

SULLA RIDUZIONE
DEI SISTEMI LINEARI DI CURVE ELLITTICHE
E SOPRA UN TEOREMA GENERALE
DELLE CURVE ALGEBRICHE DI GENERE p . (*)

Per G. B. GUCCIA

(Seduta del 17 febbrajo 1887)

1. Un sistema lineare di curve algebriche piane è definito da tre numeri che rivestono il carattere *invarianti* per qualsiasi trasformazione birazionale del piano, cioè :

p , il genere del sistema, ossia il genere delle curve del sistema;

D , il numero delle intersezioni mobili di due curve qualunque del sistema;

k , le dimensioni del sistema, ossia il numero dei parametri arbitrari da cui dipendono, linearmente, i coefficienti della curva generica del sistema.

Per ogni singolo valore di p , il problema della riduzione dei sistemi lineari consiste: nell'indicare tutt' i sistemi d'ORDINE MINIMO, cui è possibile di pervenire mediante trasformazioni birazionali del piano (in particolare trasformazioni quadratiche), per ognuno dei quali l'ordine non è suscettibile di essere abbassato da alcuna ulteriore trasformazione univoca.

Nella precedente ricerca (Gz) abbiamo dimostrato, per $p = 0$, che i sistemi lineari di curve razionali ammettono i seguenti sistemi d'ordine minimo :

[A]. Un sistema dell'ordine $\frac{1}{2}(D + 2)$, dotato d' un punto base ordinario di grado $\frac{1}{2}D$ e d' un punto base semplice a distanza finita ($k \geq D + 1$).

(*) La presente Nota fa seguito alla Memoria : « Generalizzazione di un teorema di Nöther » pubblicata in questi Rendiconti (Vol. I, p. 139-156). Mi si permetta quindi di supporre nel lettore la conoscenza di detto lavoro, che indicherò col simbolo (Gz) a fine di facilitarne i frequenti richiami.

[B]. Un sistema dell'ordine $\frac{1}{2}(D + s + 1)$ ($0 \leq s \leq D - 1$), dotato d'un punto base di grado $\frac{1}{2}(D + s - 1)$ con s tangenti fisse (distinte o coincidenti) comuni a tutte le curve ($k \geq D + 1$).

[C]. Un sistema di coniche senza punti comuni ($D = 4, k \leq 5$).

[D]. La rete delle rette del piano ($D = 1, k = 2$).

Supposto poi, che nel sistema primitivo le curve non fossero vincolate da alcun'altra condizione tranne quelle assorbite dai punti base, abbiamo tratto il teorema :

$$k = D + 1 \quad (1)$$

per qualunque sistema lineare di genere zero determinato dai punti base; e quindi il teorema generale :

$$k = D - p + 1 \quad (*) \quad (2)$$

relativo a qualunque sistema lineare di genere p , determinato dai punti base, e tale che in esso sia contenuto uno (almeno) sistema lineare di genere zero.

Nella presente Nota, adoperando gli stessi metodi, mi propongo di trattare il problema della riduzione per il caso $p = 1$.

Mostrerò poi come il teorema (2) comprenda anche i sistemi lineari, determinati dai punti base, i quali contengano uno (almeno) sistema lineare di curve ellittiche in cui $k > 1$.

In ordine alla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche farò anzitutto notare, che il caso $k = 1$ è stato già trattato dal prof. Bertini (**), il quale ha dimostrato che: *Un fascio di curve di genere uno è deducibile per trasformazioni quadratiche da un fascio di curve di ordine $3m$ con nove punti base multipli secondo lo stesso numero m .* (***)

(*) Questo teorema fu da me enunciato, per la prima volta, nei *Comptes Rendus*, t. CIII, p. 594.

(**) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, n° 3 e 9 (*Annali di Matematica*, VIII,).

(***) Le curve d'ordine $3m$ con 9 punti m -pli sono state ampiamente studiate dal signor Halphen nella Memoria: *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf*

2. Supponiamo, da prima, che il sistema lineare $[S]$, di genere uno, sia dotato di v punti base ordinari, dati comunque, dei gradi r_1, r_2, \dots, r_v , dove $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_v$.

Si avranno allora le relazioni:

$$\sum_i r_i (r_i - 1) = (n - 1)(n - 2) - 2 \quad (3)$$

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - D, \quad (4)$$

d'onde

$$\sum_i r_i = 3n - D. \quad (5)$$

Ciò posto, per dimostrare il teorema: $r_1 + r_2 + r_3 > n$ per $v \geq 3$, basta adoperare il procedimento del n.º 3 (Gz). (*)

Dalle (4) e (5) si ottiene:

$$r_3 \sum_4^v r_i - \sum_4^v r_i^2 = n(3r_3 - n) - D(r_3 - 1) - r_3(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2.$$

points doubles (Bulletin de la Société Mathématique de France. t. X, p. 162). Se i 9 punti sono dati ad arbitrio, per $m > 1$ la curva non esiste. Ma se per essi ne passa una, allora ne passano infinite, formanti un fascio, ed i 9 punti giacciono sopra una, ed una sola, curva del 3.º ordine. È notevole, inoltre, il seguente risultato cui perviene l'illustre Autore, col sussidio delle funzioni ellittiche:

Dati 8 punti m-plici d'una curva d'ordine $3m$ che deve avere un nono punto m-plo, il luogo di questo nono punto è una curva dell'ordine $3\psi(m)$, per la quale ciascuno degli 8 punti dati è multiplo secondo $\psi(m)$; dove

$$\psi(m) = m^2 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \dots$$

essendo p, q, r, \dots i fattori primi del numero m .

