

L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE L'ESPACE DES COURBES DE GENRE DONNÉ

par P. DELIGNE et D. MUMFORD ¹

Fixons un corps algébriquement clos k . Soit M_g l'espace des modules des courbes de genre g sur k . Le résultat principal de cette note est que M_g est irréductible pour tout k . Bien entendu, le fait que M_g soit ou non irréductible ne dépend que de la caractéristique de k . Lorsque la caractéristique est 0, nous pouvons supposer que $k = \mathbb{C}$, et le résultat est alors classique. Une preuve simple figure dans Enriques–Chisini [E, vol. 3, chap. 3]; elle repose sur l'analyse de la totalité des revêtements de $\mathbf{P}^1$ de degré n , avec un nombre fixé d de points de branchement ordinaires. Cette méthode a été étendue à la caract. p par William Fulton [F], en utilisant des spécialisations de la caract. 0 à la caract. p pourvu que $p > 2g+1$. Malheureusement, les tentatives pour étendre cette méthode à tout p semblent se heurter à des questions difficiles de ramification sauvage. De nos jours, la théorie de Teichmüller donne une intuition entièrement analytique, mais très profonde, de cette irréductibilité lorsque $k = \mathbb{C}$. Notre approche est cependant la plus proche de la preuve incomplète de Severi ([Se], Anhang F; l'erreur est aux pp. 344–345 et semble tout à fait fondamentale) et suit une suggestion de Grothendieck consistant à utiliser le résultat en caract. 0 pour en déduire le résultat en caract. p . La base des idées de Severi comme de Grothendieck est de construire des familles de courbes X , certaines singulières, avec $p_a(X) = g$, au-dessus d'espaces de paramètres non singuliers, qui contiennent en un certain sens assez de courbes singulières pour relier entre elles deux composantes quelconques que M_g pourrait avoir.

L'élément essentiel qui fait maintenant fonctionner cette méthode est un récent « théorème de réduction stable » pour les variétés abéliennes. Ce résultat a d'abord été prouvé indépendamment, en caract. 0, par Grothendieck, au moyen des méthodes de la cohomologie étale (correspondance privée avec J. Tate), et par Mumford, en appliquant la moitié facile du théorème (2.5), pour passer des courbes aux variétés abéliennes (cf. [M₂]). Grothendieck a récemment renforcé sa méthode de sorte qu'elle s'applique en toute caractéristique (SGA 7, 1968). Mumford a également donné une preuve utilisant les fonctions thêta en caract. $\neq 2$. Le résultat est le suivant :

Théorème de réduction stable. — Soit R un anneau de valuation discrète de corps des fractions K . Soit A une variété abélienne sur K . Alors il existe une extension algébrique finie L de K telle que, si $R_L =$ clôture intégrale de R dans L , et si $\mathcal{A}_L$ est le modèle de Néron de $A \times_K L$ sur R_L , alors la fibre fermée $\mathcal{A}_{L,s}$ de $\mathcal{A}_L$ n'a pas de radical unipotent.

Nous donnerons deux preuves apparentées de notre résultat principal. L'une est assez élémentaire, et suit par des techniques tout à fait standard une fois que le théorème de réduction stable pour les variétés abéliennes est appliqué, au § 2, pour déduire un théorème de réduction stable analogue pour les courbes. L'autre preuve est plus puissante, et repose sur l'emploi d'une catégorie plus grande que la catégorie des schémas, ainsi que sur la preuve, pour les objets de cette catégorie, de nombreux théorèmes standard pour les schémas, en particulier le théorème de connexité d'Enriques–Zariski (EGA 3, (4.3)). Malheureusement, cette catégorie plus grande n'est pas tout à fait une catégorie — c'est un type simple de 2-catégorie; en fait, si X, Y sont des objets, alors $\text{Hom}(X, Y)$ est lui-même une catégorie, mais une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes. Les objets de cette 2-catégorie, nous les appelons champs algébriques². L'espace des modules M_g n'est que la « variété grossière sous-jacente » d'un objet plus fondamental, le champ de modules $\mathcal{M}_g$, étudié dans [M₃]. Des détails complets sur les propriétés et théorèmes de base pour les champs algébriques seront donnés ailleurs. Dans cet article, nous nous contenterons de donner les définitions et d'énoncer sans preuve les théorèmes généraux que nous appliquons. En utilisant la méthode des champs algébriques, nous pouvons démontrer non seulement l'irréductibilité de M_g lui-même, mais aussi celle de tous les espaces de modules de niveau supérieur de courbes (cf. § 5 ci-dessous).

§ 1. Courbes stables et leurs modules.

La définition clé de tout l'article est la suivante :

1. Le premier auteur souhaite remercier l'Institut des Hautes Études scientifiques, Bures-sur-Yvette, pour son soutien dans cette recherche, ainsi que N. Katz pour son aide inestimable dans la préparation de ce manuscrit; le second auteur souhaite remercier le Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, et l'Institut des Hautes Études scientifiques.

2. Une catégorie d'objets légèrement moins générale, appelée espaces algébriques, a été introduite et étudiée très profondément par M. Artin [A₁] et D. Knutson [K]. L'idée d'élargir la catégorie des variétés pour l'étude des espaces de modules est due à l'origine, croyons-nous, à A. Weil.

Définition (1.1). — Soit S un schéma quelconque. Soit $g \geq 2$. Une courbe stable de genre g sur S est un morphisme propre et plat $\pi : C \rightarrow S$ dont les fibres géométriques sont des schémas C_s réduits, connexes et de dimension 1 tels que :

- (i) C_s n'a que des points doubles ordinaires ;
- (ii) si E est une composante rationnelle non singulière de C_s , alors E rencontre les autres composantes de C_s en plus de 2 points ;
- (iii) $\dim H^1(\mathcal{O}_{C_s}) = g$.

Nous étudierons dans cette section trois aspects de la théorie des courbes stables : leurs systèmes linéaires pluricanoniques, leurs déformations et leurs automorphismes.

Supposons que $\pi : C \rightarrow S$ soit une courbe stable. Comme π est plat et que ses fibres géométriques sont des intersections complètes locales, le morphisme π est localement une intersection complète (c'est-à-dire que, localement, C est isomorphe, comme S -schéma, à $V(f_1, \dots, f_{n-1}) \subset \mathbf{A}^n \times U$, où $U \subset S$ est ouvert et où $f_1, \dots, f_{n-1} \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n \times U})$ forment une suite régulière). Par conséquent, d'après la théorie de la dualité pour les faisceaux cohérents [H], il existe un faisceau inversible canonique $\omega_{C/S}$ sur C — l'unique groupe de cohomologie non nul du complexe de faisceaux $f^!(\mathcal{O}_S)$. Nous aurons besoin des faits suivants au sujet de $\omega_{C/S}$:

- a) pour tout morphisme $f : T \rightarrow S$, $\omega_{C \times_S T/T}$ est canoniquement isomorphe à $f^*(\omega_{C/S})$;
- b) si $S = \text{Spec}(k)$, avec k algébriquement clos, et si $f : C' \rightarrow C$ est la normalisation de C , soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ les points de C' tels que les $z_i = f(x_i) = f(y_i)$, $1 \leq i \leq n$, soient les points doubles de C . Alors $\omega_{C/S}$ est le faisceau des 1-formes η sur C' régulières sauf pour des pôles simples aux x_i et aux y_i , et telles que $\text{Res}_{x_i}(\eta) + \text{Res}_{y_i}(\eta) = 0$;
- c) si $S = \text{Spec}(k)$ et si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur C , alors

$$\text{Hom}(H^1(C, \mathcal{F}), k) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \omega_{C/S}).$$

Théorème (1.2). — Si $g \geq 2$ et si C est une courbe stable de genre g sur un corps algébriquement clos k , alors $H^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes n}) = (0)$ si $n \geq 2$, et $\omega_{C/k}^{\otimes n}$ est très ample si $n \geq 3$.

Preuve. — Comme C est stable, de genre $g \geq 2$, toute composante irréductible E de C vérifie l'une des possibilités suivantes : 1) elle a elle-même un genre (arithmétique) ≥ 2 ; 2) elle a genre 1, mais rencontre d'autres composantes de C en au moins un point ; ou 3) elle est non singulière, rationnelle, et rencontre d'autres composantes de C en au moins trois points. Mais, d'après b) ci-dessus, $\omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}_E$ est isomorphe à $\omega_{E/k}(\sum Q_i)$, où les $\{Q_i\}$ sont les points où E rencontre le reste de C . Comme le degré de $\omega_{E/k}$ est $2g_E - 2$, il s'ensuit que dans chacun des cas 1, 2 ou 3, $\omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}_E$ a degré positif. Cela montre immédiatement que $\omega_{C/k}$ est ample sur chaque composante E de C , donc est ample.

Ensuite, d'après c) ci-dessus, $H^1(\omega_{C/k}^{\otimes n})$ est dual de $H^0(\omega_{C/k}^{\otimes(1-n)})$. Puisque $\omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}_E$ a degré positif, $\omega_{C/k}^{\otimes(1-n)} \otimes \mathcal{O}_E$ n'a de sections pour aucun E et pour aucun $n \geq 2$; donc $H^0(\omega_{C/k}^{\otimes(1-n)}) = (0)$ si $n \geq 2$, et ainsi $H^1(\omega_{C/k}^{\otimes n}) = (0)$ si $n \geq 2$.

Pour prouver qu'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur un schéma C , propre sur k , est très ample, il suffit de montrer

- a) pour tous points fermés $x \neq y$,

$$H^0(C, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(C, \mathcal{L} \otimes k(x)) \oplus H^0(C, \mathcal{L} \otimes k(y))$$

est surjectif,

- b) pour tout point fermé x ,

$$H^0(C, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(C, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^2)$$

est surjectif.

En utilisant la suite exacte de cohomologie, ces deux assertions suivent de $H^1(C, \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L}) = (0)$ pour tous points fermés $x, y \in C$. Dans notre cas, $\mathcal{L} = \omega_C^{\otimes n}$, $n \geq 3$; en utilisant la dualité, il nous faut donc montrer :

$$(*) \quad \text{Hom}(\mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{m}_y, \omega_C^{\otimes -n}) = (0), \quad \text{si } n \geq 2.$$

Note sur la source. La formule imprimée porte $\omega_X^{\otimes -n}$; tout l'argument environnant concerne C , de sorte que le terme requis $\omega_C^{\otimes -n}$ est conservé ici. Si x est un point non singulier, $\mathfrak{m}_x$ est un faisceau inversible. Si x est un point

double, soit $\pi : C' \rightarrow C$ le résultat de l'éclatement de x , et soient $x_1, x_2 \in C'$ les deux points de $\pi^{-1}(x)$. Il est alors facile de vérifier que, pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur C ,

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_x, \mathcal{L}) \cong H^0(C', \pi^* \mathcal{L}),$$

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_x^2, \mathcal{L}) \cong H^0(C', \pi^* \mathcal{L}(x_1 + x_2)).$$

Nous avons donc 3 cas de (*) à vérifier :

Cas 1. — x, y sont des points non singuliers de C ; alors

$$H^0(\omega_C^{-n}(x+y)) = (0), \quad \text{si } n \geq 2.$$

Cas 2. — x est un point double de C , $\pi : C' \rightarrow C$ l'éclatement de x , $\{x_1, x_2\} = \pi^{-1}(x)$, et y un point non singulier de C . Alors

$$H^0(\pi^*(\omega_C)^{-n}(y)) = (0), \quad H^0(\pi^*(\omega_C)^{-1}(x_1 + x_2)) = (0), \quad \text{si } n \geq 2.$$

Cas 3. — x, y sont des points doubles de C , $\pi : C' \rightarrow C$ l'éclatement de x et de y . Alors

$$H^0(\pi^*(\omega_C)^{-n}) = (0) \quad \text{si } n \geq 2.$$

Comme le degré de ω_C^{-n} ($n \geq 2$) sur toutes les composantes E de C est inférieur ou égal à -2 , tout cela est clair sauf dans les cas où $n = 2$, où le degré de ω_C sur une certaine E est 1, et où deux pôles sont autorisés sur E . Cela se produit si :

- (i) cas 1, $p_a(E) = 1$, E rencontre $C - E$ en un seul point, $x, y \in E$;
- (ii) cas 1, $p_a(E) = 0$, E rencontre $C - E$ en seulement trois points, $x, y \in E$;
- (iii) cas 2, E est une courbe rationnelle ayant un point double et rencontrant $C - E$ en un point, $x =$ point double de E .

Mais, dans tous ces cas, C a des composantes autres que E , et une section dans le H^0 considéré doit certainement s'annuler sur toutes ces autres composantes. Ainsi, aux points où E rencontre $C - E$, la section a des zéros supplémentaires. Puisque le faisceau considéré a degré 0 sur E , la section est également nulle sur E . C.Q.F.D.

Corollaire. — Soit $\pi : C \rightarrow S$ une courbe stable quelconque de genre $g \geq 2$. Alors $\omega_{C/S}^{\otimes n}$ est relativement très ample si $n \geq 3$, et $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n})$ est un faisceau localement libre sur S de rang $(2n-1)(g-1)$.

Preuve. — En effet, comme pour tout $s \in S$ on a $H^1(\omega_{C/S}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_{C_s}) = (0)$, il résulte de [EGA, chap. 3, § 7] que $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n})$ est localement libre et que $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n}) \otimes k(s) \cong H^0(\omega_{C/S}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_{C_s})$. Le corollaire en résulte. C.Q.F.D.

En prenant $n = 3$, il s'ensuit que toute courbe stable C/S peut être réalisée comme une famille de courbes dans $\mathbf{P}^{5g-6}$ de polynôme de Hilbert :

$$P_g(n) = (6n-1)(g-1).$$

En suivant des arguments standard ([M₁], p. 99), il est facile de prouver qu'il existe un sous-schéma

$$H_g \subset \mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}^{5g-6}}^{P_g}$$

des courbes stables tricanoniquement plongées « toutes » entières. (Hilb est le schéma de Hilbert sur $\mathbb{Z}$.) Plus précisément, il existe un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}(S, H_g) \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{ensemble des courbes stables } \pi : C \rightarrow S, \text{ avec des isomorphismes :} \\ \mathbf{P}(\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes 3})) \cong \mathbf{P}^{5g-6} \times S, \quad (\text{modulo isomorphisme}). \end{array} \right.$$

Nous noterons $Z_g \subset H_g \times \mathbf{P}^{5g-6}$ la courbe stable universelle tricanoniquement plongée. Le foncteur des courbes stables lui-même est la faisceautisation du quotient de foncteurs :

$$H_g / \mathrm{PGL}(5g-6).$$

Nous considérons maintenant la théorie des déformations des courbes stables. Soit k un corps de base quelconque. La théorie des déformations des X lisses sur k se trouve dans [SGA, 60–61] ; pour les S singuliers, la théorie a été mise au point dans [Sc]. Nous indiquerons ici les résultats de cette théorie pour un schéma X qui est

- (i) de dimension 1 ;
- (ii) génériquement lisse sur k ;
- (iii) localement une intersection complète.

Les avantages de ce cas sont doubles : d'abord, le « complexe cotangent » de Grothendieck, Lichtenbaum et Schlessinger se réduit, vu (ii) et (iii), au faisceau cohérent unique $\Omega_{X/k}$, les différentielles de Kähler. Ensuite, on a :

Lemme (1.3). — $\text{Ext}^2(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = (0)$.

