2. On y définit la filtration par le poids de $H^*(U, \mathbb{Q})$ comme aboutissement de (7.1), à la renumérotation (6.3) près.

En fait, pour munir des groupes de cohomologie H^* d'une structure de Hodge mixte, le point clef a toujours été jusqu'ici de trouver une suite spectrale E d'aboutissement H^* telle que l'analogue ℓ -adique de E_2^{pq} soit conjecturalement pur (de poids $p + 2q$); E_2^{pq} doit alors porter une structure de Hodge naturelle (de poids $p + 2q$), et la filtration W est l'aboutissement de E .

8. Soit $\mathrm{Spec}(V)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien (un trait hensélien) de corps de fractions K et de corps résiduel k de type fini sur le corps premier de caractéristique p . Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et H un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$ ($\ell \neq p$), sur lequel $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ agit continûment. D'après Grothendieck, on sait ([4], appendice) qu'un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie I agit de façon unipotente. Remplaçant V par une extension finie, on se ramène au cas où l'action de I tout entier est unipotente (cas semi-stable); elle se factorise alors par le plus grand pro- ℓ -groupe I_ℓ quotient de I , canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell(1)$.

Principe 8.1. Dans le cas semi-stable, si le module galoisien H « provient de la géométrie algébrique », il existe une (unique) filtration croissante W de H (la « filtration par le poids ») telle que I agisse trivialement sur $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ et que $\mathrm{Gr}_n^W(H)$, en tant que module galoisien sous $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \simeq \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)/I$, soit pur de poids n .

On comparera à 2.1 et à l'appendice de [4].

1. Le texte imprimé renvoie à (6.4); il semble viser (7.1).

Lorsqu'on dispose de la résolution des singularités, on peut parfois donner de W une définition conjecturale, dont la validité résulte des conjectures de Weil. À l'aide de la résolution et de Weil, il est souvent facile de montrer qu'en tout cas H se dévise en modules galoisiens (sous $\text{Gal}(\bar{k}/k)$) purs.

Supposons H semi-stable. Pour $T \in I_\ell$, on définit $\log T$ comme la somme finie

$$-\sum_{n>0} (\text{Id} - T)^n / n.$$

L'application $(T, x) \mapsto \log T(x)$ s'identifie à un homomorphisme

$$M : \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes H \longrightarrow H. \quad (8.2)$$

Puisque $\mathbb{Z}_\ell(1)$ est de poids -2 , on a nécessairement (cf. 5)

$$M(\mathbb{Z}_\ell(1) \otimes W_n(H)) \subset W_{n-2}(H) \quad (8.3)$$

et M induit

$$\text{Gr}(M) : \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes \text{Gr}_n^W(H) \longrightarrow \text{Gr}_{n-2}^W(H). \quad (8.4)$$

8.5. Si X est une variété projective non singulière sur un corps algébriquement clos k_0 , on définit

$$L : \mathbb{Z}_\ell(-1) \otimes H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

comme étant le cup-produit avec la classe de cohomologie d'une section hyperplane. On notera une analogie formelle entre L et M ; de même que M est défini par une action de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, on peut regarder L comme défini par une action de $\mathbb{Z}_\ell(-1)$; L augmente le degré de 2, et $\text{Gr } M$ (8.4) le diminue de 2.

9. Soient D le disque unité, $D^* = D - \{0\}$ et X

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) \times D \\ f \searrow & & \swarrow \text{pr}_2 \\ D & & \end{array}$$

une famille de variétés projectives paramétrée par D , avec f propre et $f|_{D^*}$ lisse. Gardons les notations de 8, et rappelons que dans l'analogie entre trait hensélien et petit voisinage de 0 dans la droite complexe on a le dictionnaire suivant (noter que le spectre de l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0 est un trait hensélien) :

D	Spec(V)	(9.1)
D^*	Spec(K)	
un revêtement universel $\tilde{D}^*$ de D^*	Spec($\bar{K}$)	
groupe fondamental $\pi_1(D^*)$	groupe d'inertie I	
(avec $\pi_1(D^*) = \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(1)_\mathbb{Z}$)	(avec $I_\ell = \mathbb{Z}_\ell(1)$)	
X	schéma projectif X sur Spec(V)	
$X^* = f^{-1}(D^*)$	X_K	
$\tilde{X} = X \times_D \tilde{D}^*$	$X_{\bar{K}}$	
système local $R^i f_* \mathbb{Z} _{D^*}$	module galoisien $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$	
$H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$	$H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$.	

