Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie.

Von

A. Hurwitz in Hildesheim.

I.

Bekanntlich ist die Gleichung

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &\equiv A_2\lambda_1^2 + 2B_2\lambda_1 + C_2 \\ &\equiv A_1\lambda_2^2 + 2B_1\lambda_2 + C_1 = 0, \end{aligned}$$

wo A_i, B_i, C_i ganze rationale Functionen zweiten Grades von λ_i bedeuten, das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \frac{d\lambda_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1C_1}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{B_2^2 - A_2C_2}}.$$

Deutet man nun λ_1 und λ_2 als Parameter zweier rationalen einstufigen Mannigfaltigkeiten M_1 resp. M_2, so stellt die Gleichung (1) die allgemeinste $(2-2)$-deutige Beziehung zwischen den Elementen dieser Mannigfaltigkeiten dar.

Es ist bekannt und durch eine leichte Rechnung ohne Weiteres zu verificiren, dass die rationalen Invarianten der vier Elemente von M_1, welche durch die Gleichung

$$B_1^2 - A_1C_1 = 0$$

bestimmt werden, mit denen der vier Elemente von M_2, deren Parameter die Wurzeln von

$$B_2^2 - A_2C_2 = 0$$

sind, gleichen Werth besitzen.

Diese zwei Mal vier Elemente sind offenbar diejenigen „Doppelelemente“ von M_1 resp. M_2, denen zwei zusammenfallende Elemente in M_2 resp. M_1 correspondiren.

Wir wollen uns nun irgend eine $2-2$-deutige Beziehung zwischen den Elementen von M_1 und M_2 gegeben denken. Dieselbe sei jedoch in dem Sinne allgemein, dass die vier Doppelelemente in M_1 wie in

M_2 vier *getrennte* Elemente sind. Wegen der Gleichheit der Invarianten können wir nun die Parametervertheilung auf M_1 und M_2 so treffen, dass sowohl den vier Doppelelementen in M_1, wie auch denen in M_2, die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k}$$

zufallen.

Dann wird aber die Gleichung (1), welche die 2 — 2-deutige Beziehung darstellt, eine solche Form annehmen, dass die aus ihr abgeleitete Differentialgleichung (2) folgende wird:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2 \cdot 1-\varkappa^2\lambda_1^2}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{1-\lambda_2^2 \cdot 1-\varkappa^2\lambda_2^2}}.$$

Gehen wir nunmehr von den Integralen zu den elliptischen Functionen über, so erhalten wir den *Fundamentalsatz:*

1. „*Sind zwei rationale einstufige Mannigfaltigkeiten (2—2)-deutig algebraisch auf einander bezogen, so ist bei geeigneter Wahl der Parametervertheilung die Beziehung so dargestellt, dass einem Elemente* $\lambda_1 = \operatorname{sn} u$*) *der einen Mannigfaltigkeit die Elemente*

$$\lambda_2' = \operatorname{sn}(u+C) \quad \textit{und} \quad \lambda_2'' = \operatorname{sn}(u-C)$$

der andern Mannigfaltigkeit entsprechen.

Dabei bedeutet C eine der Beziehung eigenthümliche Constante, und die Parametervertheilung ist so zu treffen, dass den Doppelelementen in der einen wie in der andern Mannigfaltigkeit die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k}$$

beigelegt werden.“

Umgekehrt:

2. „*Lässt man einem Elemente* $\operatorname{sn} u$ *einer rationalen einstufigen Mannigfaltigkeit die Elemente* $\operatorname{sn}(u+C)$ *und* $\operatorname{sn}(u-C)$ *einer zweiten solchen Mannigfaltigkeit entsprechen, so ist dadurch eine 2 — 2-deutige Beziehung zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit festgesetzt, deren Doppelelemente in der einen wie in der anderen Mannigfaltigkeit die Parameter* $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ *besitzen.*“

*) Ich gebrauche die Gudermann'sche Abkürzung von $\sin\operatorname{am} u$. — Uebrigens habe ich nur um der Gewohnheit der Mathematiker zu folgen die Jacobi'sche Function $\sin\operatorname{am} u$ eingeführt. An ihre Stelle kann jede andere zweiwerthige elliptische Function treten, entsprechend dem Umstande, dass die elliptische Differentialgleichung in die allgemeine kanonische Gestalt

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)(\lambda_1-d)}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2-a)(\lambda_2-b)(\lambda_2-c)(\lambda_2-d)}}$$

gesetzt werden kann.