Di più: Fra le curve d'ordine $3m$ dotate degli stessi nove punti multipli di grado m , ve ne sono 12 che hanno, inoltre, un punto doppio.

Quest'ultimo teorema è, invero, compreso in un altro, più generale, di cui mi limito a dare l'enunciato:

Un fascio di genere p con v punti base (multipli o semplici) ordinari, ammette $v + 4p - 1$ punti doppi, all'infuori dei punti base.

(*) Veggasi: Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, p. 488.

In questa equazione il primo membro è positivo e nullo unicamente per $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_v$. Si ha dunque

$$n(3r_1 - n) - D(r_1 - 1) - r_1(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2 \geq 0. \quad (6)$$

Supposto ora $n \geq r_1 + r_2 + r_3$, e sostituendo, si ha l'ineguaglianza

$$2(r_1^2 - r_1 r_2) + D - r_1 D \geq 0,$$

la quale, essendo $r_1, r_2 \geq r_1^2$, è manifestamente assurda, eccetto che non si abbia:

$$1^\circ. r_1 = r_2 = r_3 = 1, \quad 2^\circ. D = 0, \quad r_1 = r_2 = r_3$$

Ne segue quindi che all'infuori di questi due casi si ha sempre $r_1 + r_2 + r_3 > n$.

1°. Se $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, si ha evidentemente un sistema lineare di curve ellittiche del 3° ordine con $v \geq 3$ punti base semplici.

2° Sia $D = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = m$. Si ha allora dalla (6)

$$n(3m - n) \geq 0$$

ossia

$$3m \geq n,$$

in cui è $3m = n$ unicamente per $m = r_1 = r_2 = \dots = r_v$. Or in quest'ultimo caso, in virtù della (5), si ha

$$v m = 9m,$$

d'onde

$$v = 9.$$

Se ne conclude, che: *ove in un fascio di curve ellittiche non si abbia $r_1 + r_2 + r_3 > n$, il fascio è necessariamente costituito da curve dell'ordine $3m$ con 9 punti base m -pli.*

Possiamo adunque enunciare il seguente teorema:

TEOREMA I. — *Eccetto il caso di un fascio d'ordine $3m$ con 9 punti base m -pli, in ogni altro sistema lineare di curve ellittiche d'ordine $n > 3$ con $v \geq 3$ punti base ordinari, dati comunque, la somma delle molteplicità dei tre punti basi più elevati è maggiore dell'ordine del sistema. Si ha cioè:*

$$r_1 + r_2 + r_3 > n \quad (7)$$

d'onde

$$r_1 + 2r_2 > n, \quad (8)$$

$$3r_1 > n. \quad (9)$$

3. Segue immediatamente dal teorema precedente, che in ogni sistema lineare di curve ellittiche con punti base ordinari, dati comunque, in cui $n > 3$, $v \geq 3$, si ha

$$D \leq 2n - 1. \quad (10)$$

Infatti, supposto $D > 2n - 1$, in virtù della (5) si avrebbe

$$\sum_i r_i < n + 1$$

il che è assurdo, giacchè $r_1 + r_2 + r_3 > n$.

4. Volendo ora dimostrare, per $n > 3$, $v \geq 3$, il teorema:

$$r_1 < r_2 + r_3 + \dots + r_v, \quad (11)$$

basta ripetere il nostro procedimento del n° 6 (Gz). Si ha allora ($k = 2, 3, \dots, v$):

$$n \cdot \sum_k r_k \geq r_1 \cdot \sum_k r_k + \sum_k r_k^2,$$

ossia

$$(n - r_1) \cdot \sum_k r_k \geq \sum_k r_k^2.$$

E per la relazione (4) :

$$(n - r_1) \cdot \sum_k r_k \geq n^2 - D - r_1^2.$$

Or siccome (10) $D \geq 2n - 1$, ne segue che

$$(n - r_1) \cdot \sum_k r_k \geq n^2 - 2n + 1 - r_1^2.$$

Supposto ora che il teorema non sia vero e che si abbia invece $\sum_k r_k \leq r_1$, sostituendo si otterrebbe :

$$n r_1 \geq n(n - 2) + 1;$$

il che è assurdo, eccetto il caso $r_1 = n - 1$: soluzione da escludersi per le curve di genere uno. Onde :

TEOREMA II. — *In ogni sistema lineare di curve ellittiche d'ordine $n > 3$ e dotato di $\nu \geq 3$ punti base ordinari, dati comunque, la molteplicità del punto base più elevato è sempre minore della somma delle molteplicità dei rimanenti punti base.*