Preuve. — On utilise la suite spectrale :

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X).$$

Alors (i) $H^2(X, \mathcal{E}xt^0) = (0)$ puisque $\dim X = 1$. (ii) Comme $\Omega_{X/k}$ est localement libre sauf en un nombre fini de points, $\mathcal{E}xt^1(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ a un support de dimension 0, donc $H^1(X, \mathcal{E}xt^1) = (0)$. (iii) Localement, si l'on plonge $X \subset \mathbf{A}^n$, alors $\Omega_{X/k}$ admet une résolution libre de longueur 2 :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbf{A}^n} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/k} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{I}$ = faisceau d'idéaux définissant X . Par conséquent $\mathcal{E}xt^2 = (0)$. C.Q.F.D.

Dans la théorie de Schlessinger, la signification du lemme (1.3) est que toutes les obstructions s'annulent ; autrement dit, les déformations de X sur des schémas de base $\text{Spec}(A/\mathcal{J})$ (A = anneau d'Artin local de corps résiduel k) peuvent toujours être plongées dans des déformations sur $\text{Spec}(A)$. En outre, la théorie affirme qu'il y a une correspondance canonique biunivoque entre $\text{Ext}^1(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ et les déformations du premier ordre de X , c'est-à-dire les morphismes propres et plats p , avec des isomorphismes α comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \supset & X_1 \times_{\text{Spec } k[\varepsilon]} \text{Spec } k & \xrightarrow{\sim \alpha} & X \\ \downarrow p & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2 & \supset & \text{Spec } k & = & \text{Spec } k. \end{array}$$

Puisque les obstructions s'annulent, il existe une déformation formelle verselle $\mathfrak{X}$ de X sur le schéma de base

$$\mathfrak{M} = \text{Spec } o_k[[t_1, \dots, t_N]],$$

où $o_k = k$ si la caractéristique est 0, ou bien o_k est l'anneau local régulier complet, d'idéal maximal $p \cdot o_k$ et de corps résiduel k , si $\text{char}(k) = p$, unique (par le théorème de structure de Cohen), et

$$N = \dim_k \text{Ext}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_C).$$

Cela signifie que $\mathfrak{X}$ est un schéma formel, propre et plat sur $\mathcal{M}$, de fibre X au-dessus de $\text{Spec}(k)$, et qu'il satisfait aux deux propriétés suivantes :

- a) *Toute déformation de X est induite par $\mathfrak{X}$* , c'est-à-dire que si A est une o_k -algèbre artinienne locale, de corps résiduel k , et si $p : Y \rightarrow \text{Spec}(A)$ est propre et plat, de fibre X au-dessus de $\text{Spec}(k)$, alors il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y \simeq \mathfrak{X} \times_{\mathcal{M}} \text{Spec}(A) & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X} & & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \text{Spec}(A) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(k) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M} \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & \text{Spec}(k) & & \end{array}$$

- b) Si $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, le morphisme f ci-dessus est déterminé uniquement par le diagramme.

Il s'ensuit que l'espace tangent à $\mathcal{M} \times_{o_k} k$ en son point fermé est canoniquement isomorphe à $\text{Ext}^1(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$.

Dans le cas où $\text{Ext}^0(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = (0)$, $\mathfrak{X}/\mathcal{M}$ est, en fait, *universel* : c'est-à-dire que, dans la propriété a), f est toujours unique, ce qui signifie que le foncteur représenté par $\mathcal{M}$ dans la catégorie des o_k -algèbres artiniennes locales est isomorphe au foncteur des déformations Y/A de X . C'est heureusement le cas pour les courbes stables :

Lemme (1.4). — Si X est une courbe stable, $\text{Ext}^0(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = (0)$.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que k est algébriquement clos. Un homomorphisme de Ω_X vers $\mathcal{O}_X$ est alors donné par un champ de vecteurs partout régulier D sur X . Un tel champ de vecteurs est donné, à son tour, par un champ de vecteurs régulier D' sur la normalisation X' de X , qui s'annule en tous les points de X' situés au-dessus des points doubles de X . En particulier, D' , et donc D , s'annule identiquement sur toutes les composantes E de X dont la normalisation E' est de genre ≥ 2 . Il reste les possibilités suivantes pour E :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \\
 E \text{ rationnelle non singulière} & E' \text{ rationnelle, } E \text{ un point double} & E' \text{ rationnelle, } E \geq 2 \text{ points doubles} \\
 \\
 \begin{array}{c} | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \end{array} & \\
 E \text{ elliptique non singulière} & E' \text{ elliptique, } E \geq 1 \text{ points doubles} &
 \end{array}$$

Dans tous les cas où E' est rationnelle, remarquons que D' doit avoir au moins 3 zéros ; et lorsque E' est elliptique, D' doit avoir au moins un zéro. Ainsi D' s'annule sur toutes les composantes E' . Cela prouve que $\text{Ext}^0(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = (0)$. Q.E.D.

La théorie de Schlessinger permet aussi de suivre ce qui arrive aux singularités de X dans cette déformation $\mathcal{M}$. Pour chaque point fermé $x \in X$, il étudie les déformations du seul anneau local complet $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, c'est-à-dire les A -algèbres plates $\mathcal{O}$ munies d'isomorphismes :

$$\mathcal{O} \otimes_A k \simeq \hat{\mathcal{O}}_{x,X}.$$

C'est un foncteur de A , exactement comme auparavant. Comme $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_x}^2(\hat{\Omega}_{x/k}, \hat{\mathcal{O}}_x) = (0)$, il n'y a pas d'obstruction au prolongement des déformations. Les déformations du premier ordre, avec $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, sont classifiées par $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_x}^1(\hat{\Omega}_{x/k}, \hat{\mathcal{O}}_x)$. Il existe en outre une déformation formelle verselle $\hat{\mathcal{O}}$, qui est un anneau local complet et une $o_k[[t_1, \dots, t_N]]$ -algèbre plate, $N = \dim_k \text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_x}^1(\hat{\Omega}_{x/k}, \hat{\mathcal{O}}_x)$, telle que

$$\hat{\mathcal{O}}/(p, t_1, \dots, t_N) = \hat{\mathcal{O}}_{x,X}.$$

Lorsque X est lisse sur k en x , on a $N = 0$, et la théorie est sans intérêt. Le premier exemple non trivial est celui d'un point double ordinaire k -rationnel, à tangentes k -rationnelles :

$$\hat{\mathcal{O}}_{x,X} \simeq k[[u, v]]/(u \cdot v).$$

Alors $N = 1$, et

$$\hat{\mathcal{O}} \simeq o_k[[u, v, t_1]]/(uv - t_1).$$

Autrement dit, si $\mathcal{O}$ est une déformation quelconque de $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ et si u, v sont relevés convenablement dans $\mathcal{O}$, alors $u \cdot v = w \in A$ et $\mathcal{O}$ est induit par $\hat{\mathcal{O}}$ au moyen de l'homomorphisme $o_k[[t_1]] \rightarrow A$ qui envoie t_1 sur w . C'est facile à démontrer.

Enfin, la théorie de Schlessinger relie les déformations globales aux déformations locales. Soit $\mathfrak{X}/\mathcal{M}_{gl}$, avec $\mathcal{M}_{gl} = \text{Spec}(A)$, la déformation globale verselle ; soient $x_1, \dots, x_k \in X$ les points où X n'est pas lisse sur k , et soit $\hat{\mathcal{O}}_i$, comme A_i -algèbre, la déformation verselle de l'anneau local $\hat{\mathcal{O}}_{x_i,X}$. Posons $\mathcal{M}_{lo} = \text{Spec}(A_1 \hat{\otimes}_{o_k} \dots \hat{\otimes}_{o_k} A_k)$. Nous pouvons alors considérer les anneaux locaux

$$\hat{\mathcal{O}}_{x_i, \mathfrak{X}}$$

de $\mathfrak{X}$ en x_i . Il existe des o_k -homomorphismes $\varphi_i : A_i \rightarrow A$ tels que $\hat{\mathcal{O}}_{x_i, \mathfrak{X}} \simeq \hat{\mathcal{O}}_i \otimes_{A_i} A$. En dualisant, on obtient un morphisme

$$\Phi = \prod_i \text{Spec}(\varphi_i) : \mathcal{M}_{gl} \rightarrow \mathcal{M}_{lo}$$

qui décrit exactement comment les diverses singularités de X se comportent dans la déformation verselle $\mathfrak{X}$. Le dernier fait dont nous avons besoin est le suivant :

Proposition (1.5). — $\Phi : \mathcal{M}_{gl} \rightarrow \mathcal{M}_{lo}$ est formellement lisse, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes

$$\mathcal{M}_{gl} \simeq \text{Spec } o_k[[t_1, \dots, t_{N+M}]], \quad \mathcal{M}_{lo} \simeq \text{Spec } o_k[[t_1, \dots, t_N]]$$

tels que $\Phi^*(t_i) = t_i$, $1 \leq i \leq N$.

Démonstration. — Vu la signification fonctorielle de $\mathcal{M}_{gl}$ et de $\mathcal{M}_{lo}$, il suffit de montrer que l'application naturelle

$$(*) \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \prod_{i=1}^k \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}^1(\widehat{\Omega}_{x_i}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i})$$

est surjective ; (*) est l'application induite $d\Phi$ sur les espaces tangents à $\mathcal{M}_{gl}$ et $\mathcal{M}_{lo}$. Comme Ω_X est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible en dehors des x_i , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}^1(\widehat{\Omega}_{x_i}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i}) &\simeq \prod_{i=1}^k \text{Ext}_{\mathcal{O}_{x_i}}^1(\Omega_{x_i}, \mathcal{O}_{x_i}) \\ &\simeq H^0(X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)). \end{aligned}$$

Par conséquent, (*) est surjective par la suite spectrale utilisée dans le Lemme (1.3) et par le fait que $H^2(X, \mathcal{E}xt^0(\Omega_X, \mathcal{O}_X)) = (0)$. Q.E.D.

En particulier, supposons que C soit une courbe stable sur un corps de base algébriquement clos k , et soient $x_1, \dots, x_k$ les points doubles de C . Posons $N = \dim \text{Ext}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$. Alors C possède une déformation formelle universelle $\mathcal{C}/\mathcal{M}$, où $\mathcal{M} = \text{Spec } o_k[[t_1, \dots, t_N]]$. Notons que, dans ce cas, comme le faisceau inversible $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ est relativement ample, $\mathcal{C}$ n'est pas seulement un schéma formel sur $\mathcal{M}$, mais aussi le complété formel d'un unique schéma propre et plat sur $\mathcal{M}$, que nous noterons encore $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est clairement une courbe stable sur $\mathcal{M}$. Chaque point double x_i possède maintenant un seul module (cf. notre exemple ci-dessus), de sorte que l'espace de déformation verselle des anneaux $\mathcal{O}_{x_i, C}$ est $o_k[[t'_1, \dots, t'_k]]$. Par la Proposition (1.5), nous pouvons identifier t_i à t'_i , et nous concluons que, pour des u_i, v_i convenables,

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x_i, C} \simeq o_k[[u_i, v_i, t_1, \dots, t_N]]/(u_i v_i - t_i).$$

En particulier, $t_i = 0$ est le lieu dans $\mathcal{M}$ où « x_i reste un point double ».

La relation entre l'espace de modules formel $\mathcal{M}$ de C et la structure locale de H_g en un point x avec $\kappa(x) = k$, correspondant à un certain modèle tricanonique de C , est exactement la même que dans le cas des courbes non singulières ([M₁], chap. 5, § 2). Soit $\widehat{\mathcal{O}}_x$ le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{x, H_g}$, et posons $T = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_x)$. Notons encore par x le point fermé de T . La famille universelle de courbes stables $Z_g \subset H_g \times \mathbf{P}^{5g-6}$ induit une famille $Z' \subset T \times \mathbf{P}^{5g-6}$, dont la fibre Z'_x au-dessus de x est C . Il existe alors un unique morphisme $f : T \rightarrow \mathcal{M}$ tel que $Z' \simeq C \times_{\mathcal{M}} T$, cet isomorphisme se restreignant à l'identité sur les fibres au-dessus de x , qui sont toutes deux C . J'affirme que, via f , T est formellement lisse sur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire que $\widehat{\mathcal{O}}_x \simeq o_k[[t_1, \dots, t_N, t_{N+1}, \dots, t_m]]$. En effet, en choisissant un isomorphisme $\mathbf{P}(\pi_*(\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}^{\otimes 3})) \simeq \mathbf{P}^{5g-6} \times \mathcal{M}$, on obtient un plongement tricanonique $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^{5g-6} \times \mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$, donc un morphisme $s : \mathcal{M} \rightarrow H_g$ tel que $\mathcal{C}$, muni de ce plongement, soit l'image réciproque de Z_g . Alors s se factorise par T et $s : \mathcal{M} \rightarrow T$ est une section de f . D'autre part, considérons l'action de $\text{PGL}(5g-6)$ sur H_g . Soit S_x le stabilisateur du point k -valué x . Alors S_x est fini et réduit. En effet, sinon, S_x aurait un espace tangent non trivial à l'origine, c'est-à-dire qu'il y aurait un point à valeurs dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ de $\text{PGL}(5g-6)$, centré en l'identité, qui envoie dans elle-même la courbe stable plongée $C \subset \mathbf{P}^{5g-6}$ correspondant à x . Mais cette action est donnée par une dérivation partout régulière sur C , et nous avons

vu que toutes celles-ci s'annulent. Cela signifie que cet automorphisme à valeurs dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ est l'identité en tous les points de C et, puisque C est connexe et engendre $\mathbf{P}^{5g-6}$, l'automorphisme est l'identité partout. Ainsi S_x est fini et réduit. Il s'ensuit que l'action de $\text{PGL}(5g-6)$ sur T est formellement libre, et donc que T est formellement un fibré principal sur $\mathcal{M}$ de groupe $\text{PGL}(5g-6)$. Par conséquent T est formellement lisse sur $\mathcal{M}$, comme voulu.

En réunissant cela avec ce que nous savons de $\mathcal{M}$, nous obtenons :

Soit k un corps algébriquement clos quelconque,
soient $H'_g = H_g \times \text{Spec}(o_k)$ et $Z'_g = Z_g \times \text{Spec}(o_k)$,

soit $x \in H'_g$ un point fermé,
soit $C \subset Z'_g$ la courbe stable au-dessus de x ,
soient $x_1, \dots, x_k \in C$ ses points doubles.

Alors

Théorème (1.6). — Il existe des isomorphismes

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x, H'_g} \simeq o_k[[t_1, \dots, t_N]],$$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x_i, Z'_g} \simeq o_k[[u_i, v_i, t_1, \dots, t_N]]/(u_i v_i - t_i).$$

Corollaire (1.7). — H_g est lisse sur $\mathbb{Z}$. En particulier, pour tout corps algébriquement clos k , $H_g \times \text{Spec}(k)$ est une réunion disjointe d'un nombre fini de variétés algébriques non singulières sur k .

Posons

$$H_g^0 = \{x \in H_g \mid \text{la courbe stable correspondante } (Z_g)_x \text{ est non singulière}\},$$

$$S = \{x \in Z_g \mid \text{la projection } \pi : Z_g \rightarrow H_g \text{ n'est pas lisse en } x\}.$$

Définition (1.8). — Soit $p : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de type fini, avec Y schéma noethérien, et soit $D \subset X$ un diviseur de Cartier relatif. On dit que D est à croisements normaux relativement à Y si, pour tout $x \in D$, l'équation locale $d = 0$ de D se décompose dans le complété strict³ $\widetilde{\mathcal{O}}_{x, X}$ de $\mathcal{O}_{x, X}$ sous la forme $d = d_1 \cdots d_k$, où $d_1, \dots, d_k$ sont linéairement indépendants dans

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{x, X} / (\widetilde{\mathfrak{m}}_{x, X}^2 + \mathfrak{m}_{y, Y} \widetilde{\mathcal{O}}_{x, X}),$$

avec $y = p(x)$.