On notera que $\tilde{X}$ est homotopiquement équivalent à chacune des fibres $X_t = f^{-1}(t)$ ($t \in D^*$) : $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ a encore pour analogue $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ et à l'action de I correspond la transformation de monodromie T .

Ici encore, on sait qu'un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(D^*)$ agit de façon unipotente sur $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = H^i(X_t, \mathbb{Q})$. Plaçons-nous dans le cas semi-stable où $\pi_1(D^*)$ tout entier agit de façon unipotente (ceci revient à remplacer D par un revêtement fini), et soit T l'action du générateur canonique de $\pi_1(D^*)$.

Par 3 et 8, on s'attend à ce que $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \simeq H^i(X_t, \mathbb{Q})$ soit muni d'une filtration croissante W , que $\text{Gr}_n^W(H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}))$ soit muni d'une structure de Hodge de poids n , que $\log T(W_n) \subset W_{n-2}$ et que $\log T$ induise un morphisme de structures de Hodge

$$M_n : \mathbb{Z}(-1) \otimes \text{Gr}_n^W(H^i) \longrightarrow \text{Gr}_{n-2}^W(H^i).$$

On aimerait de plus que (8.2), et non seulement (8.3) et (8.4), aient un analogue.

On parvient en fait à définir, pour chaque vecteur u de l'espace tangent à D en $\{0\}$, une structure de Hodge mixte $\mathcal{H}_u$ sur $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. La filtration W et les structures de Hodge sur les $\mathrm{Gr}_n^W(H^i)$ sont indépendantes de u , et la dépendance en u de $\mathcal{H}_u$ s'exprime simplement en terme de T . En analogie avec (8.2), on trouve que, quel que soit u , $\log T$ induit un homomorphisme de structures de Hodge mixtes

$$M : \mathbb{Z}(1) \otimes H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

Enfin, l'analogie 8.5 n'est pas trompeuse (mais ici, le fait que $f|D^*$ soit supposé propre et lisse est sans doute essentiel). On prouve que

$$(\log T)^k : \mathrm{Gr}_{n+k}^W(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q})) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{n-k}^W(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}))$$

est un isomorphisme pour tout k (cf. [6], IV 6, cor. au th. 5). Ceci caractérise la filtration W . Jusqu'ici, on ne dispose d'un analogue du théorème de positivité de Hodge (cf. [6], IV 7, cor. au th. 7) que dans des cas très particuliers. On espère que les structures mixtes $\mathcal{H}_u$ déterminent le comportement asymptotique, pour $t \rightarrow 0$, de la famille de structures pures $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ ($t \in D^*$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Deligne. — Théorie de Hodge, à paraître aux *Publ. Math. I. H. E. S.*, 40.
- [2] M. Demazure. — Motifs des variétés algébriques, *Sém. Bourbaki* (1969–1970), exp. 365.
- [3] J.-P. Serre. — Analogues kahlériens de certaines conjectures de Weil, *Ann. of Math.*, 71, 2 (1960), pp. 392–394.
- [4] — and J. Tate. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.*, 88, 3 (1968), pp. 492–517.
- [5] A. Weil. — Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), pp. 497–508.
- [6] —. — Introduction à l'étude des variétés kählériennes, *Act. Sci. et Ind.*, 1267, Hermann (1958).

I. H. E. S.
35, route de Chartres,
91-Bures-sur-Yvette
(France)