5. Passiamo ora alla riduzione del sistema $[S]$.

Supponiamo, da prima, che i ν punti base ordinari abbiano posizioni arbitrarie, affatto indipendenti fra di loro. In tal caso, applicando successivamente delle trasformazioni quadratiche i cui punti fondamentali coincidano coi tre punti base più elevati, in virtù del Teorema I, dopo un numero finito a di siffatte trasformazioni, se $k > 1$, si perverrà necessariamente ad un sistema $[S_a]$, tale che il suo ordine è $= 3$, ovvero tale che il numero dei suoi punti base è < 3 . Ne segue che il sistema $[S_a]$, d'ordine minimo, sarà, evidentemente :

1° un sistema lineare di curve ellittiche del terz'ordine con $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ punti base semplici a distanza finita, ovvero:

2° un sistema lineare di curve ellittiche del quart'ordine con due punti base doppi a distanza finita.

Se $k = 1$ il processo della riduzione condurrà necessariamente ad un fascio d'ordine $3m$ con 9 punti base m -pli ($m \geq 1$).

6. Nell'ipotesi che i punti base del sistema $[S]$, tutti, o in parte, siano vincolati da legami geometrici determinati da curve, valgono identicamente le considerazioni da noi fatte nel n° 7 (Gz), alle quali rimandiamo il lettore.

7. Supponiamo finalmente che il sistema $[S]$ abbia dei punti base superiori. Questo potrà allora considerarsi come il caso limite d'un sistema i cui punti base ordinari divengano infinitamente vicini [vedi (Gz), nota della p. 139]. Onde in tale ipotesi sussisteranno tuttavia i Teoremi I e II.

Analogamente a ciò che abbiám praticato nel n° 8 (Gz), prenderemo in esame il solo caso in cui non riesce possibile l'applicare una trasformazione quadratica i cui punti fondamentali coincidano coi punti base più elevati. E però supporremo che al punto base j -plo, della più elevata molteplicità, siansi avvicinati, infinitamente, in diverse direzioni, m punti base dei gradi i_1, i_2, \dots, i_m ($j \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m$), per guisa che j, i_1, i_2 rappresentino le tre molteplicità più elevate del sistema. Sarà allora

$$j \geq \sum_k i_k;$$

da cui discende, pel Teorema II, la necessità che il sistema possenga altri punti base (uno almeno). I quali possono suppersi: 1° a distanza finita dal punto j -plo, ovvero, 2° tutti, o in parte, infinitamente vicini al punto j -plo sugli m i_k -pli rami di questo punto. Questi ultimi punti base li supporremo dei gradi h_1, h_2, \dots , per guisa che

$$i_1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots (*)$$

(*) A scanso di equivoci facciamo notare, che, in ordine alla riduzione dei sistemi lineari, il procedimento che segue, dovuto al Noether, può soltanto applicarsi con rigore, ove si pervenga prima a dimostrare [come abbiám fatto noi per $p = 0$ e $p = 1$, coll'ajuto dei teoremi IV (Gz) e II della presente ricerca], che uno (almeno) dei punti base h -pli debba necessariamente esistere nel sistema. Di questa osservazione non è tenuto alcun conto nella menzionata Memoria del prof. Bertini, n° 9.

A. Sia $j < n - 2$. Si può ora dimostrare col procedimento del Nöther, da noi adoperato nel n° 8 (Gz), il teorema :

$$j + 2h_1 > n. \quad (12)$$

Supponiamo che il teorema non sia vero e che si abbia invece $j + 2h_1 \leq n$. Poniamo

$$i_k^2 = s_k \cdot i_1^2, \quad h_v^2 = \sigma_v \cdot \left(\frac{n-j}{2}\right)^2,$$

in cui $s_k \leq 1$, $\sigma_v \leq 1$. Segue allora

$$i_k \geq s_k \cdot i_1, \quad h_v \geq \sigma_v \cdot \frac{n-j}{2}.$$

Ciò posto, dalle (4) e (5) si ricava

$$n^2 - D = j^2 + i_1^2 \cdot \sum s_k + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \cdot \sum \sigma_v,$$

$$3n - D \geq j + i_1 \cdot \sum s_k + \frac{n-j}{2} \cdot \sum \sigma_v,$$

dalle quali eliminando $\sum \sigma_v$:

$$D \geq \frac{n-j}{2} (3j - n + D) - \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) i_1 \sum s_k.$$

Or siccome (8) $i_1 - \frac{n-j}{2} > 0$, e d'altra parte

$$j \geq \sum i_k \geq i_1 \sum s_k,$$

ne segue che nella precedente ineguaglianza si può rimpiazzare $i_1 \sum s_k$ con j . Si ottiene allora :

$$D \geq \frac{n-j}{2} (2j - n + D) + j(n - j - i_1),$$

il che è assurdo. Infatti, mentre si ha

$$n - j - i_1 \geq 0;$$

d'altra parte, essendo $j + i_1 + i_2 > n$ ed $i_1 + i_2 \leq j$:

$$2j > n;$$

ed essendo, per l'attuale ipotesi, $j < n - 2$:

$$\frac{n-j}{2} D > D.$$

Sarà dunque $j + 2h_1 > n$. C. V. D.