Corollaire (1.9). — $H_g^0 = H_g - S^$, où S^* est un diviseur à croisements normaux relativement à $\mathbb{Z}$. Z_g et S sont lisses sur $\mathbb{Z}$, et la projection $p : S \rightarrow S^*$ est finie et est un isomorphisme en tous les points où S^* est lisse sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que S est la normalisation de S^* .*

Démonstration. — Avec les notations du Théorème (1.6), S^* est défini dans $\widehat{\mathcal{O}}_{x, H'_g}$ par l'équation locale $t_1 \cdots t_k = 0$. Et

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x_i, Z'_g} \simeq o_k[[u_i, v_i, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N]],$$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{x_i, S} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{x_i, Z'_g} / (u_i, v_i) \simeq o_k[[t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N]].$$

Q.E.D.

Passons maintenant aux isomorphismes et aux automorphismes des courbes stables. Supposons que $p : X \rightarrow S$ et $q : Y \rightarrow S$ soient deux courbes stables :

Définition (1.10). — $\underline{\text{Isom}}_S(X, Y)$ est le foncteur sur (Sch/S) qui associe à chaque S -schéma S' l'ensemble des S' -isomorphismes entre $X \times_S S'$ et $Y \times_S S'$. Si $X = Y$, on note $\underline{\text{Aut}}_S(X)$ le foncteur $\underline{\text{Isom}}_S(X, X)$.

Comme X et Y portent respectivement les polarisations canoniques $\omega_{X/S}$ et $\omega_{Y/S}$, tout isomorphisme $f : X \rightarrow Y$ doit satisfaire $f^*(\omega_{Y/S}) \simeq \omega_{X/S}$. Par conséquent, par les résultats de Grothendieck sur la représentabilité du schéma de Hilbert et des foncteurs apparentés [Gr₁], on conclut que $\underline{\text{Isom}}_S(X, Y)$ est représenté par un schéma $\text{Isom}_S(X, Y)$, quasi-projectif sur S . À propos de ce schéma, nous avons :

Théorème (1.11). — $\text{Isom}_S(X, Y)$ est fini et non ramifié sur S .

Démonstration. — Pour vérifier que $\text{Isom}_S(X, Y)$ est non ramifié, nous pouvons prendre pour S le spectre d'un corps algébriquement clos k ; alors $\text{Isom}_S(X, Y)$ est soit vide, soit isomorphe à $\text{Aut}_k(X)$. Un point de $\text{Aut}_k(X)$ à valeurs dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ et d'image l'identité s'identifie à un champ de vecteurs sur X . Par le Lemme (1.4), les courbes stables n'ont pas de champs de vecteurs non nuls. Cela prouve que $\text{Isom}_S(X, Y)$ est non ramifié sur S ; comme il est aussi de type fini sur S , il est quasi-fini sur S . Il reste à vérifier que $\text{Isom}_S(X, Y)$ est propre sur S .

Localement sur S , X et Y sont les images réciproques de la courbe stable universelle tricanoniquement plongée par certains morphismes de S vers H_g ; il suffit donc de prouver la propriété de $\text{Isom}_S(X, Y)$ dans le cas « universel », où $S = H_g \times H_g$, les courbes X et Y étant les deux images réciproques de la courbe universelle sur H_g . Dans

3. L'anneau local complet, formellement étale sur $\mathcal{O}_{x, X}$, de corps résiduel la clôture séparable de $\mathcal{O}_{x, X}/\mathfrak{m}_{x, X}$.

ce cas, l'ouvert de $\text{Isom}_S(X, Y)$ correspondant aux courbes lisses est dense, de sorte que le Théorème découle du critère valuatif de propreté, qui est vérifié en vertu de :

Lemme (1.12). — Soient X et Y deux courbes stables sur un anneau de valuation discrète R , à corps résiduel algébriquement clos. Désignons par η et s les points générique et fermé de $\text{Spec}(R)$, et supposons que les fibres génériques X_η et Y_η de X et Y soient lisses. Alors tout isomorphisme φ_η entre X_η et Y_η se prolonge en un isomorphisme φ entre X et Y .

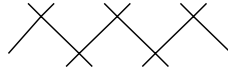
(A posteriori, il résulte du Théorème (1.11) que le lemme vaut pour tout anneau de valuation R , sans supposer X_η ou Y_η lisse.)

Démonstration. — Une autre façon d'énoncer le lemme est la suivante : si l'on part d'une courbe lisse X_η de genre $g \geq 2$ sur le corps des fractions K de R , il existe, à isomorphisme canonique près, au plus une courbe stable X sur R ayant X_η pour fibre générique. Nous allons le déduire de l'assertion d'unicité analogue pour les modèles minimaux ([L] et [S]) : étant donnée une courbe lisse X_η de genre $g \geq 1$ sur K , il existe, à isomorphisme canonique près, au plus un schéma régulier de dimension 2, $\tilde{X}$, propre et plat sur R , ayant X_η pour fibre générique, et sans courbes exceptionnelles de première espèce dans $\tilde{X}_s$.

Soit z un générateur de l'idéal maximal de R et considérons la courbe plane affine C_n sur R donnée par :

$$xy = z^n.$$

Soit $\tilde{C}_n$ le schéma obtenu de la façon suivante : 1) on éclate l'idéal maximal en l'unique singularité de C_n ; 2) on éclate l'idéal maximal en l'unique singularité du schéma ainsi obtenu..., et ainsi de suite $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ fois. Il est facile de vérifier que $\tilde{C}_n$ est un schéma régulier dont la fibre spéciale est la même que celle de C_n , sauf que le point singulier y est remplacé par une suite de $n - 1$ droites projectives, comme suit :



Supposons maintenant que x soit un point singulier de la courbe stable X sur R . En x , X est formellement isomorphe, comme schéma sur R , à l'un des schémas C_n ; on peut donc éclater X de la même façon que nous avons éclaté C_n . Si l'on procède ainsi pour tous les points singuliers de X , on obtient un schéma régulier $\tilde{X}$, de fibre générique X_η . De plus, toute composante rationnelle non singulière de $\tilde{X}_s$ est reliée aux autres composantes irréductibles en au moins deux points ; elle n'est donc pas exceptionnelle de première espèce. Par conséquent $\tilde{X}$ est le modèle minimal de X_η . Remarquons enfin que C_n est un schéma normal, donc que X l'est aussi ; ainsi X est l'unique schéma normal obtenu à partir de $\tilde{X}$ en contractant toutes les composantes rationnelles non singulières de $\tilde{X}_s$ reliées aux autres composantes irréductibles en exactement deux points. Cela prouve que X est essentiellement unique. Q.E.D.

Un autre fait important sur les automorphismes des courbes stables est le suivant :

Théorème (1.13). — Soient k un corps algébriquement clos et X une courbe stable sur k . Soit $\text{Pic}^0(X)$ le groupe des faisceaux inversibles sur X de degré 0 sur chaque composante. Alors l'application (de groupes ordinaires) :

$$\text{Aut}_k(X) \longrightarrow \text{Aut}_k(\text{Pic}^0(X))$$

est injective.

Démonstration. — Soit φ un automorphisme de X induisant l'identité sur $\text{Pic}^0 X$.

Lemme (1.14). — Si X est lisse, alors φ est l'identité.

Démonstration. — Sinon, par la formule du point fixe de Lefschetz-Weil, le nombre n de points fixes de φ , comptés avec leurs multiplicités, est

$$n = 1 - \text{Tr}(\varphi, T_1(\text{Pic}^0(X))) + 1 = 2 - 2g < 0,$$

ce qui est absurde. Q.E.D.

Lemme (1.15). — Si X est irréductible, alors φ est l'identité.

Démonstration. — Soit φ' l'action de φ sur la normalisation X' de X . Chaque point singulier de X , muni d'un ordre sur ses deux images inverses dans X' , définit un morphisme distinct de $\mathbb{G}_m$ vers $\text{Pic}^0(X)$; ainsi l'image inverse S du lieu singulier de X est fixée point par point par φ' . On a alors l'une des possibilités suivantes :

- a) $\text{genre}(X') \geq 2$: on conclut par le Lemme (1.14) ;
b) $\text{genre}(X') = 1$, $|S| \geq 2$: alors φ' est une translation de X' qui fixe un point, et donc φ' est l'identité ;
c) X' est la droite projective, $|S| \geq 4$, et φ' est une projectivité qui fixe plus de trois points ; c'est donc l'identité.
Q.E.D.

Soit Γ le graphe (non orienté) suivant :

- (i) l'ensemble des sommets de Γ est l'ensemble Γ^0 des composantes irréductibles de X ;
(ii) l'ensemble des arêtes de Γ est l'ensemble Γ^1 des points singuliers de X qui appartiennent à deux composantes irréductibles distinctes ;
(iii) une arête $x \in \Gamma^1$ a pour extrémités les composantes irréductibles auxquelles x appartient.

Lemme (1.16). — Si φ induit l'identité sur Γ , alors φ est l'identité.

Démonstration. — Si X_1 est une composante irréductible de X , alors $\varphi(X_1) = X_1$ et φ fixe les points d'intersection de X_1 avec les autres composantes. De plus, $\text{Pic}^0(X)$ se surjecte sur $\text{Pic}^0(X_1)$, de sorte que φ agit trivialement sur $\text{Pic}^0(X_1)$. On est dans l'un des cas suivants :

- a) $\text{genre}(X_1) \geq 2$ et $\varphi|_{X_1}$ est l'identité par le Lemme (1.15) ;
b) $\text{genre}(X_1) = 1$, φ agit par translation et fixe un point, donc est l'identité sur X_1 ;
c) X_1 est la droite projective et φ fixe au moins trois points, donc est l'identité sur X_1 .
Q.E.D.

Lemme (1.17). — (i) Toute arête de Γ a des extrémités distinctes.

(ii) Tout sommet qui est l'extrémité de 0, 1 ou 2 arêtes est fixé par φ .

(iii) φ agit trivialement sur $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

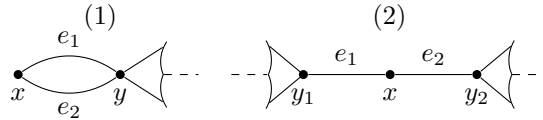
Démonstration. — Il est facile de vérifier que le sous-groupe de $\text{Pic}^0(X)$ correspondant aux faisceaux inversibles dont la restriction à chaque composante irréductible de X est triviale est canoniquement isomorphe à

$$H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{G}_m.$$

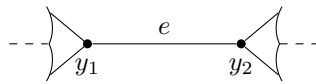
Cela implique (iii), et (i) est trivial.

Le morphisme de $\text{Pic}^0(X)$ vers le produit $\prod_i \text{Pic}^0(X_i)$, étendu aux composantes irréductibles de X , est surjectif ; ainsi, si $\text{Pic}^0(X_i) \neq \{e\}$, alors $\varphi(X_i) = X_i$. C'est le cas sauf lorsque X_i est une droite projective reliée aux autres composantes en au moins trois points.
Q.E.D.

Nous montrons maintenant que si un automorphisme φ d'un graphe fini Γ possède les propriétés énoncées dans le Lemme (1.17), alors c'est l'identité. On raisonne par récurrence sur la somme du nombre de sommets et du nombre d'arêtes de Γ . Si Γ possède un point isolé x , alors $\varphi(x) = x$; posons donc $\Gamma^* = \Gamma - \{x\}$. Alors φ est l'identité sur Γ^* par récurrence, donc φ est aussi l'identité sur Γ . Si Γ possède une extrémité x , alors $\varphi(x) = x$, et l'on prend de nouveau pour Γ^* le graphe Γ privé de x et de l'arête aboutissant à x . Alors Γ^* possède toutes les propriétés de Γ ; donc φ est l'identité sur Γ^* , et par suite sur Γ . Si Γ possède un sommet x auquel aboutissent seulement deux arêtes, on est dans l'un des deux cas suivants :



Dans le premier cas, $\varphi(y) = y$, et l'on prend pour Γ^* le graphe Γ privé de x , e_1 et e_2 . Alors φ est l'identité sur Γ^* et $\varphi(e_i) = e_i$ aussi, car si φ échangeait les e_i , cela contredirait (iii). Dans le second cas, on prend pour Γ^* le graphe Γ privé de x , avec e_1 et e_2 identifiées :



Alors φ est l'identité sur Γ^* , donc aussi sur Γ . Supposons ensuite que Γ ait une arête e d'extrémités x et y telles que $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$, $\varphi(e) = e$. Soit Γ^* le graphe Γ privé de e . Alors φ est l'identité sur Γ^* , donc sur Γ . Si aucune de ces réductions n'est possible, on est dans une situation où a) chaque sommet est l'aboutissement d'au

moins trois arêtes, et b) aucune arête n'est laissée fixe. Il est facile de voir que le premier nombre de Betti b_1 de chacune des composantes connexes de Γ est au moins 2. Posons

$$\begin{aligned} n_0 &= \text{nombre de sommets fixes,} \\ n_1 &= \text{nombre d'arêtes renversées par } \varphi. \end{aligned}$$

Alors, sauf si $\Gamma = \emptyset$, la formule du point fixe de Lefschetz donne

$$n_0 + n_1 = b_0 - b_1 < 0,$$

ce qui est impossible.

Q.E.D.

§2. Dégénérescences de courbes et de leurs jacobienes.

Nous considérons la situation suivante :

- K = un corps discrètement valué;
- R = l'anneau des entiers de K , $k = R/\mathfrak{M}$ = le corps résiduel (supposé algébriquement clos);
- $S = \text{Spec}(R)$, η et s ses points générique et fermé respectivement;
- C = une courbe lisse, géométriquement irréductible et propre sur K , de genre $g \geq 2$;
- J = la variété jacobienne de C ;
- $\mathcal{J}$ = le modèle de Néron de J sur R (cf. [N]);
- $\mathcal{J}^0 \subset \mathcal{J}$ le sous-schéma en groupes ouvert tel que $\mathcal{J}_s^0$ = la composante neutre de $\mathcal{J}_s$;
- $\mathcal{C}$ = le modèle minimal de C sur R .

Il faut dire un mot de l'existence et de l'unicité de $\mathcal{C}$. Rappelons que $\mathcal{C}$ doit être un schéma régulier, plat et propre sur R , de fibre générique $\mathcal{C}_\eta = C$, tel que, pour tout autre schéma régulier $\mathcal{C}'$, plat sur R , de fibre générique $\mathcal{C}'_\eta = C$, l'application birationnelle $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ soit un morphisme. Šafarevič dans [Š] et Lichtenbaum dans [L] ont démontré qu'un tel $\mathcal{C}$ (nécessairement unique) existe dès qu'il existe un schéma régulier $\mathcal{C}'$, propre et plat sur R , de fibre générique C . De plus, $\mathcal{C}$ est alors projectif sur R . Pour construire un tel $\mathcal{C}$, procédons ainsi : soit d'abord $\mathcal{C}''$ un schéma quelconque, projectif et plat sur R , de fibre générique C . Soit $\hat{R}$ le complété de R , et posons

$$\hat{\mathcal{C}}'' = \mathcal{C}'' \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } \hat{R}.$$

Alors $\hat{\mathcal{C}}''$ est une surface excellente ; donc, par [Ab] et par des résultats non publiés de Hironaka, il existe un faisceau d'idéaux $\hat{\mathcal{J}}$, à support dans le lieu singulier de $\hat{\mathcal{C}}''$, tel que l'éclatement de $\hat{\mathcal{J}}$ conduise à une surface régulière $\hat{\mathcal{C}}'$. Mais alors

$$\hat{\mathcal{J}} \supset \mathfrak{M}^n \cdot \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{C}}''}$$

pour un certain n , si bien que $\hat{\mathcal{J}}$ est induit par un unique faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}''}$. Soit $\mathcal{C}'$ le schéma obtenu en éclatant $\mathcal{J}$. Alors

$$\hat{\mathcal{C}}' \simeq \mathcal{C}' \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } \hat{R},$$

donc $\mathcal{C}'$ est régulier. Il est aussi projectif sur R ; il existe donc un $\mathcal{C}$ projectif.

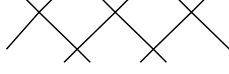
Définition (2.1). — J a réduction stable si $\mathcal{J}_s$ n'a pas de radical unipotent.

Définition (2.2). — C a réduction stable au sens 1 si $\mathcal{C}_s$ est réduite et n'a que des points doubles ordinaires. C a réduction stable au sens 2 s'il existe une courbe stable $\mathcal{C}'$ sur R de fibre générique $\mathcal{C}'_\eta = C$.

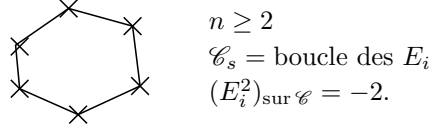
Notons que si une telle courbe stable $\mathcal{C}'$ existe, elle est unique par le Théorème (1.11).

Proposition (2.3). — Les deux sens de la réduction stable pour C sont équivalents.

Démonstration. — Supposons qu'une courbe stable $\mathcal{C}'$ existe. En éclatant les singularités de $\mathcal{C}'$ comme dans le Lemme (1.12), on obtient le modèle minimal $\mathcal{C}$ de C , et l'on voit que $\mathcal{C}_s$ est réduite et n'a que des points doubles ordinaires. Réciproquement, supposons que le modèle minimal $\mathcal{C}$ ait cette propriété. Soient $E_1, \dots, E_n$ les composantes rationnelles non singulières de $\mathcal{C}_s$ qui rencontrent les autres composantes en seulement deux points. Alors les E_i se répartissent en plusieurs chaînes du type :

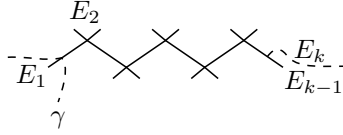


à moins que toute la fibre ne soit formée de E_i et n'ait le type :

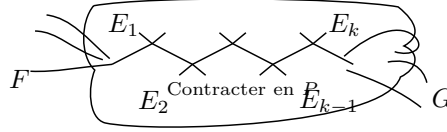


Mais dans ce cas $\text{genre}(C) = \text{genre}(\mathcal{C}_s) = 1$, ce qui contredit notre hypothèse. D'après le Théorème (27.1) de Lipman [Li] (qui généralise un résultat d'Artin [A₂], valable pour les surfaces de type fini sur un corps), tout ensemble de k courbes rationnelles non singulières, reliées en une chaîne comme ci-dessus sur une surface régulière X , de self-intersection -2 sur X , peut être contracté en un point double rationnel P de type A_k sur une surface normale X_0 . En inversant le procédé et en éclatant un point double rationnel de type A_k , on voit facilement que des branches non singulières γ sur X , coupant transversalement seulement la première ou la dernière courbe rationnelle de la chaîne :

Note sur la source. Le texte imprimé porte « self-intersection 2 on X » ; la boucle affichée juste au-dessus et l'argument de contraction imposent la self-intersection -2 , conservée ici.



restent des branches non singulières après passage à X_0 ; et si γ_1, γ_2 coupent E_1 ou E_k en des points distincts, elles se coupent transversalement sur X_0 . Supposons donc que l'on contracte toutes les chaînes de E_i sur $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ la surface normale ainsi obtenue. Alors, si l'une de ces chaînes s'insère dans $\mathcal{C}_s$ comme suit :



alors, sur $\mathcal{C}'_s$, les images de F et G n'ont encore que des points doubles ordinaires ; chacune possède une branche non singulière passant par le point singulier P , et ces branches se coupent transversalement. Par conséquent $\mathcal{C}'$ est une courbe stable sur R . Q.E.D.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat clef dont dépend notre preuve d'irréductibilité :

Théorème (2.4). — J a réduction stable si et seulement si C a réduction stable.

Démonstration. — Le lien entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{J}$ repose sur le résultat suivant de Raynaud [R] :

Théorème (2.5). — Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{J}$ sont comme ci-dessus, et si le plus grand commun diviseur d des multiplicités des composantes de $\mathcal{C}_s$ est 1, alors $\mathcal{J}^0$ représente le foncteur $\text{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$.

(Ce résultat n'est pas énoncé tel quel dans [R]. Il découle ainsi, dans la terminologie de cet article :

- a) la condition (N) est vérifiée et $p_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = \mathcal{O}_S$, donc
- b) $\mathcal{C}$ est cohomologiquement plate sur S en dimension 0, par le Théorème 4 ;
- c) par conséquent Pic^0 est représentable et séparé sur S , par le Théorème 3 ;
- d) comme $E = \{0\}$ et $Q = P/E$, on trouve $P^0 = Q^0$, et comme $\mathcal{C}$ est de dimension 1 sur S , P^0 et Q^0 sont lisses sur S ; donc $R^0 = Q^0$ et $\tilde{R} = R$.
- e) Alors, par le Théorème 5, Pic^0 est la composante neutre du modèle de Néron de $\text{Pic}^0(\mathcal{C}_\eta) = J$.)

Note sur la source. Le texte imprimé porte « in the terminology of is paper » ; la lettre manifestement omise est rétablie dans la traduction par « cet article ».

Supposons d'abord que C ait réduction stable. Alors $\mathcal{C}_s$ est réduite, donc $d = 1$. Par le Théorème (2.5), $\mathcal{J}^0 = \text{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$. Par conséquent $\mathcal{J}_s^0 = \text{Pic}^0(\mathcal{C}_s/k)$. Comme $\mathcal{C}_s$ est réduite et n'a que des points doubles ordinaires, sa jacobienne généralisée $\text{Pic}^0(\mathcal{C}_s/k)$ est une extension d'une variété abélienne par un tore ; elle n'a donc pas de radical unipotent. Ainsi J a réduction stable.

La réciproque est plus difficile. Supposons que J ait réduction stable. Nous prouvons d'abord que C a réduction stable sous l'hypothèse supplémentaire que C possède un point rationnel sur K .⁴ Dans ce cas, $\mathcal{C}$ possède un point rationnel sur R , et comme $\mathcal{C}$ est régulier, les sections de $\mathcal{C}$ sur R passent par des composantes de $\mathcal{C}_s$ de multiplicité un. Par conséquent $d = 1$, et

le théorème (2.5) s'applique. En particulier, $\text{Pic}^0(\mathcal{C}_s/k) = \mathcal{J}_s^0$, de sorte que $\text{Pic}^0(\mathcal{C}_s/k)$ n'a pas de radical unipotent. Nous appliquons :

Lemme (2.6). — Soit D un schéma complet de dimension 1 sur k , tel que $H^0(\mathcal{O}_D) \simeq k$, et tel que la jacobienne généralisée de D n'ait pas de radical unipotent. Alors

- (i) $\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_{D_{\text{red}}})$;
- (ii) *les singularités de D_{red} sont toutes des croisements transversaux d'un ensemble de branches non singulières (c'est-à-dire analytiquement isomorphes à la réunion des axes de coordonnées dans $\mathbf{A}^n$).*

Démonstration. — Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_D$ l'idéal des éléments nilpotents. En filtrant $\mathcal{J}$ par une chaîne d'idéaux $\mathcal{J}_k$ telle que $\mathcal{J}\mathcal{J}_k \subset \mathcal{J}_{k+1}$, et en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_k/\mathcal{J}_{k+1} \xrightarrow{a \mapsto 1+a} (\mathcal{O}_D/\mathcal{J}_{k+1})^* \longrightarrow (\mathcal{O}_D/\mathcal{J}_k)^* \longrightarrow 0,$$

on déduit facilement que $\text{Pic}^0(D/k)$ est une extension de $\text{Pic}^0(D_{\text{red}}/k)$ par un groupe unipotent. Par conséquent, puisque par hypothèse $\text{Pic}^0(D/k)$ n'a pas de sous-groupes unipotents,

$$\text{Pic}^0(D/k) \simeq \text{Pic}^0(D_{\text{red}}/k).$$

Comme $H^1(\mathcal{O}_D)$, respectivement $H^1(\mathcal{O}_{D_{\text{red}}})$, est naturellement isomorphe à l'espace tangent de Zariski de $\text{Pic}^0(D/k)$, respectivement de $\text{Pic}^0(D_{\text{red}}/k)$, il s'ensuit que

$$H^1(\mathcal{O}_D) \simeq H^1(\mathcal{O}_{D_{\text{red}}}),$$

ce qui prouve (i). Soit $\pi : C \rightarrow D_{\text{red}}$ la normalisation de D_{red} , et soit D^* l'espace annelé localement qui a D pour espace topologique et dont le faisceau structural est donné par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{D^*}) = \{f \in \Gamma(U, \pi_*(\mathcal{O}_C)) \mid x_1, x_2 \in \pi^{-1}(U), f(x_1) = f(x_2) \text{ si } \pi(x_1) = \pi(x_2)\}.$$

Il est facile de vérifier que D^* est un schéma de dimension 1 dont les singularités sont toutes des croisements transversaux d'un ensemble de branches non singulières, et que π se factorise :

$$C \xrightarrow{\pi'} D^* \xrightarrow{\pi''} D_{\text{red}}.$$

J'affirme que $\pi'' : D^* \rightarrow D_{\text{red}}$ est un isomorphisme. Filtrons $\mathcal{O}_{D^*}/\mathcal{O}_{D_{\text{red}}}$ de façon à obtenir une chaîne de $\mathcal{O}_{D_{\text{red}}}$ -algèbres cohérentes

$$\mathcal{O}_{D^*} = \mathcal{O}^{(0)} \supset \mathcal{O}^{(1)} \supset \dots \supset \mathcal{O}^{(k)} = \mathcal{O}_{D_{\text{red}}},$$

telle que $\ell(\mathcal{O}^{(n)}/\mathcal{O}^{(n+1)}) = 1$. De manière équivalente, cela factorise π'' :

$$D^* = D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow D_k = D_{\text{red}},$$

où $\mathcal{O}^{(n)} \simeq \mathcal{O}_{D_n}$, et toutes les flèches sont des homéomorphismes. Si $\{x_n\} = \text{Supp}(\mathcal{O}^{(n)}/\mathcal{O}^{(n+1)})$, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D_{n+1}}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{D_n}^* \longrightarrow k_{x_n} \longrightarrow 0$$

(k_y désigne le corps résiduel en y , vu comme faisceau sur D), et donc :

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D_{n+1}}^*) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D_n}^*) \longrightarrow 0.$$

4. C'est en fait le seul cas qui sera nécessaire dans notre application aux questions d'irréductibilité.

Il s'ensuit facilement que $\text{Pic}^0(D_{n+1}/k)$ est une extension de $\text{Pic}^0(D_n/k)$ par G_a . Mais $\text{Pic}^0(D_{\text{red}}/k)$ n'a pas de sous-groupes unipotents, et cela ne peut arriver que si $D_{\text{red}} = D^*$. C.Q.F.D. pour le lemme.

Nous appliquons le lemme à $\mathcal{C}_s$. D'après Lichtenbaum [L] et Šafarevič [Š], il existe un diviseur K sur $\mathcal{C}$ tel que, pour tout diviseur positif D situé au-dessus du point fermé de $\text{Spec}(R)$, on ait :

$$\chi(\mathcal{O}_D) = -\frac{(D \cdot (D + K))}{2}.$$

Note sur la source. La formule imprimée contient le facteur minuscule superflu kK à la place de K . La formule d'adjonction standard, ainsi que toutes ses utilisations immédiatement suivantes, imposent $D+K$, comme ci-dessus.

Soient $E_1, \dots, E_n$ les composantes de $\mathcal{C}_s$, et $d_1, \dots, d_n$ leurs multiplicités. La conclusion (i) du lemme implique alors :

$$\left(\sum_i d_i E_i \cdot \left(\sum_i d_i E_i + K \right) \right) = \left(\sum_i E_i \cdot \left(\sum_i E_i + K \right) \right).$$

Mais $((\sum_i d_i E_i) \cdot E_k) = 0$, pour tout k , puisque $\sum_i d_i E_i$ est le diviseur d'une fonction $\pi \in R$ si $(\pi) = \text{idéal maximal de } R$. Ainsi :

$$(*) \quad \left(\left(\sum_i (d_i - 1) E_i \right) \cdot K \right) = \left(\sum_i E_i \cdot \sum_i E_i \right).$$

Remarquons qu'au moins un des d_i vaut 1, puisque $\mathcal{C}$ possède une section au-dessus de $\text{Spec}(R)$ et que toute section doit passer par une composante de $\mathcal{C}_s$ de multiplicité 1. De plus la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)$ est négative semi-définie, avec un sous-espace dégénéré de dimension un engendré par $\sum_i d_i E_i$; ainsi, si un certain $d_i > 1$, on obtient $(\sum_i E_i \cdot \sum_i E_i) < 0$. Donc, d'après (*), on a $(E_{i_0} \cdot K) < 0$ pour un certain i_0 . Alors :

Note sur la source. Le texte imprimé dit « negative indefinite » tout en précisant l'existence d'un sous-espace dégénéré de dimension un. La lecture mathématiquement cohérente « négative semi-définie » est donnée ci-dessus.

$$a) \quad (E_{i_0} \cdot K) < 0;$$

$$b) \quad (E_{i_0} \cdot E_{i_0}) < 0;$$

$$c) \quad (E_{i_0} \cdot (E_{i_0} + K)) = -2\chi(\mathcal{O}_{E_{i_0}}) \geq -2;$$

d'où en fait $(E_{i_0} \cdot E_{i_0}) = (E_{i_0} \cdot K) = -1$, si bien que E_{i_0} est une courbe exceptionnelle de première espèce. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle, sur $\mathcal{C}$, toutes les courbes possibles ont été contractées. Par conséquent $d_i = 1$ pour tout i .

Cela prouve que $\mathcal{C}_s$ est réduite. Par la conclusion (ii) du lemme, et par le fait que la dimension de son espace tangent de Zariski est partout égale à un ou deux (puisque $\mathcal{C}_s$ est contenue dans la surface régulière $\mathcal{C}$), nous déduisons que $\mathcal{C}_s$ n'a que des points doubles. Cela prouve que C a réduction stable dans le cas où $C(K) \neq \emptyset$.

Dans le cas général, C acquiert un point rationnel dans une extension finie K' de K . Soit S' le spectre de la localisation, en un idéal maximal, de la clôture intégrale de R dans K' ; S' est le spectre d'un anneau de valuation et est fidèlement plat sur S . Posons $S'' = S' \times_S S'$ et notons C' et C'' les images inverses de C sur $S'_\eta = \text{Spec}(K')$ et S''_η , respectivement.

$$\begin{array}{ccccc} C'' & \xrightarrow{\quad} & C' & \xrightarrow{\quad} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S'' & \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} & S' & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

Soit $\overline{C}'$ la courbe stable sur S' ayant C' pour fibre générique. La restriction, C' , de $\overline{C}'$ à S'_η porte une donnée de descente relativement à p , c'est-à-dire un isomorphisme φ_η entre les restrictions de $\text{pr}_1^*(\overline{C}')$ et de $\text{pr}_2^*(\overline{C}')$ à S''_η . Il reste seulement à prolonger l'isomorphisme φ_η en un isomorphisme φ entre les $\text{pr}_i^*(\overline{C}')$. Alors φ sera une donnée de descente pour $\overline{C}'$ relativement à p . Comme $\overline{C}'$ est canoniquement polarisée (1.2), cette donnée de descente sera effective et définira donc une courbe stable $\overline{C}$ sur S , de fibre générique C .