Risulta immediatamente da questo teorema che:

1° Se il punto h_1 -plo trovasi a distanza finita dal punto j -plo, sarà $j + i_1 + h_1 > n$. D'onde $2n - (j + i_1 + h_1) < n$.

2° Se il punto h_1 -plo trovasi infinitamente vicino al punto j -plo (in tal caso, necessariamente, sugli i_k remi d' un punto i_k -plo, onde $i_k \geq h_1$), sarà $j + i_k + h_1 > n$ (il che esclude, nel tempo istesso, che detti tre punti j -plo, i_k -plo, h_1 -plo possano trovarsi in linea retta). D'onde $2n - (j + i_k + h_1) < n$.

Ne segue quindi, che, nell' un caso e nell' altro, è sempre possibile di applicare una trasformazione quadratica che abbassi l'ordine del sistema. Si perverrà dunque, necessariamente, ad uno dei sistemi d'ordine minimo indicati nel n° 5, dove s'intenda che i punti base possano risultare infinitamente vicini.

B. Sia $j = n - 2$. In tal caso il sistema possederà necessariamente $n - 3$ punti base doppi. Di questi, $s \leq \frac{n-2}{2}$ possono avvicinarsi infinitamente al punto $(n-2)$ -plo in diverse direzioni. Per $n > 4$ ne rimangono allora $n - 3 - s \geq 1$, uno dei quali potrà funzionare come il punto h_1 -plo più sopra considerato. Ond' è che, in questo caso, la riduzione è tuttavia attuabile come nel caso precedente.

Dalla discussione precedente segue, finalmente, il teorema:

TEOREMA III. — Qualunque sistema lineare di curve ellittiche è riducibile, per trasformazioni quadratiche, ad uno dei seguenti sistemi d'ordine minimo:

Per $k > 1$:

[E]. Un sistema lineare di curve ellittiche del terz'ordine con $v = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, punti base semplici, a distanza finita o infinitamente vicini.

[F] Un sistema lineare di curve ellittiche del quart' ordine con due punti base doppi, a distanza finita o infinitamente vicini.

Per $k = 1$, ossia $D = 0$:

[G]. Un fascio di curve dell'ordine $3m$ con nove punti base di grado m (Bertini, loco citato).

8. Ove si supponga che nel sistema $[S]$ le curve non soddisfino ad alcun'altra condizione tranne quelle assorbite dai punti base, il Teorema III conduce immediatamente alla seguente proposizione:

TEOREMA IV. — In qualunque sistema lineare di curve ellittiche, determinato dai punti base, per il quale $k > 1$, si ha

$$k = D \geq 9 \quad (*)$$

9. Se il sistema $[S]$ è d'ordine pari ed in esso i gradi dei punti base (a distanza finita o infinitamente vicini) sono tutti dei numeri pari, egli è allora evidente che il processo di riduzione non può mai condurre nè ad un sistema di ordine dispari, nè ad un punto base di grado dispari. Onde in tal caso sarà necessariamente $[F]$ il sistema d'ordine minimo. Si avrà però $k = D = 8$ se il sistema $[S]$ è supposto dato, unicamente, dai punti base. Cioè:

TEOREMA V. — Un sistema lineare di curve ellittiche, determinato dai punti base, per il quale l'ORDINE ed i GRADI DI MOLTIPLICITÀ dei punti base (a distanza finita o infinitamente vicini) sono tutti dei numeri PARI è 8-plamente infinito e tale che due curve qualunque s'incontrano in 8 punti mobili, variabili coi parametri del sistema.

(*) Per $k = 1$ si ha $D = 0$. Per $D = 1$ non esiste alcun sistema lineare di curve ellittiche, siccome era da prevedersi.

10. Il sistema qualunque $[S]$ sia completamente determinato dalle sue singolarità base $[\sigma_1], [\sigma_2], \dots, [\sigma_v]$, date (*), comunque, nei punti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_v$. Indichiamo con

C_i il numero delle condizioni semplici cui equivale per una curva algebrica generale, la condizione di possedere in un punto dato, la singolarità $[\sigma_i]$, data;

I_i il numero delle intersezioni, confuse in un punto σ_i , di due curve algebriche che hanno in comune la singolarità data $[\sigma_i]$;

E_i l'abbassamento del genere che la singolarità $[\sigma_i]$ produce se essa appartiene ad una curva algebrica.