Parce que $\mathcal{J}_s^0$ n'a pas de radical unipotent, l'image inverse $p^* \mathcal{J}^0$ de $\mathcal{J}^0$ sur S' est la composante neutre du modèle de Néron de la jacobienne de C' . Ainsi, en posant $q = p \circ \text{pr}_1 = p \circ \text{pr}_2$, on a

$$\text{Pic}^0(\overline{C}'/S') = p^* \mathcal{J}^0,$$

$$\text{Pic}^0(\text{pr}_1^* \overline{C}') = \text{Pic}^0(\text{pr}_2^* \overline{C}') = q^* \mathcal{J}^0.$$

Nous désignons par T le sous-schéma fermé de $\text{Isom}(S'', \text{pr}_1^*(\bar{C}'), \text{pr}_2^*(\bar{C}'))$ correspondant aux isomorphismes qui induisent (via les identifications précédentes) l'identité sur l'image inverse de $\mathcal{J}^0$.

D'après (1.11), T est fini et non ramifié sur S'' , et d'après (1.13) T est radiciel sur S'' . Nous concluons que le morphisme de T vers S'' identifie T à un sous-schéma fermé X de S'' . Comme X contient S''_η , qui est schématiquement dense dans S'' , on a $X = S''$, et T « est » la section cherchée φ de $\text{Isom}(S'', \text{pr}_1^*(\bar{C}'), \text{pr}_2^*(\bar{C}'))$ au-dessus de S'' , qui prolonge φ_η . C.Q.F.D.

En combinant la proposition (2.3), le théorème (2.4) et le théorème de réduction stable pour les variétés abéliennes cité dans l'introduction, nous obtenons la conséquence la plus importante :

Corollaire (2.7). — Soit R un anneau de valuation discrète de corps des fractions K . Soit C une courbe lisse géométriquement irréductible sur K , de genre $g \geq 2$. Alors il existe une extension algébrique finie L de K et une courbe stable $\mathcal{C}_L$ sur R_L , la clôture intégrale de R dans L , de fibre générique $\mathcal{C}_{L,\eta} = C \times_K L$.

§3. Dédution élémentaire du théorème.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$. Nous utilisons la notation du § 1, sauf que nous désignons maintenant par H_g le produit $H_g \times \text{Spec}(k)$ du précédent H_g avec $\text{Spec}(k)$: c'est une réunion disjointe de variétés non singulières $H_{g,1}, \dots, H_{g,n}$ sur k , et c'est le sous-schéma de $\text{Hilb}_{\mathbf{P}^{5g-6}/k}^g$ des courbes stables tricanoniquement plongées. De même, H_g^0 est l'ouvert dense de H_g des courbes non singulières tricanoniquement plongées. D'après les résultats de [M₁], on sait qu'un quotient géométrique grossier

$$M_g^0 = H_g^0 / \text{PGL}(5g-6)$$

existe, que c'est une réunion disjointe de variétés normales sur k , et que c'est l'espace de modules grossier des courbes non singulières de genre g . Posons $S^* = H_g - H_g^0$. Alors tout se décompose suivant le même ensemble de composantes.

Posons

$$\begin{aligned} H_{g,i} &= \text{composantes de } H_g, \\ \text{alors } H_{g,i}^0 &= H_{g,i} \cap H_g^0 = \text{composantes de } H_g^0, \\ \text{et } M_{g,i}^0 &= H_{g,i}^0 / \text{PGL}(5g-6) = \text{composantes de } M_g^0, \\ \text{et } S^* &= \text{réunion disjointe de } S_1^*, \dots, S_n^*, \quad S_i^* = H_{g,i} \cap S^*. \end{aligned}$$

Nous voulons prouver que M_g^0 , ou de façon équivalente H_g^0 , ou de façon équivalente H_g , est irréductible. Nous utiliserons : (i) le fait que ces assertions sont vraies en caractéristique 0 ; (ii) l'hypothèse d'induction selon laquelle elles sont vraies pour les genres plus petits.

Étape I. — Aucune composante de M_g^0 n'est complète (c'est-à-dire propre sur k).

Démonstration. — Nous utilisons ici le résultat en caractéristique 0. D'après [M₁], il existe un schéma X , quasi projectif sur $\text{Spec}(W(k))$, où $W(k)$ désigne les vecteurs de Witt, dont la fibre fermée est M_g^0 et dont la fibre générique X_η est l'espace de modules grossier en caractéristique 0 sur le corps des fractions de $W(k)$. En particulier, X_η est connu pour être connexe. Comme X est quasi projectif sur $W(k)$, on peut plonger X comme ouvert dense dans un schéma $\bar{X}$ projectif sur $W(k)$. La fibre $\bar{X}_\eta$ est encore connexe ; donc, par le théorème de connexité d'Enriques-Zariski [EGA 3], la fibre fermée $\bar{X}_0$ de $\bar{X}$ est connexe. Mais si Y était une variété complète qui est une composante de M_g^0 , alors : a) Y serait un ouvert de M_g^0 , lui-même ouvert de $\bar{X}_0$; et b) puisque Y est propre sur k , Y serait aussi un fermé de $\bar{X}_0$. Par conséquent $Y = \bar{X}_0$, donc M_g^0 serait lui-même irréductible et complet. D'autre part, si A_g est l'espace de modules grossier des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g , l'application qui associe à chaque courbe sa jacobienne définit un morphisme

Note sur la source. Le texte imprimé porte la coquille « principally pclarized » ; la lecture « principally polarized » est rétablie dans le texte anglais et traduite ci-dessus.

$$\theta : M_g^0 \rightarrow A_g.$$

Si M_g^0 était complet, l'image de θ serait fermée. Mais il est bien connu que l'adhérence de l'image de θ contient aussi tous les produits de jacobiniennes de dimensions inférieures ; elle n'est donc pas fermée. C.Q.F.D.

Étape II. — Aucune composante de H_g n'est entièrement formée de courbes non singulières ; autrement dit $S_i^* \neq \emptyset$ pour tout i .

Démonstration. — Nous combinons ici l'étape I avec le résultat du § 2. Fixons i . Soit $T = \text{Spec } k[[t]]$. Puisque $M_{g,i}^0$ n'est pas complet, il existe un morphisme φ du point générique T_η de T dans $M_{g,i}^0$ qui ne se prolonge pas en un morphisme de T dans $M_{g,i}^0$. Remplaçons maintenant T par sa normalisation T' dans une extension algébrique finie, et soit $\varphi' : T'_\eta \rightarrow M_{g,i}^0$ le morphisme induit ; il ne se prolonge toujours pas en un morphisme de T' dans $M_{g,i}^0$. D'après les résultats du § 2, si T' est convenablement choisi, il existe une courbe stable $\pi : C' \rightarrow T'$ sur T' dont la fibre générique C'_η est une courbe non singulière correspondant au morphisme $\varphi' : T'_\eta \rightarrow M_{g,i}^0$ par les propriétés fonctorielles de l'espace de modules. Comme T' est le spectre d'un anneau local, on peut choisir un isomorphisme

$$\mathbf{P}(\pi_*(\omega_{C'/T'}^{\otimes 3})) \simeq \mathbf{P}^{5g-6} \times T',$$

et obtenir un plongement tricanonique $C' \subset \mathbf{P}^{5g-6} \times T'$. Avec ce plongement, C' est alors induite de la courbe stable universelle tricanoniquement plongée par un morphisme $\psi : T' \rightarrow H_g$. Puisque la fibre générique de C' est C'_η , on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\psi} & H_g \\ \cup & & \cup \\ T'_\eta & \xrightarrow{\text{res}(\psi)} & H_g^0 \\ \varphi' \searrow & & \downarrow \\ & M_{g,i}^0 & \subset M_g^0. \end{array}$$

Si $\text{Im}(\psi) \subset H_g^0$, alors φ' se prolongerait en un morphisme de T' vers M_g^0 , donc de T' vers $M_{g,i}^0$, contradiction. De plus, $\psi(T_\eta)$ doit être un point de $H_{g,i}^0$, puisque son image dans M_g^0 appartient à $M_{g,i}^0$. Par conséquent l'image x du point fermé de T' par ψ appartient à l'adhérence de $H_{g,i}^0$, c'est-à-dire à $H_{g,i}$, mais non à $H_{g,i}^0$ lui-même. C.Q.F.D.

Étape III. — S^* est connexe.

Démonstration. — Cela résultera uniquement de l'hypothèse d'induction d'irréductibilité pour les genres inférieurs. Soit $Z \subset H_g \times \mathbf{P}^{5g-6}$ la courbe stable universelle tricanoniquement plongée. Soit $S \subset Z$ l'ensemble des points où Z n'est pas lisse au-dessus de H_g . Comme nous l'avons prouvé au § 1, S est non singulier et est la normalisation de S^* . En particulier, cela montre que, si $x \in S^*$, la courbe correspondante Z_x possède exactement un point double si et seulement si x est un point non singulier de S^* . Les courbes stables C de genre g ayant exactement un point double sont de l'un des types suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{type } 0 : & \begin{array}{l} \text{C irréductible} \\ \text{la normalisation } C' \text{ de } C \text{ est de genre } g-1; \end{array} \\ \text{type } k : & \begin{array}{l} \text{C a deux composantes non singulières } C_1, C_2 \\ \text{genre}(C_1) = k \\ \text{genre}(C_2) = g-k. \end{array} \end{array}$$

où $1 \leq k \leq [\frac{g}{2}]$. Si $0 \leq k \leq [\frac{g}{2}]$, posons

$$S^*(k) = \{x \in S^* \mid Z_x \text{ a un point double et est de type } k\}.$$

Alors l'ouvert dense de S^* formé de points non singuliers est la réunion disjointe des ouverts $S^*(0), \dots, S^*([\frac{g}{2}])$. Vérifions d'abord :

(*) Chaque ensemble $S^*(k)$ est irréductible.

Démonstration de ().* — Prenons le cas $k = 0$; les cas $1 \leq k \leq [\frac{g}{2}]$ sont similaires. Soit

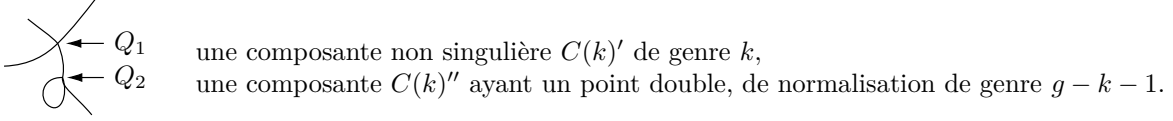
$$T = \{\{x_1, x_2\} \mid x_1 \neq x_2 \text{ et } \pi(x_1) = \pi(x_2) \in H_{g-1}^0\} \subset Z_{g-1} \times_{H_{g-1}} Z_{g-1}.$$

T est lisse à fibres irréductibles au-dessus de H_{g-1}^0 , donc T est irréductible. Considérons la correspondance reliant $S^*(0)$ et T :

$$W = \begin{cases} \text{ensemble des paires } x \in S^*(0), \{x_1, x_2\} \in T \text{ telles que, si } y = \pi(x_1) = \pi(x_2), \\ \text{il existe un morphisme birationnel } f : (Z_{g-1})_y \rightarrow (Z_g)_x \\ \text{tel que } f(x_1) = f(x_2). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que W est fermé de Zariski. De plus, pour tout $\{x_1, x_2\} \in T$, $W \cap (S^*(0) \times \{x_1, x_2\})$ est une orbite dans $S^*(0)$ sous $\mathrm{PGL}(5g - 6)$; ce sont donc des sous-ensembles non vides, irréductibles et tous de même dimension. Il s'ensuit que W lui-même est irréductible. Mais la projection de W vers $S^*(0)$ est surjective, donc $S^*(0)$ est irréductible. C.Q.F.D. pour (*).

Maintenant, pour tout k , $1 \leq k \leq [\frac{g}{2}]$, choisissons une courbe stable quelconque $C(k)$ du type :



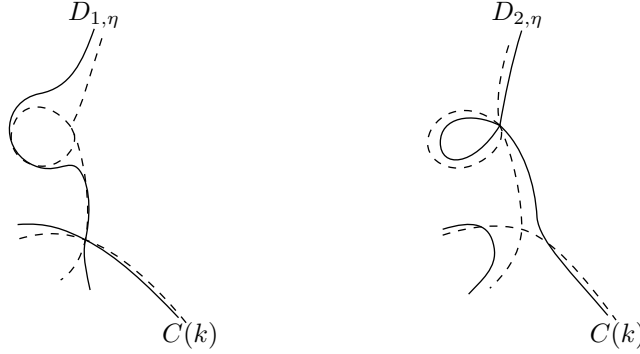
Soit $P(k)$ un point de H_g tel que $Z_{P(k)} \simeq C(k)$. L'étape III sera achevée si nous prouvons :

(**) $P(k)$ appartient à l'adhérence de $S^*(0)$ et à celle de $S^*(k)$; ainsi $S^*(0)$ et $S^*(k)$ appartiennent toutes deux à la même composante topologique de S^* .

*Démonstration de (**).* — Soit $T = \mathrm{Spec} k[[t]]$. En utilisant le fait que S^* a deux branches passant par $P(k)$, une pour chacun des points doubles de $C(k)$, on voit qu'il existe deux morphismes

$$f_1, f_2 : T \rightarrow S^*,$$

$$f_1(T_s) = f_2(T_s) = P(k), \quad T_s = \text{point fermé de } T,$$



tels que, si $\pi_1 : D_1 \rightarrow T$, $\pi_2 : D_2 \rightarrow T$ sont les deux courbes stables sur T induites par f_1 et f_2 , alors : a) les fibres fermées $D_{1,s}$, $D_{2,s}$ sont $C(k)$; b) il existe des sections $s_1 : T \rightarrow D_1$, $s_2 : T \rightarrow D_2$ dont les images sont des points non lisses de π_1 , π_2 , et telles que $s_1(T_s)$ et $s_2(T_s)$ soient respectivement les deux points doubles Q_1 et Q_2 de $C(k)$; c) les fibres génériques $D_{1,\eta}$, $D_{2,\eta}$ n'ont qu'un point double (cf. figure). J'affirme :

- A) $D_{1,\eta}$ est de type (k) ;
- B) $D_{2,\eta}$ est de type (0) .

Pour prouver A), soit D'_1 le résultat de l'éclatement du sous-schéma $s_1(T)$ de D_1 . Alors D'_1 est encore plat et propre sur T , et sa fibre spéciale est la fibre spéciale de D_1 avec Q_1 éclaté (on utilise le fait que formellement en Q_1 , D_1 est isomorphe à $k[[t, x, y]]/(xy)$, la section étant donnée par $x = y = 0$). Par conséquent, la fibre spéciale de D'_1 est la réunion disjointe de $C(k)'$ et $C(k)''$; ainsi la fibre générale de D'_1 est la réunion disjointe de deux courbes irréductibles qui se spécialisent respectivement en $C(k)'$ et $C(k)''$. Puisque $D_{1,\eta}$ n'a qu'un point double, $D'_{1,\eta}$ est non singulière; donc $D'_{1,\eta}$ est la réunion disjointe de deux courbes irréductibles non singulières qui doivent alors avoir les mêmes genres que $C(k)'$ et $C(k)''$, c'est-à-dire k et $g - k$. Ainsi $D_{1,\eta}$ est de type (k) .