Per un nostro teorema, dimostrato altrove (**), si ha allora :

$$C_i = I_i - E_i.$$

Ne segue che :

$$\sum C_i = \sum I_i - \sum E_i = n^2 - D - \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 \right] = \frac{n(n+3)}{2} - D;$$

d'onde

$$D = \frac{n(n+3)}{2} - \sum C_i.$$

Or siccome pel Teorema IV, supposto $k > 1$, si ha $D = k$; ne segue che, in detta ipotesi,

$$k = \frac{n(n+3)}{2} - \sum C_i;$$

(*) Intendiamo che una singolarità $[\sigma]$ è *data* ove sian dati in posizione tutti i punti multipli (e semplici) ordinari, infinitamente vicini e i punti di ramificazione che servono a comporla. Così, ad esempio, si dirà che una cuspidale è *data* quando oltre al punto doppio è dato bensì il punto di ramificazione, il quale in tal caso determina la direzione della tangente cuspidale.

In particolare la singolarità base $[\sigma]$ può essere un punto multiplo a tangenti distinte e variabili tutte, o in parte, coi parametri del sistema; ovvero l'insieme di punti base semplici consecutivi; etc.

(**) *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (Comptes Rendus, t. CIII, 4 octobre 1886)

il che esprime, evidentemente, che in un sistema lineare di curve ellittiche, per $k > 1$ le singolarità base non ammettono legami di tale natura da produrre diminuzione nel numero totale delle condizioni che si otterrebbe ove ognuna di esse fosse imposta per sè sola.

11. Sia $[T]$ un sistema lineare qualunque, definito dai numeri invariantivi p, k, D e completamente determinato dalle singolarità base $[\sigma_1], [\sigma_2], \dots, [\sigma_v]$. Supponiamo, inoltre, che il sistema $[T]$ contenga un sistema lineare $[T']$, di genere uno, ad un numero k' di dimensioni, dove $1 < k' < k$. Per ciò che abbiám fatto osservare nel n° precedente, le singolarità base del sistema $[T']$, non ammetteranno alcun legame che arrechi diminuzione nella somma delle condizioni espresse da ognuna di esse presa per sè sola. Ne segue allora, *a fortiori*, che lo stesso avverrà per le singolarità base del sistema $[T]$. Onde, definiti i numeri C_i, I_i, E_i come al n° precedente, si avrà:

$$\begin{aligned} k &= \frac{n(n+3)}{2} - \sum C_i = \frac{n(n+3)}{2} - \left[\sum I_i - \sum E_i \right] \\ &= \frac{n(n+3)}{2} - \left[n^2 - D - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p \right) \right] = D - p + 1. \end{aligned}$$

Perveniamo, adunque, al seguente teorema:

TEOREMA VI. — *Se un sistema lineare, determinato dai punti base, contiene un sistema lineare di curve ellittiche di dimensioni > 1 , fra i numeri k, p, D , che definiscono il sistema, esiste la relazione:*

$$k + p - D - 1 = 0. (*)$$

(*) In questo teorema la proprietà già enunciata nei *Comptes Rendus* (l. c.) e nei teoremi IX e X (Gz), è estesa, come vedesi, ad un più gran numero di sistemi lineari di genere p . Ma neanche qui è dimostrato che la restrizione da noi imposta sia necessaria. Sarebbe quindi desiderabile che si 'possa pervenire ben presto ad enunciare il teorema nella sua forma definitiva.

*
**

12. Dal teorema precedente discendono importanti corollari in ordine alla teoria dei sistemi di punti d' intersezione delle curve algebriche e alla geometria sopra una curva algebrica.

Ci riserbiamo di trattare partitamente siffatte questioni in una prossima pubblicazione. Pur nondimeno reputiamo utile di enunciare in proposito, fin da ora, alcune proposizioni fondamentali, le quali si possono riguardare come estensioni, alle curve dotate di singolarità qualunque, dei noti teoremi di Gergonne, Plücker, Jacobi e Cayley, sui sistemi di punti d'intersezione delle curve algebriche generali.

Premettiamo alcune definizioni.

Siano $[\sigma_1], [\sigma_2], \dots, [\sigma_v]$ delle singolarità di curva algebrica, ben definite e *date*, comunque, nei punti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_v$.

Siano inoltre I_i, E_i le caratteristiche della singolarità $[\sigma_i]$ definite come al n° 10.

In ciò che segue intendiamo occuparci delle curve C_m *dotate delle singolarità date* $[\sigma_i]$ e il cui ordine m non sia inferiore ad un certo limite e, imposto dalla condizione che il sistema lineare $[C_m]$, determinato dalle singolarità base $[\sigma_i]$, ammetta un sistema lineare di curve ellittiche di dimensioni > 1 (*).

Ove occorra, indicheremo con F_l qualunque altra curva d'ordine l , non appartenente alla famiglia delle C .

13. Per due curve siffatte C_m, C_n , degli ordini m, n , ovvero pei relativi sistemi lineari $[C_m], [C_n]$, siano, rispettivamente, $k_m, D_{mm}, p_m; k_n, D_{nn}, p_n$, i numeri invarianti, analoghi a k, D, p , definiti come al n° 1.

Indichiamo inoltre con D_{mn} il numero delle ulteriori intersezioni delle curve C_m, C_n , all'infuori di quelle assorbite nei punti σ_i , dalle singolarità $[\sigma_i]$.

(*) È ovvio il far notare, che, ove si pervenga a trovare la minima restrizione cui è suscettibile il nostro teorema sui sistemi lineari di genere p , gli enunciati che seguono non potrebbero che acquistarne maggiore generalità.

Si avranno allora le relazioni seguenti :

$$D_{mm} = m^2 - \sum I, \quad D_{nn} = n^2 - \sum I,$$

$$D_{mn} = mn - \sum I = m(n - m) + D_{mm} = n(m - n) + D_{nn},$$

$$D_{mm} - D_{nn} = m^2 - n^2$$

$$p_m = \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) - \sum E, \quad p_n = \frac{1}{2} (n - 1) (n - 2) - \sum E$$

$$p_m - p_n = \frac{1}{2} [m(m - 3) - n(n - 3)].$$

E pel Teorema VI :

$$k_m = D_{mm} - p_m + 1,$$

$$k_n = D_{nn} - p_n + 1,$$

$$k_m - k_n = (D_{mm} - D_{nn}) - (p_m - p_n).$$

14. Ciò premesso, dimostreremo la seguente proposizione :

Dei D_{mn} punti d' intersezione di una curva C_m , d' ordine m , con una curva data C_n , d'ordine n :

1° se $m < n$, $m(n - m) + p_m - 1$ (*)

2° se $m \geq n$, p_n

sono determinati dai rimanenti.

a) Sia $m < n$. Vi sono allora, evidentemente, $k_m = D_{mm} - p_m + 1$

(*) Ovvero : $m(n - m) + \frac{1}{2} [m(m - 3) - n(n - 3)] + p_m - 1$.

punti d' intersezione dati, i quali determinano completamente la curva C_m , e però tutti gli altri punti d' intersezione, il cui numero è

$$D_{mn} - (D_{mn} - p_m + 1) = m(n - m) + p_m - 1.$$

b) Sia $m = n$. In tal caso facciamo osservare che tutte le curve C'_n , d'ordine n , formano un sistema lineare $[C'_n]$ di dimensioni $k_n = D_{nn} - p_n + 1$, il quale determina sopra una qualunque di esse, e nella specie sulla curva data C_n , una serie lineare $\infty^{D_{nn}-p_n} [G_D]$ di gruppi G_D di D punti: tale, cioè, che dati ad arbitrio, sulla curva C_n , $D_{nn} - p_n$ punti è completamente determinato il gruppo a cui essi appartengono, e però i rimanenti punti, il cui numero è $D_{nn} - (D_{nn} - p_n) = p_n$. Talchè:

Dei D_{nn} punti d' intersezione di due curve C_n, C'_n , dell'ordine n , p_n sono determinati dai rimanenti.

Come caso particolare, posto $p_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, $D_{nn} = n^2$, si ha il noto teorema: « Degli n^2 punti d' intersezione di due curve « generali dell' ordine n , $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sono determinati dai rimanenti $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ (*) ».

c) Sia $m > n$. Indichiamo con $C_m = 0$, $C_n = 0$ le equazioni delle curve C_m, C_n . Adoperando un noto procedimento (**), invece dell'equazione $C_m = 0$, consideriamo l'equazione

$$C'_m = C_m + F_{m-n} C_n = 0,$$

dove $F_{m-n} = 0$ rappresenta una curva generale dell'ordine $m - n$ che non passa per i punti σ_i , e però contiene $\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$ coefficienti arbitrari. Egli è allora evidente che questi ultimi coefficienti possono essere scelti in guisa da annullare un egual numero di coefficienti della funzione C'_m . Ne segue dunque che senza alterare il si-

(*) Plücker: *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, t. I, Essen 1828, p. 228; *Annals de Gergonne*, t. XIX, p. 97 e 129.

(**) Veggasi: Clebsch-Lindemann, loco citato, t. I, p. 426.

stema dei punti d' intersezione, si può sostituire alla curva C_m una curva speciale

$$C'_m = C_m + F_{m-n} C_n = 0,$$

la quale dipende soltanto da

$$k_m - \frac{1}{2} (m - n + 1) (m - n + 2)$$

$$= D_{mn} - p_n + 1 - \frac{1}{2} (m - n + 1) (m - n + 2)$$

$$= D_{mn} - p_n$$

costanti arbitrarie. Quest'ultima curva è quindi determinata da $D_{mn} - p_n$ punti. E però: dati $D_{mn} - p_n$ punti d' intersezione delle Curve C'_m, C_n , i rimanenti, p_n , ne sono conseguenza; il che sussiste bensì in riguardo alle curve C_m, C_n , dappoichè i punti d' intersezione sono i medesimi.

È così completamente dimostrata l'enunciata proposizione.

Nell' ipotesi $m > n$, si ha, in particolare, il teorema: « Ogni curva « generale d' ordine m descritta per $mn - \frac{1}{2} (n - 1) (n - 2)$ punti « dati di una curva generale d' ordine $n < m$, incontra questa in al- « tri $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 2)$ punti fissi (*) ».