Pour prouver B), il suffit de vérifier que $D_{2,\eta}$ est géométriquement irréductible. Sinon, $D_{2,\eta}$ aurait deux composantes se rencontrant au point unique $s_2(T_\eta)$. Comme D_2 est lisse sur T en chaque point générique de sa fibre spéciale, des composantes géométriques distinctes de $D_{2,\eta}$ auraient des spécialisations qui seraient des composantes distinctes de $(D_2)_s$. Alors $(D_2)_s$ aurait deux composantes se rencontrant au point $Q_2 = s_2(T_s)$. C'est faux, donc B) est prouvé.

Par A), $f_1(T_\eta) \in S^*(k)$, donc $P(k) = f_1(T_s)$ appartient à l'adhérence de $S^*(k)$. Par B), $f_2(T_\eta) \in S^*(0)$, donc $P(k) = f_2(T_s)$ appartient aussi à l'adhérence de $S^*(0)$. C.Q.F.D. pour (**).

Cela achève la preuve de l'étape III, puisque toutes les composantes irréductibles de S^* font désormais partie de la même composante topologique. Enfin, les étapes II et III montrent que

- a) S^* , étant connexe, est contenu dans une seule composante de H_g ;
- b) chaque composante de H_g contient une partie de S^* .

Donc H_g est irréductible, comme il fallait le démontrer.

§4. Quelques résultats sur les champs algébriques.

Les démonstrations des résultats énoncés dans cette section seront données ailleurs.

Soit C une catégorie et soit $p : \mathcal{S} \rightarrow C$ une catégorie au-dessus de C . Pour chaque $U \in \text{Ob } C$, nous notons $\mathcal{S}_U$ la fibre $p^{-1}(U)$. La catégorie $\mathcal{S}$ est *fibrée en groupoïdes* au-dessus de C si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) Pour tout $\varphi : U \rightarrow V$ dans C et tout $y \in \text{Ob } \mathcal{S}_V$, il existe une flèche $f : x \rightarrow y$ dans $\mathcal{S}$ telle que $p(f) = \varphi$.
- b) Étant donné un diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ & \searrow f & \\ & & z \\ & \nearrow g & \\ y & & \end{array}$$

dans $\mathcal{S}$, soit

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & W \\ & \nearrow \psi & \\ V & & \end{array}$$

son image dans C . Alors, pour tout $\chi : U \rightarrow V$ tel que $\varphi = \psi\chi$, il existe un unique $h : x \rightarrow y$ tel que $f = g \cdot h$ et $p(h) = \chi$.

Note sur la source. Le premier diagramme imprimé note Y son objet inférieur gauche ; la notation environnante exige le y retenu ici.

La condition b) implique que la flèche $f : x \rightarrow y$ dont l'existence est affirmée en a) est unique à isomorphisme canonique près.

Supposons que, pour chaque $\varphi : U \rightarrow V$ dans C et chaque $Y \in \text{Ob } \mathcal{S}_V$, une telle flèche $f : x \rightarrow y$ ait été choisie. Cet x sera noté φ^*y . Alors, φ^* « est » un foncteur de $\mathcal{S}_V$ vers $\mathcal{S}_U$; si $\varphi\psi$ est un morphisme composé de C , les foncteurs $(\varphi\psi)^*$ et $\varphi^*\psi^*$ sont canoniquement isomorphes.

Nous proposons le terme anglais “stack” pour le mot français “champ” de la cohomologie non abélienne (Giraud [G]).

Définition (4.1). — Soit C une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck. Nous supposons que les produits et les produits fibrés existent dans C . Un champ en groupoïdes au-dessus de C est une catégorie au-dessus de C , $p : \mathcal{S} \rightarrow C$, telle que :

- (i) $\mathcal{S}$ est fibrée en groupoïdes au-dessus de C .
- (ii) Pour tout $U \in \text{Ob } C$ et tous objets x, y de $\mathcal{S}_U$, le foncteur de C/U vers (ensembles), qui à $\varphi : V \rightarrow U$ associe $\text{Hom}_{\mathcal{S}_V}(\varphi^*x, \varphi^*y)$, est un faisceau.
- (iii) Si $\varphi_i : V_i \rightarrow U$ est une famille couvrante dans C , toute donnée de descente relativement aux φ_i , pour des objets de $\mathcal{S}$, est effective.

Pour chaque $x \in \text{Ob } \mathcal{S}_U$, on a des isomorphismes entre les images inverses de $x_i = \varphi_i^*x$ et $x_j = \varphi_j^*x$ sur $V_{ij} = V_i \times_U V_j$, et les images inverses de ces isomorphismes sur $V_{ijk} = V_i \times_U V_j \times_U V_k$ satisfont une condition de “cocycle”. Dans (iii), on exige réciproquement que toute telle “donnée de descente” soit définie par un certain $x \in \mathcal{S}_U$.

Dans ce qui suit, par souci de brièveté, nous utiliserons “champ” pour signifier “champ en groupoïdes”.

Si $U \in \text{Ob } C$ et si $\mathcal{S}$ est un champ au-dessus de C , la fibre $\mathcal{S}_U$ sera appelée la catégorie des sections de $\mathcal{S}$ au-dessus de U .

Soit C comme en (4.1). Les champs au-dessus de C sont les objets d'une 2-catégorie [B] (champs/ C) : les 1-morphismes sont les foncteurs d'un champ vers un autre, compatibles avec la projection vers C ; et les 2-morphismes sont les morphismes de foncteurs. Dans cette 2-catégorie, tout 2-morphisme est un isomorphisme. Les produits et les 2-produits fibrés existent dans cette 2-catégorie.

À chaque $X \in \text{Ob } C$ est associé le champ “représentable” au-dessus de C dont la catégorie des sections au-dessus de U est la catégorie discrète dont les objets sont les morphismes de U vers X . Ce champ sera simplement noté X . Pour tout champ $\mathcal{S}$, la catégorie

$$\text{Hom}(X, \mathcal{S})$$

est canoniquement équivalente à la catégorie des sections de $\mathcal{S}$ au-dessus de X . Pour cette raison, on dit parfois que $\mathcal{S}$ “classifie” ses sections lorsque $X \in \text{Ob } C$ varie. Dans la catégorie $\text{Hom}(\mathcal{S}, X)$, tous les morphismes sont des identités, c’est-à-dire que $\text{Hom}(\mathcal{S}, X)$ n’est qu’un ensemble.

Notons aussi par C la 2-catégorie ayant les mêmes objets et morphismes que C , et dans laquelle les identités sont les seuls 2-morphismes. La construction précédente identifie alors C à une sous-2-catégorie pleine de (champs/ C).

Pour chaque $S \in \text{Ob } C$, la catégorie C/S satisfait les hypothèses de (4.1). Tout champ $\mathcal{S}_0$ sur C/S (un “ S -champ”) donne naissance à un champ $\mathcal{S}$ sur C ; une section (φ, η) de $\mathcal{S}$ au-dessus de $U \in \text{Ob } C$ consiste en :

- (i) un morphisme $\varphi : U \rightarrow S$;
- (ii) une section η de $\mathcal{S}_0$ au-dessus de (U, φ) .

Définition (4.2). — Un 1-morphisme de champs au-dessus de C , $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, sera dit *représentable* si, pour tout X dans C et tout 1-morphisme $x : X \rightarrow \mathcal{S}_2$, le produit fibré $X \times_{\mathcal{S}_2} \mathcal{S}_1$ est un champ représentable.

En termes plus concrets, cela signifie ce qui suit :

- (i) pour tout $f : Y \rightarrow X$ dans C , la catégorie dont les objets sont les paires

$$\{\text{une section } y \text{ de } \mathcal{S}_1 \text{ au-dessus de } Y; \text{ un isomorphisme } F(y) \xrightarrow{\sim} f^*(x)\}$$

est équivalente à une catégorie $S(f)$ dans laquelle tous les morphismes sont des identités;

- (ii) le foncteur $f \mapsto \text{Ob } S(f)$ est représentable par un certain $g : Z \rightarrow X$. Un tel Z représente le produit fibré $X \times_{\mathcal{S}_2} \mathcal{S}_1$.

Soit P une propriété de morphismes dans C , stable par changement de base et de nature locale sur le but.

Définition (4.3). — Un morphisme représentable $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ de champs au-dessus de C a la propriété P si, pour tout 1-morphisme $x : X \rightarrow \mathcal{S}_2$, le morphisme de C obtenu par changement de base, $F' : X \times_{\mathcal{S}_2} \mathcal{S}_1 \rightarrow X$, a cette propriété.

Proposition (4.4). — Soit $\mathcal{S}$ un champ. Le morphisme diagonal

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}$$

est représentable si et seulement si, pour tous $X, Y \in \text{Ob } C$ et tous 1-morphismes $x : X \rightarrow \mathcal{S}$, $y : Y \rightarrow \mathcal{S}$, le produit fibré $X \times_{\mathcal{S}} Y$ est représentable.

Si $X \in \text{Ob } C$ et si x, y sont des sections de $\mathcal{S}$ au-dessus de X , nous notons $\underline{\text{Isom}}(X, x, y)$ le faisceau sur C/X qui, à tout Z au-dessus de X , associe l’ensemble des isomorphismes entre les images inverses de x et de y au-dessus de Z . Alors l’objet représentant $\mathcal{S} \times_{(\mathcal{S} \times \mathcal{S})} X$ (le produit étant pris avec l’application $(x, y) : X \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}$) n’est autre que $\text{Isom}(X, x, y)$. Si $X \rightarrow \mathcal{S}$ et $Y \rightarrow \mathcal{S}$ sont des 1-morphismes, alors l’objet représentant $X \times_{\mathcal{S}} Y$ n’est autre que $\text{Isom}(X \times Y, p_1^*x, p_2^*y)$.

Dorénavant, C sera la catégorie des schémas munie de la topologie étale (SGAD, IV, (6.3)).

Définition (4.5). — Un champ $\mathcal{S}$ est *quasi séparé* si le morphisme diagonal de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est représentable, *quasi compact* et *séparé*.

Note sur la source. La définition imprimée porte “the diagonal morphism from to $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ”; le second “to” parasite est omis ici.

Définition (4.6). — Un champ $\mathcal{S}$ est un *champ algébrique*⁵ si

- (i) $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est représentable;
- (ii) il existe un 1-morphisme $x : X \rightarrow \mathcal{S}$ tel que, pour tout $y : Y \rightarrow \mathcal{S}$, le morphisme de projection $X \times_{\mathcal{S}} Y \rightarrow Y$ soit surjectif et étale (c’est-à-dire que x soit étale et surjectif).

La 2-catégorie des champs algébriques contient les champs représentables et est stable par produits et produits fibrés. Si $\mathcal{S}$ est un champ algébrique quasi séparé, le morphisme diagonal est non ramifié et quasi affine.

5. Cette définition n’est la “bonne” que pour les champs quasi séparés. Elle suffira cependant pour nos besoins.

Définition (4.7). — Un champ algébrique $\mathcal{S}$ est séparé si $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est propre (ou, de façon équivalente, fini). Un 1-morphisme $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ est séparé (resp. quasi séparé) si, pour tout morphisme $x : X \rightarrow \mathcal{S}_2$ d'un schéma séparé X vers $\mathcal{S}_2$, le produit fibré $\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}_2} X$ est séparé (resp. quasi séparé).

Exemple (4.8). — Soit X un schéma sur S . Soit G un schéma en groupes sur S , étale, séparé et de type fini sur S , qui opère sur X . Nous noterons $[X/G]$ le S -champ dont la catégorie des sections au-dessus d'un S -schéma T est la catégorie des espaces principaux homogènes (p.h.s.) E au-dessus de T , de groupe structural G (c'est-à-dire un p.h.s. sous G_T), muni d'un G -morphisme $\varphi : E \rightarrow X$. L'espace principal homogène $G \times X$ au-dessus de X (G agissant seulement sur le premier facteur), avec le G -morphisme $G \times X \rightarrow X$ (donné par l'action de G sur X), est une section de $[X/G]$ au-dessus de X . Le morphisme correspondant $q : X \rightarrow [X/G]$ est étale et surjectif, de sorte que $[X/G]$ est un champ algébrique. De plus, X est un espace principal homogène au-dessus de $[X/G]$; le champ $[X/G]$ est représentable si et seulement si X est un espace principal homogène au-dessus d'un schéma Y , auquel cas

$$[X/G] \sim Y.$$

Si $X = S$, alors $[X/G] = [S/G]$ pourrait être appelé le “champ classifiant” de G au-dessus de S .

Exemple (4.9). — Supposons qu'un champ $\mathcal{S}$ ait la propriété suivante : dans chaque catégorie $\mathcal{S}_X$, les seuls morphismes sont les morphismes identité. Alors $\mathcal{S}_X$ est simplement un ensemble $\mathcal{F}(X) = \text{Ob } \mathcal{S}_X$, et cet ensemble, par image inverse, est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ en X . Les conditions (ii) et (iii) de (4.1) affirment que le foncteur $\mathcal{F}$ est un faisceau sur C . Artin et Knutson [K] ont défini un *espace algébrique* comme un faisceau $\mathcal{F}$ tel que :

- (i) pour tous morphismes $X \rightarrow \mathcal{F}$, $Y \rightarrow \mathcal{F}$ de foncteurs représentables vers $\mathcal{F}$, le produit fibré $X \times_{\mathcal{F}} Y$ soit représentable;
- (ii) il existe un morphisme $X \rightarrow \mathcal{F}$, représenté par des morphismes de schémas surjectifs et étales.

C'est exactement ce que nous avons appelé un champ algébrique dans ce cas.

Définition (4.10). — Soit $\mathcal{S}$ un champ algébrique. Le site étale $\mathcal{S}_{et}$ de $\mathcal{S}$ est la catégorie dont les objets sont les morphismes étales

$$x : X \rightarrow \mathcal{S}$$

et où un morphisme de (X, x) vers (Y, y) est un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$, avec un 2-morphisme entre le 1-morphisme $x : X \rightarrow \mathcal{S}$ et $y \cdot f : X \rightarrow \mathcal{S}$. Une famille de morphismes $f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (X, x)$ est une famille couvrante si la famille sous-jacente de morphismes de schémas est surjective.

Le site $\mathcal{S}_{et}$ est naturellement annelé. Lorsque nous parlons de faisceaux sur $\mathcal{S}$, nous entendons des faisceaux sur $\mathcal{S}_{et}$.

Nous expliquons maintenant comment de nombreuses notions de la théorie des schémas peuvent être appliquées aux champs algébriques.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété de morphismes de schémas, stable par changement de base étale, et de nature locale (pour la topologie étale) sur le but.

Par exemple : être une immersion ouverte d'image dense, être dominant, birationnel...

Un morphisme représentable de champs algébriques $f : T_1 \rightarrow T_2$ est dit avoir la propriété $\mathcal{P}$ si, pour un (et donc pour tout) morphisme étale surjectif $x : X \rightarrow T_2$, le morphisme de schémas déduit par changement de base

$$f' : X \times_{T_2} T_1 \longrightarrow X$$

a cette propriété.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété de morphismes de schémas qui, à la source et au but, est de nature locale pour la topologie étale. Cela signifie que, pour toute famille de carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{g_i} & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow f \\ Y_i & \xrightarrow{h_i} & Y \end{array}$$

où les g_i (resp. h_i) sont étales et couvrent X (resp. Y), on a

$$\mathcal{P}(f) \iff \forall i \mathcal{P}(f_i).$$

Par exemple : f plat, lisse, étale, non ramifié, normal, localement de type fini, localement de présentation finie.

Si $f : T_1 \rightarrow T_2$ est un morphisme de champs algébriques, nous disons que f a la propriété $\mathcal{P}$ si, pour un, et alors nécessairement pour tout, diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & T_1 \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{y} & T_2 \end{array}$$

où X et Y sont des schémas et où x, y sont étales et surjectifs, le morphisme f' a la propriété $\mathcal{P}$.