15. Osserviamo ora che i numeri

$$m(n - m) + p_m - 1 \quad \text{e} \quad p_n,$$

i quali indicano, rispettivamente, pei casi $m < n$ ed $m \geq n$, quanti punti d' intersezione della curva data C_n con una curva C_m sono determinati dai rimanenti, si confondono ove si ponga $m = n - 1$, ovvero $m = n - 2$. Ne segue quindi che per $m > n - 3$ possiamo ritenere sempre il numero p_n , il quale è *completamente indipendente da m* .

Possiamo adunque enunciare il seguente teorema:

(*) JACOBI: *De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum* etc. (*Crelle's Journal*, t. XV, 1836, p. 285); PLÜCKER, *ibid.*, t. XVI, p. 47).

TEOREMA VII. — Dei D_{mn} punti d'intersezione di una curva C_m , d'ordine m , con una curva data C_n , d'ordine n , il numero dei punti determinati dagli altri è :

- 1° $m(n - m) + p_m - 1$, se $m < n - 2$;
 2° p_n , se $m \geq n - 2$.

16. Se delle D_{mn} intersezioni di due curve C_m, C'_m , degli ordini m ed m' , D_{mn} giacciono in una curva C_n d'ordine $n < m$, le rimanenti $D_{mn} - D_{mn} = m(m - n)$ saranno in una curva F_{m-n} d'ordine $m - n$.
 In fatti, per

$$\mu = \frac{1}{2}(m - n)(m - n + 3) = D_{mm} - D_{mn} - (p_m - p_n)$$

degli $m(m - n)$ punti residuali descriviamo una curva F_{m-n} , di ordine $m - n$. Allora le due curve C_n ed F_{m-n} formeranno un luogo composto C'_m , dell'ordine m , il quale passa per

$$D_{mn} + \mu = D_{mm} - p_m + p_n$$

punti. Poichè $D_{mn} - p_m + p_n \geq D_{mm} - p_m$, ne segue che detto luogo passerà per tutti gli altri punti residuali. Or siccome questi ultimi non possono appartenere alla curva C_n , ne segue che saranno necessariamente sulla curva F_{m-n} . Cioè, la curva F_{m-n} , ben determinata, contiene tutti gli $m(m - n)$ punti residuali delle curve C_m, C'_m . C. V. D.

Come caso particolare si ha il teorema : « Se delle m^2 intersezioni di due curve generali dell'ordine m , mn giacciono in una curva « generale dell'ordine $n < m$, le rimanenti $m(m - n)$ saranno in una curva d'ordine $m - n$ (*) ».

Dalla superiore proposizione e dal Teorema VII per $m > n$, segue che :

TEOREMA VIII. — Se delle D_{mn} intersezioni di due curve C_m, C'_m , d'ordine m , $D_{mn} - p_n$ giacciono in una curva C_n , d'ordine $n < m$, que-

(*) Gergonne : Sur quelques lois générales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques (Annales de Mathématiques, t. XVII, 1826-1827, p. 214-252).

sta ne conterrà altre p_n , e le rimanenti $D_{mn} - D_{nn} = m(m - n)$ saranno in una curva F_{m-n} d'ordine $m - n$.

17. Unitamente alle curve C_m e C_n consideriamo una terza curva C_q , dell'ordine q , appartenente alla stessa famiglia, e definita dai numeri k_q , D_{qq} , p_q .

Posto $i, j = m, n, q$ si hanno allora le relazioni :

$$D_{ii} = i^2 - \sum I, \quad D_{ij} = ij - \sum I,$$

$$p_i = \frac{1}{2}(i-1)(i-2) - \sum E,$$

$$k_i = D_{ii} - p_i + 1;$$

dalle quali ricavansi le formole :

$$D_{ij} = i(j-i) + D_{ii} = j(i-j) + D_{jj},$$

$$D_{ii} - D_{jj} = i^2 - j^2,$$

$$p_i - p_j = \frac{1}{2}[i(i-3) - j(j-3)],$$

$$k_i - k_j = D_{ii} - D_{jj} - (p_i - p_j)$$

$$D_{ii} - D_{jj} - (p_i - p_j) = \frac{1}{2}(i-j)(i-j+3).$$

TEOREMA IX. — Date due curve l'una C_m d'ordine m , l'altra C_n d'ordine $n < m$, se delle loro D_{mn} intersezioni ve ne sono

$$\lambda = D_{mn} + D_{mq} - D_{mm} - (p_n + p_q - p_m)$$

situate sopra una curva C_q d'ordine $q < m$ ($m \geq n + q - 3$), questa ne conterrà altre $D_{nq} - \lambda$; e le rimanenti $D_{mn} - D_{nq} = n(m - q)$ saranno sopra una curva F_{m-q} d'ordine $m - q$.