De même, si $\mathcal{P}$ est une propriété de schémas, de nature locale pour la topologie étale, un champ algébrique T sera dit avoir la propriété $\mathcal{P}$ si, pour un (et donc pour tout) morphisme étale surjectif $x : X \rightarrow T$, le schéma X a la propriété $\mathcal{P}$. Cela s'applique, par exemple, aux propriétés d'être régulier, normal, localement noethérien, de caractéristique p , réduit, Cohen–Macaulay...

Un champ algébrique T sera dit *quasi-compact* s'il existe un morphisme étale surjectif $x : X \rightarrow T$ avec X quasi-compact. Un morphisme $f : T_1 \rightarrow T_2$ de champs algébriques sera dit *quasi-compact* si, pour tout schéma quasi-compact X au-dessus de T_2 , le produit fibré $T_1 \times_{T_2} X$ est quasi-compact. Il suffit de tester la condition pour une famille surjective $f_i : X_i \rightarrow T_2$. Nous définissons un morphisme $f : T_1 \rightarrow T_2$ comme étant de *type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini ; de *présentation finie* s'il est quasi-compact, quasi-séparé et localement de présentation finie. Un champ algébrique est *noethérien* s'il est quasi-compact, quasi-séparé et localement noethérien.

Le point clé dans ce qui suit sera la définition d'un « morphisme propre » et l'analogue du lemme de Chow.

Un morphisme $f : T_1 \rightarrow T_2$ est dit avoir une propriété $\mathcal{P}$, localement sur T_2 , s'il existe un morphisme étale surjectif $x : X \rightarrow T_2$ tel que le morphisme f' déduit de f par le changement de base par x ait la propriété $\mathcal{P}$.

Définition (4.11). — Un morphisme $f : T_1 \rightarrow T_2$ est propre s'il est séparé, de type fini et si, localement au-dessus de T_2 , il existe des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T_3 & \xrightarrow{g} & T_1 \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & T_2 & \end{array}$$

où g est surjectif et h représentable et propre.

Note sur la source. Le texte imprimé porte “there exists commutative diagrams” ; l'accord du verbe est corrigé ici sans modifier le pluriel.

La forme suivante du lemme de Chow suffira pour nos besoins.

Théorème (4.12). — Soit S un schéma noethérien et soit f un morphisme d'un site étale T vers S . On suppose f séparé et de type fini. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T & \xleftarrow{g} & T' & \xrightarrow{j} & T'' \\ & \searrow f' & \searrow f'' & \nearrow & \\ f \downarrow & & & & \\ S & & & & \end{array}$$

dans lequel T' et T'' sont des schémas et tel que

- (i) g soit propre, surjectif et génériquement fini ;
- (ii) j soit une immersion ouverte ;
- (iii) f'' soit projectif.

En utilisant (4.12), il est facile d'étendre à la situation présente la théorie cohomologique des faisceaux cohérents. En effet, si $f : T_1 \rightarrow T_2$ est un morphisme propre de champs algébriques noethériens et si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur T_1 , alors les $R^i f_*(\mathcal{F})$ sont des faisceaux cohérents sur T_2 .

Cependant, il n'est pas nécessaire que les $R^i f_*(\mathcal{F})$ soient nuls pour i assez grand. Soient S un schéma et G un groupe fini. Nous notons p la projection $p : [S/G] \rightarrow S$. Les faisceaux quasi-cohérents (resp. cohérents) de modules sur $[S/G]$ peuvent (et seront) identifiés aux faisceaux quasi-cohérents (resp. cohérents) de modules sur S sur lesquels G agit. On a

$$R^i p_*(\mathcal{F}) \simeq H^i(G, \mathcal{F}).$$

En général, la cohomologie (des faisceaux quasi-cohérents) des champs algébriques apparaît comme un mélange de cohomologie de groupes finis et de cohomologie des schémas.

La *somme disjointe* T d'une famille $(T_i)_{i \in I}$ de champs est le champ dont une section au-dessus d'un schéma X consiste en

- (i) une décomposition $X = \coprod_i X_i$ de X ;
- (ii) une section de T_i au-dessus de X_i , pour chaque i .

Le *champ vide* $\emptyset$ est celui qui est représenté par le schéma vide.

Un champ est *connexe* s'il est non vide et n'est pas somme disjointe de deux champs non vides.

Proposition (4.13). — *Un champ algébrique localement noethérien est, d'une manière et d'une seule, somme disjointe d'une famille de champs algébriques connexes (appelés ses composantes connexes).*

Nous notons $\pi_0(T)$ l'ensemble des composantes connexes d'un champ algébrique localement noethérien T . Si $x : X \rightarrow T$ est surjectif et étale, $\pi_0(T)$ est le conoyau des deux applications

$$\pi_0(X \times_T X) \rightrightarrows \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(T).$$

Proposition (4.14). — *Soit T un champ algébrique de type fini sur un corps k . Alors T est connexe si et seulement s'il existe un schéma connexe X , de type fini sur k , et un morphisme surjectif de X vers T .*

Un ouvert U d'un champ algébrique T est une sous-catégorie pleine $U \subset T$ qui est un champ algébrique, qui contient avec tout $t \in \text{Ob}(T)$ tout t' isomorphe à t , et telle que l'inclusion $j : U \rightarrow T$ soit représentable par des immersions ouvertes. Les ouverts de T correspondent bijectivement aux ouverts de son site étale.

Note sur la source. La phrase imprimée porte “The open subsets of T corresponds” ; l'accord du verbe est corrigé ici.

Pour chaque ouvert U de T , il existe une et une seule sous-catégorie pleine $T - U$ de T , qui est un champ algébrique, qui contient avec tout $t \in \text{Ob}(T)$ tout t' isomorphe à t , et telle que

- (i) $T - U$ soit réduit ;
- (ii) l'application d'inclusion $i : T - U \rightarrow T$ soit représentable par des immersions fermées ;
- (iii) pour tout morphisme étale surjectif $x : X \rightarrow T$, l'image inverse de $T - U$ sur X soit le complémentaire de l'image inverse de U .

Un champ algébrique F dans T satisfaisant (i) et (ii) est un *fermé* de T , et le foncteur $U \mapsto T - U$ est un isomorphisme de l'ensemble des ouverts sur l'ensemble des fermés de T . Si F satisfait seulement (ii), F_{red} satisfait (i) et (ii), de sorte que F définit un fermé de T .

Un champ algébrique T est *irréductible* s'il n'est pas la réunion de deux fermés non vides et distincts de T .

Proposition (4.15). — *Un champ algébrique noethérien T est, d'une manière et d'une seule, réunion de fermés irréductibles dont aucun ne contient un autre. On les appelle les composantes irréductibles de T . Si U est un ouvert dense de T , les composantes irréductibles de U sont les intersections non vides de U avec les composantes irréductibles de T .*

Chaque composante irréductible de T est contenue dans une composante connexe de T . Réciproquement :

Proposition (4.16). — *Les composantes connexes d'un champ algébrique normal noethérien sont irréductibles.*

Théorème (4.17). — *Soit f un morphisme de type fini d'un champ algébrique T vers un schéma noethérien S . Pour $s \in S$, soit $n(s)$ le nombre de composantes connexes de la fibre géométrique de T en s . Alors*

- (i) $n(s)$ est une fonction constructible de s ;
- (ii) si f est propre et plat, alors $n(s)$ est semi-continue inférieurement ;
- (iii) si f est propre plat et a des fibres géométriquement normales, alors $n(s)$ est constante.

Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme de type fini d'un champ algébrique T vers un schéma noethérien S . Supposons que l'application diagonale $T \rightarrow T \times_S T$ soit séparée et quasi-compacte.

Théorème (4.18) (critère valuatif de séparation). — Le morphisme f est séparé si et seulement si, pour tout anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos et tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow g_1 & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(V) & \xrightarrow{g_2} & S \end{array}$$

tout isomorphisme entre les restrictions de g_1 et de g_2 au point générique de $\mathrm{Spec}(V)$ peut être prolongé en un isomorphisme entre g_1 et g_2 .

Ce critère n'est rien d'autre que le critère valuatif de propreté (EGA, II, 7.3.8) appliqué au morphisme diagonal (représentable).

Théorème (4.19) (critère valuatif de propreté). — Si f est séparé, alors f est propre si et seulement si, pour tout anneau de valuation discrète V de corps des fractions K et tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & T \\ & & & \nearrow g & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(V) & \longrightarrow & S \end{array}$$

il existe une extension finie K' de K telle que g se prolonge à $\mathrm{Spec}(V')$, où V' est la clôture intégrale de V dans K'

$$\begin{array}{ccccc} & & & & T \\ & & & \nearrow & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(K') & \xrightarrow{g} & \mathrm{Spec}(V') & \longrightarrow & S \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathrm{Spec}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(V) & \longrightarrow & S \end{array}$$

Pour prouver qu'un f donné est propre, il suffit de vérifier le critère ci-dessus sous l'hypothèse supplémentaire que V est complet et a un corps résiduel algébriquement clos. En outre, étant donné un ouvert dense U de T , il suffit de tester seulement les g qui se factorisent par U .

Proposition (4.20). — Soit $\mathcal{S}$ un champ algébrique. Le foncteur qui, à tout champ algébrique au-dessus de $\mathcal{S}$, $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$, associe le faisceau d' $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -algèbres $f_\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ induit une équivalence de catégories entre :*

- (i) *la catégorie des champs algébriques représentables et affines au-dessus de $\mathcal{S}$;*
- (ii) *la catégorie opposée de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -algèbres quasi-cohérentes.*

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -algèbres sur un champ algébrique $\mathcal{S}$. Pour chaque morphisme étale $x : U \rightarrow \mathcal{S}$, avec U affine, soit $\mathcal{A}'(U)$ la clôture intégrale de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$ dans $\mathcal{A}(U)$. D'après (EGA, II, 6.3.4), les $\mathcal{A}'(U)$, lorsque U varie, sont les sections au-dessus de U d'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{S}$, qui sera appelé la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{A}$.

Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ représentable et affine. Le champ algébrique associé par (4.20) à la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ dans $f_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ sera appelé la normalisation de $\mathcal{S}$ relativement à $\mathcal{T}$. Sa formation est compatible avec tout changement de base étale.

Théorème (4.21). — Soit $\mathcal{S}$ un champ quasi-séparé au-dessus d'un schéma noethérien S . Supposons que

- (i) *l'application diagonale $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times_S \mathcal{S}$ soit représentable et non ramifiée ;*
- (ii) *il existe un schéma X de type fini sur S et un S -morphisme lisse et surjectif de X vers $\mathcal{S}$.*

Alors $\mathcal{S}$ est un champ algébrique de type fini sur S .

M. Artin a développé des méthodes puissantes pour relier la pro-représentabilité d'un champ à l'existence de morphismes étales surjectifs $x : X \rightarrow \mathcal{S}$.

§ 5. Seconde preuve du théorème d'irréductibilité.

Soit $\mathcal{M}_g$ ($g \geq 2$) le champ dont la catégorie des sections au-dessus d'un schéma S est la catégorie des courbes stables de genre g au-dessus de S , les morphismes étant les isomorphismes de schémas au-dessus de S . D'après (1.11), le morphisme diagonal

$$\Delta : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g$$

est représentable, fini et non ramifié.

Nous avons vu au § 1 que le champ classifiant les courbes stables tricanoniquement plongées de genre g est représenté par un schéma H_g , lisse et de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Le morphisme « d'oubli »

$$H_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

est représentable, lisse et surjectif. En effet, si $p : C \rightarrow S$ est une courbe stable au-dessus de S , définissant un morphisme

$$\gamma : S \longrightarrow \mathcal{M}_g,$$

alors le produit fibré $H_g \times_{\mathcal{M}_g} S$ est le schéma, lisse sur S , des isomorphismes entre l'espace projectif standard de dimension $5g - 6$ sur S et $\mathbf{P}(p_*(\omega_{C/S}^{\otimes 3}))$. On en déduit, avec (4.21), que :

Proposition (5.1). — $\mathcal{M}_g$ est un champ algébrique séparé de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Désignons par $\mathcal{M}_g^0$ l'ouvert de $\mathcal{M}_g$ qui « consiste en » les courbes lisses, et par $\mathcal{Z}_g$ la « courbe universelle » au-dessus de $\mathcal{M}_g$, c'est-à-dire le champ algébrique classifiant les courbes stables pointées.

Théorème (5.2). — Les champs algébriques $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{Z}_g$ sont propres et lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, et le complément de $\mathcal{M}_g^0$ dans $\mathcal{M}_g$ est un diviseur à croisements normaux relativement à $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. — Soit $x : X \rightarrow \mathcal{M}_g$ étale et considérons le diagramme commutatif suivant de champs algébriques de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{ccccc} X \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{Z}_g & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Z}_g & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ X \times_{\mathcal{M}_g} H_g & \xrightarrow{x'} & H_g & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{Z}_g & \xrightarrow{q'} & \mathcal{Z}_g & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow p & & \\ X & \xrightarrow{x} & \mathcal{M}_g & & \end{array}$$

Dans ce diagramme, les quatre flèches horizontales sont étales et les quatre flèches verticales sont lisses et surjectives. Comme H_g et $\mathcal{Z}_g$ (p. 78) sont lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, il en est de même de X et de $X \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{Z}_g$. De plus,

$$q'^{-1}x^{-1}(\mathcal{M}_g^0) = x'^{-1}(H_g^0)$$

est le complément d'un diviseur à croisements normaux relativement à $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de sorte que l'inclusion de $x^{-1}(\mathcal{M}_g^0)$ dans X a la même propriété. Ceci étant vrai pour tout x , $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{Z}_g$ sont lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{M}_g^0$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux relativement à $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. En particulier $\mathcal{M}_g^0$ est dense dans $\mathcal{M}_g$.

Nous pouvons maintenant utiliser le critère valuatif de propreté sous sa forme modifiée (4.19) pour déduire la propreté de $\mathcal{M}_g$ du théorème de réduction stable. La propreté de $\mathcal{Z}_g$ résulte alors de celle de p .

(5.3) Soit $p : X \rightarrow S$ une courbe stable lisse de genre $g \geq 2$ sur S . Si $k \in \mathbb{N}$ est inversible dans $\mathcal{O}_S$, le faisceau $R^1p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ sur S_{et} est localement libre sur $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, de rang $2g$, et le cup-produit est une forme alternée non dégénérée

$$R^1p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \otimes R^1p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \simeq \mu_k^{\otimes -1}.$$

Localement sur S_{et} , μ_k est isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, et donc, localement, $R^1p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ est muni d'une forme symplectique non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, déterminée à une unité de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ près ; autrement dit, $R^1p_*(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ est muni d'une structure symplectique homogène. Le faisceau constant $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{2g}$ sera muni de la structure symplectique homogène induite par la structure symplectique standard de $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{2g}$.

Définition (5.4). — Une structure de Jacobi de niveau k sur X est un isomorphisme (respectant les structures symplectiques homogènes) entre $R^1p_(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{2g}$.*

(5.5) Étant donnés une section s de p et un ensemble de nombres premiers $\mathbf{P}$ contenant toutes les caractéristiques résiduelles de S , le théorème de spécialisation pour le groupe fondamental permet de construire un pro-objet $\pi_1(X/S, s)^{(\mathbf{P})}$ de la catégorie (l.c. $\text{gr}^{(\mathbf{P})}$) des faisceaux localement constants de groupes finis d'ordre premier à $\mathbf{P}$, ayant les propriétés suivantes :

- (i) $\text{Hom}_S(\pi_1(X/S, s)^{(\mathbf{P})}, G) = R^1p_*(X \bmod s, p^*G) = R^1p_*(\text{Ker}(p^*G \rightarrow s_*G))$ fonctoriellement en $G \in (\text{l.c. } \text{gr}^{(\mathbf{P})})$;
- (ii) la formation de $\pi_1(X/S, s)^{(\mathbf{P})}$ est compatible avec tout changement de base.