Infatti: fra le $D_{mq} - D_{nq} = q(m - n)$ intersezioni delle curve C_q , C_m non comuni a C_n , se ne prendano

$$\mu = \frac{1}{2}(m - n)(m - n + 3) = D_{mm} - D_{nn} - (p_m - p_n)$$

e per esse si descriva una curva F_{m-n} dell'ordine $m - n$. Si avranno allora due luoghi d'ordine m della data famiglia di curve: l'uno è C_m , l'altro è $C_n + F_{m-n}$. Or siccome la curva C_q contiene

$$\lambda + \mu = D_{mq} - p_q$$

intersezioni di detti due luoghi, in virtù del Teorema VIII ne conterrà altre p_q , cioè:

$$D_{nq} - \lambda$$

comuni a C_m , C_n e

$$p_q - (D_{nq} - \lambda) = q(m - n) - \mu$$

comuni a C_m , F_{m-n} ; e tutte le rimanenti intersezioni saranno in una curva F_{m-q} d'ordine $m - q$. C. V. D. (*).

Oltre alla condizione che m sia almeno eguale al più grande dei due numeri n e q , la dimostrazione precedente richiede bensì che sia $m - n < q$. Perchè se $m - n \geq q$ egli è evidente che non sarebbe possibile di descrivere la curva ausiliare F_{m-n} , d'ordine $m - n$, completamente determinata da punti situati, tutti, sulla curva C_q , d'ordine q . Tuttavia per $m = n + q - 1$ ed $m = n + q - 2$ il teorema non ha alcun significato. Infatti, essendo

$$D_{mq} = D_{nq} + q(m - n),$$

$$D_{mm} - D_{nn} - p_m + p_n = \frac{1}{2}(m - n)(m - n + 3),$$

si ha

$$\lambda = D_{nq} - \frac{1}{2}(m - n)(2q - m + n - 3) - p_q.$$

(*) Per questa dimostrazione veggasi la classica Memoria del Cremona: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n° 44.

Posto $m = n + q - 1$, ovvero $m = n + q - 2$, in ambo i casi si ottiene

$$\lambda = D_{nq} + \frac{1}{2}(q-1)(q-2) - p_1.$$

Or siccome $\frac{1}{2}(q-1)(q-2) - p_1 \geq 0$ (e soltanto $= 0$ ove trattisi di curve generali), ne segue che $\lambda \geq D_{nq}$. Riteniamo pertanto la condizione $m \leq n + q - 3$.

18. Dal teorema precedente segue che i λ punti dati comuni alle curve C_m, C_n, C_q individuano altri $D_{nq} - \lambda$ punti comuni alle curve medesime. Tutti questi punti sono pienamente determinati dalle curve C_n, C_q indipendentemente da C_m . E però:

TEOREMA X. — Qualunque curva C_m d'ordine m descritta per

$$\lambda = D_{mn} + D_{mq} - D_{mm} - (p_n + p_q - p_m)$$

intersezioni di due curve C_n, C_q , degli ordini n e q ($n < m, q < m, n + q - 3 \geq m$) passa anche per tutti gli altri punti comuni a queste curve.

Come caso particolare, posto $D_{mm} = m^2, D_{mn} = mn, D_{mq} = mq$,

$$p_m = \frac{1}{2}(m-1)(m-2), p_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

$$p_q = \frac{1}{2}(q-1)(q-2),$$

si ha il noto teorema di Cayley:

« Qualunque curva generale d'ordine m che passa per

$$nq - \frac{1}{2}(n+q-m-1)(n+q-m-2)$$

« intersezioni di due curve generali degli ordini n, q ($n < m, q < m$, « ma $m \leq n + q - 3$), passa anche per tutti gli altri punti comuni « a queste curve (*) ».

(*) Cayley, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. III, 1843, p. 211.

19. Se nel Teorema X poniamo $q = n$, si ha inoltre la seguente proposizione :

TEOREMA XI. — *Se fra i D_{nn} punti base di un fascio di curve C_n , d'ordine n , ve ne sono*

$$\alpha = 2(D_{nn} - p_n) - (D_{mm} - p_m)$$

in una curva C_m , d'ordine m , dove $n < m \leq 2n$, questa curva conterrà i rimanenti $D_{nn} - \alpha$ punti base ()*.

20. Quest'ultimo teorema permette di estendere alle curve C dotate di singolarità qualunque, i teoremi di Chasles e de Jonquières sulla generazione delle curve algebriche. A tale scopo, ove si seguano gli stessi procedimenti adoperati dal signor Lindemann pel caso di curve generali (**), si perviene facilmente a nuovi teoremi, fra i quali è notevole il seguente :

TEOREMA XII. — *Se in una curva data C_m , d'ordine m , si vogliono determinare i D_{nn} punti base di un fascio di curve C_n , d'ordine $n < m$, degli stessi se ne possono prendere ad arbitrio :*

$$\begin{array}{ll} D_{mm} - p_m - 2n(m - n) & \text{se } m \leq 2n, \\ D_{nn} - 2p_n & \text{se } m > 2n. \end{array}$$

(*) Per il caso di curve generali, in cui

$$\alpha = n^2 - \frac{1}{2}(2n - m - 1)(2n - m - 2),$$

veggasi Clebsch-Lindemann, loco citato, t. II, p. 760.

(**) Clebsch-Lindemann, loco citato, t. II, p. 753-764.