Si G et H sont deux faisceaux de groupes sur $S_{\text{ét}}$, nous définissons le faisceau des morphismes extérieurs de H vers G , $\text{Hom}^{\text{ext}}(H, G)$, comme le quotient de $\text{Hom}(H, G)$ par l'action de H induite par son action sur lui-même par automorphismes intérieurs.

Le faisceau

$$\text{Hom}_S^{\text{ext}}(\pi_1(X/S, s)^{(\mathbf{P})}, G) \simeq R^1p_*(p^*G) \quad (\text{pour } G \in (\text{l.c. } \text{gr}^{(\mathbf{P})}))$$

est « indépendant » du choix de s .

Nous le noterons

$$\text{Hom}_S^{\text{ext}}(\pi_1(X/S)^{(\mathbf{P})}, G).$$

Comme $p : X \rightarrow S$ admet localement des sections pour la topologie étale, ce faisceau a un sens sans supposer que p possède une section globale. Il est indépendant du choix de $\mathbf{P}$, tant que $\mathbf{P}$ est premier à l'ordre de G et contient toutes les caractéristiques résiduelles de S .

Définition (5.6). — Soit G un groupe fini d'ordre n premier à $\mathbf{P}$. Une structure de Teichmüller de niveau G sur X est un homomorphisme extérieur surjectif de $\pi_1(X/S)$ vers G .

La génération finie de $\pi_1(X/S)$ (SGA, 60/61, exp. 10) implique :

Lemme (5.7). — Le faisceau sur (Sch/S) des structures de Teichmüller de niveau G sur X est représenté par un revêtement étale de S .

Nous désignons par ${}_G\mathcal{M}_g^0$ le champ qui classe les courbes stables lisses de genre g et de caractéristique première à n , avec une structure de Teichmüller de niveau G .

Pour tout champ algébrique $\mathcal{M}$, nous notons $\mathcal{M}[1/n]$ son ouvert $\mathcal{M} \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$.

Le lemme (5.7) se reformule alors ainsi :

Proposition (5.8). — Le morphisme « d'oubli »

$${}_G\mathcal{M}_g^0 \longrightarrow \mathcal{M}_g^0[1/n]$$

est représentable, fini et étale.

Le champ ${}_G\mathcal{M}_g^0$ est donc un champ algébrique. Soit ${}_G\mathcal{M}_g$ la normalisation de $\mathcal{M}_g[1/n]$ relativement à ${}_G\mathcal{M}_g^0$. Le champ ${}_G\mathcal{M}_g$, étant représentable et fini au-dessus de $\mathcal{M}_g[1/n]$, est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$.

Théorème (5.9). — Les fibres géométriques de la projection de ${}_G\mathcal{M}_g$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ sont normales, et, fibre par fibre, ${}_G\mathcal{M}_g^0$ est dense dans ${}_G\mathcal{M}_g$.

Démonstration. — Nous utiliserons le lemme d'Abhyankar–Artin, sous sa forme « absolue » :

Lemme (5.10). — Soient D un diviseur à croisements normaux sur un schéma régulier excellent X , Y un revêtement étale de $X - D$ et $\bar{Y}$ la normalisation de X relativement à Y . Supposons que les points génériques des composantes irréductibles de D soient tous de caractéristique 0. Alors tout point géométrique de X possède un voisinage étale $x : X' \rightarrow X$ tel que, sur X' :

- (i) D devienne une réunion de diviseurs réguliers $(D_i)_{i \in I}$, D_i étant d'équation $t_i = 0$.
- (ii) Il existe un entier k premier aux caractéristiques résiduelles de X' tel que $\bar{Y}$ devienne isomorphe à une réunion disjointe de quotients (par des sous-groupes de μ_k^I) du revêtement de X' obtenu en extrayant les racines k -ièmes des t_i .

Si $x : X \rightarrow \mathcal{M}_g[1/n]$ est un morphisme étale, alors $X^0 = x^{-1}(\mathcal{M}_g^0)$ est le complément dans X d'un diviseur à croisements normaux relativement à $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, $X_1^0 = X \times_{\mathcal{M}_g} ({}_G\mathcal{M}_g^0)$ est un revêtement étale de X^0 , et $X_1 = X \times_{\mathcal{M}_g} ({}_G\mathcal{M}_g)$ est la normalisation de X relativement à ce revêtement de X^0 .

Note sur la source. La formule imprimée porte $X_1 = S \times_{\mathcal{M}_g} ({}_G\mathcal{M}_g)$; comme le morphisme considéré est $x : X \rightarrow \mathcal{M}_g[1/n]$ et que X_1 est son changement de base, le facteur requis X est conservé ci-dessus.

Par la description locale explicite (5.10), pour tout nombre premier l premier à n , $X_1 \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$ est la normalisation de $X \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$ relativement à $X_1^0 \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$. Comme ceci est vrai pour toute famille modulaire, on obtient (5.9).

Corollaire (5.11). — *Les fibres géométriques de la projection*

$${}_G\mathcal{M}_g \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$$

ont toutes le même nombre de composantes connexes.

Démonstration. — D’après (4.17), toutes les fibres géométriques $\mathcal{M}_g \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$ de $\mathcal{M}_g$ au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ ont le même nombre de composantes connexes. Ces composantes connexes sont irréductibles (4.16). De plus, ${}_G\mathcal{M}_g^0 \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$ est dense dans ${}_G\mathcal{M}_g \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$ et a donc le même nombre de composantes connexes (ou irréductibles) que ${}_G\mathcal{M}_g \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_l)$, et ce nombre est indépendant de l .

(5.12) Désignons par Π le groupe fondamental d’une surface différentiable fermée orientée S_0 de genre g . Le groupe Π peut être défini par générateurs et relations comme suit :

- (i) générateurs : x_i pour $1 \leq i \leq 2g$;
- (ii) relation : $(x_1, x_{g+1}) \cdots (x_i, x_{g+i}) \cdots (x_g, x_{2g}) = e$, où $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$.

Soit (e_i) la base standard de $\mathbb{Z}^{2g}$. Le morphisme φ de Π vers $\mathbb{Z}^{2g}$ défini par $\varphi(x_i) = e_i$ identifie $\Pi/(\Pi, \Pi) = H_1(\Pi, \mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}^{2g}$.

Note sur la source. La formule imprimée porte $\varphi(X_i) = e_i$ avec un X_i majuscule; les générateurs définis juste au-dessus sont les x_i , notation conservée ici.

La surface S_0 est un $K(\Pi, 1)$, et donc

$$H^2(\Pi, \mathbb{Z}) = H^2(S_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

et le cup-produit définit une structure symplectique sur $\Pi/(\Pi, \Pi)$. Cette structure est identifiée par φ à la structure symplectique standard de $\mathbb{Z}^{2g}$.

Nous notons $\text{Aut}^0(\Pi)$ le sous-groupe de $\text{Aut}(\Pi)$ qui agit trivialement sur $H^2(\Pi, \mathbb{Z})$. Dehn a démontré que tout automorphisme extérieur de Π est induit par un difféomorphisme de S_0 sur elle-même et que l’application induite par φ :

$$\text{Aut}^0(\Pi) \longrightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}),$$

est surjective (voir [Ma]).

Théorème (5.13). — *Le nombre de composantes connexes de toute fibre géométrique de la projection de ${}_G\mathcal{M}_g^0$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ est égal au nombre d’orbites de $\text{Aut}^0(\Pi)$ dans l’ensemble des épimorphismes extérieurs de Π vers G .*

Démonstration. — D’après (5.11), il suffit de montrer que ${}_G\mathcal{M}_g^0 \times \text{Spec}(\mathbb{C})$ a le nombre annoncé de composantes connexes. D’après (4.14),

$$\pi_0({}_G\mathcal{M}_g^0 \times \text{Spec}(\mathbb{C})) = \pi_0({}_G\mathcal{M}_g),$$

où ${}_G\mathcal{M}_g$ est le schéma de modules grossier classifiant les courbes lisses stables de genre g sur $\mathbb{C}$ munies d’une structure de Teichmüller de niveau G .

Note sur la source. La démonstration imprimée commence par “By (5.13)”, auto-référence au théorème en cours de démonstration; le corollaire (5.11) est le résultat qui ramène l’énoncé à une fibre géométrique, et c’est lui qui est cité ci-dessus. La tournure imprimée “As results from (4.14)” est corrigée en anglais en “As follows from (4.14)”.

Rappelons qu’une courbe de Teichmüller de genre g est une courbe lisse stable C de genre g sur $\mathbb{C}$, munie d’un isomorphisme extérieur φ du groupe fondamental transcendant $\pi_1(C)$ avec Π , qui induit un isomorphisme symplectique⁶ entre

$$H_1(C, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(C)/(\pi_1(C), \pi_1(C))$$

et $\Pi/(\Pi, \Pi)$. D’après la théorie de Teichmüller [W], l’espace analytique T_g qui classifie les courbes de Teichmüller d’un genre donné $g \geq 2$ est homéomorphe à une boule, et donc connexe.

6. Un isomorphisme arbitraire φ induit un isomorphisme entre $H_1(C, \mathbb{Z})$ et $\Pi/(\Pi, \Pi)$ qui est toujours symplectique au signe près.

Si ψ est un homomorphisme surjectif de Π vers G , l'application

$$(C, \varphi) \mapsto (C, \psi\varphi)$$

définit un morphisme $t_\psi : T_g \rightarrow {}_G M_g$. Deux telles applications t_ψ et $t_{\psi'}$ ont la même image si et seulement si $\psi = \psi'\sigma$ pour $\sigma \in \text{Aut}^0(\Pi)$, et

$${}_G M_g = \coprod_{\psi \bmod \text{Aut}^0(\Pi)} t_\psi(T_g),$$

ce qui implique (5.13).

(5.14) Désignons par ${}_n \mathcal{M}_g^0$ le champ algébrique classifiant les courbes lisses stables munies d'une structure de Jacobi de niveau n . Ce champ algébrique « est » un vrai schéma pour $n \geq 3$ (d'après [S]).

Si φ est une structure de Jacobi de niveau n sur une courbe lisse stable $p : X \rightarrow S$, nous définissons le « multiplicateur » $\mu(\varphi)$ de φ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \downarrow \Lambda^2 \varphi & & \downarrow \mu(\varphi) \\ \Lambda^2 R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad \Lambda \quad} & \mu_n^{\otimes -1} \simeq R^2 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{array}$$

Le schéma des isomorphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mu_n^{\otimes -1}$ est $\text{Spec}(\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}, 1/n])$; ainsi $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ définit un morphisme μ de S vers $\text{Spec}(\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}, 1/n])$. Ceci étant vrai pour tout X et tout S , μ est induit par

$$\mu : {}_n \mathcal{M}_g^0 \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}, 1/n]).$$

Théorème (5.15). — Les fibres géométriques du morphisme μ sont connexes.

Démonstration. — Par définition, ${}_n \mathcal{M}_g^0$ est ouvert et fermé dans ${}_G \mathcal{M}_g^0$ pour $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Le groupe $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ agit sur G , et donc sur ${}_G \mathcal{M}_g^0$. On a :

- (i) l'ouvert ${}_n \mathcal{M}_g^0$ de ${}_G \mathcal{M}_g^0$ est stable sous le sous-groupe $H = \text{CSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des similitudes symplectiques ;
- (ii) ${}_G \mathcal{M}_g^0 = \coprod_{\sigma \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H} \sigma({}_n \mathcal{M}_g^0)$.

Note sur la source. Le coproduit imprimé est indexé par G/H , alors que $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ et que H vient d'être défini comme un sous-groupe de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. L'espace de classes du groupe agissant requis est écrit explicitement ci-dessus.

Il résulte maintenant de (5.11) que toutes les fibres géométriques de μ ont le même nombre de composantes connexes.

Note sur la source. La tournure anglaise imprimée “It now results from (5.11)” est corrigée dans l'édition anglaise en “It now follows from (5.11)”.

Considérons la fibre géométrique de μ au-dessus de la place complexe standard de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}, 1/n])$. Cette fibre est le champ algébrique classifiant les courbes lisses stables complexes C munies d'un isomorphisme symplectique

$$H^1(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

En raisonnant comme en (5.13), nous sommes ramenés à démontrer

Lemme (5.16). — L'homomorphisme

$$\text{Aut}^0(\Pi) \longrightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est surjectif.

Démonstration. — Cela découle de la théorie de Dehn (5.12) et du fait que les groupes Sp_{2g} , étant des groupes semi-simples simplement connexes déployés, sont engendrés par leurs éléments unipotents, de sorte que l'application de réduction

$$\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est surjective.

Note sur la source. La démonstration imprimée porte “This results from Dehn's theory” et nomme les groupes Sp_n . La tournure est rendue par « Cela découle », et le groupe est rétabli en Sp_{2g} , comme l'imposent à la fois le lemme et l'application de réduction affichée.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ab] S. Abhyankar, Resolution of singularities of arithmetical surfaces, *Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at Purdue*, 1963.
- [A₁] M. Artin, The implicit function theorem in algebraic geometry, *Proc. Colloq. Alg. Geom.*, Bombay, 1968.
- [A₂] M. Artin, Some numerical criteria for contractibility, *Am. J. Math.*, 84 (1962), p. 485.
- [B] J. Bénabou, Thèse, Paris, 1966.
- [E] F. Enriques and Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, 1918.
- [F] W. Fulton, Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Ann. of Math.* (forthcoming).
- [G] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, University of Columbia.
- [Gr] A. Grothendieck, Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV, *Sém. Bourbaki*, 221, 1960–1961.
- [H] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Springer Lecture Notes, 20, 1966.
- [K] D. Knutson, Algebraic spaces, Thesis, M.I.T., 1968.
- [Li] J. Lipman, Rational singularities, *Publ. Math. I.H.E.S.*, no. 36 (1969).
- [L] M. Lichtenbaum, Curves over discrete valuation rings, *Am. J. Math.*, 90 (1968), p. 380.
- [Ma] W. Mangler, Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich, *Math. Zeit.*, 44 (1939), p. 541.
Note sur la source. La bibliographie imprimée porte “W. Manger” ; le titre, la revue, le volume, l’année et la page cités identifient Wilhelm Mangler, dont le nom est rétabli ci-dessus.
- [M₁] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1965.
- [M₂] D. Mumford, Notes on seminar on moduli problems, Supplementary mimeographed notes printed at A.M.S. Woods Hole Summer Institute, 1964.
- [M₃] D. Mumford, Picard groups of moduli problems, *Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at Purdue*, 1963.
- [N] A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Math. I.H.E.S.*, no. 21.
- [R] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, *Comptes rendus Acad. Sci.*, 264, p. 941 and p. 1001.
- [Š] I. Šafarevich, Lectures on minimal models, Tata Institute Lecture Notes, Bombay, 1966.
- [Sc] M. Schlessinger, Thesis, Harvard.
- [S] J.-P. Serre, Rigidité du foncteur de Jacobi d’échelon $n \geq 3$, app. à l’exposé 17 du séminaire Cartan 60/61.
- [Se] F. Severi and Löffler, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, 1924.
- [W] A. Weil, Modules des surfaces de Riemann, *Sém. Bourbaki*, 168, 1957–58.

Manuscrit reçu le 21 janvier 1969.