In Bezug auf den letzten Satz ist jedoch zu bemerken, dass in dem *einen* Falle, wo die Constante C einer halben Periode von $\operatorname{sn} u$ gleich ist, die $2-2$-deutige Beziehung in eine projectivische Beziehung zwischen den Mannigfaltigkeiten ausartet.

Ich füge den Sätzen 1. und 2. noch einen dritten allgemeinen Satz hinzu, der jedoch von geringerer Bedeutung ist.

Je vier Elemente a, b, c, d einer einstufigen rationalen Mannigfaltigkeit bestimmen nämlich drei quadratische Involutionen. Denn vier Elemente können auf drei Arten in zwei Elementepaare angeordnet werden (ab, cd; ac, bd; ad, bc;), und durch zwei Elementepaare ist eine quadratische Involution eindeutig bestimmt.

Unser Satz lautet nun so:

3. „*Sind zwei rationale einstufige Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 $2-2$-deutig auf einander bezogen, so bestimmen die vier Doppelelemente von M_1 dieselben drei quadratischen Involutionen, wie die vier Elemente von M_1, welche den Doppelelementen von M_2 entsprechen.*“ *)

Dass dieser Satz richtig bleibt, wenn man in der Aussage M_1 mit M_2 vertauscht, ist selbstverständlich.

Zum Beweise bemerken wir, dass in der Darstellung durch elliptische Functionen nach Satz 1. sowohl die Doppelelemente von M_1 wie auch die von M_2 die Parameter

$$+1 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4}\right), \quad -1 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4}\right), \quad +\frac{1}{k} = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}\right),$$
$$-\frac{1}{k} = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2}\right) \text{**)}$$

erhalten. Daher haben die Elemente von M_1, welche den Doppelelementen von M_2 entsprechen, gleichfalls nach Satz 1. die Parameter

$$\lambda_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + C\right), \qquad \lambda_2 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - C\right),$$
$$\lambda_3 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2} + C\right), \quad \lambda_4 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2} - C\right),$$

welche Werthe paarweise einander entgegengesetzt gleich sind. Also liegen die Elementenpaare λ_1, λ_2; λ_3, λ_4; $+1$, -1 und $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ harmonisch zu den Elementen 0 und ∞.

Die überhaupt möglichen Weisen, wie man die Werthe ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ den Doppelelementen von M_1 und denen von M_2 als Parameter

---

*) Man kann dieses auch so ausdrücken:

„Die beiden in Betracht gezogenen Elementenquadrupel von M_1 besitzen *dieselbe* Covariante sechster Ordnung.“

**) Die nach Jacobi mit $4K$ und $2iK'$ bezeichneten Perioden von $\operatorname{sn} u$ nennen wir ω_1 und ω_2 respective.

zuweisen kann, liefern so, wie man leicht abzählt, drei verschiedene Anordnungen der acht in M_1 betrachteten Elemente zu vier Elementepaaren in Involution, womit dann unser Satz bewiesen ist.

Die Sätze 1. und 2. enthalten Alles, was aus der Theorie der elliptischen Functionen, neben deren Periodicität, in den Anwendungen auf die geometrischen Schliessungsprobleme*) benutzt worden ist, und ich lege besonderes Gewicht darauf, dass sie in der gegebenen geometrischen Formulirung scharf das Gemeinsame bezeichnen in den Ueberlegungen, die von der Theorie der elliptischen Functionen aus zu den hierher gehörigen Theoremen hinführen.

Auch die elliptische Parametervertheilung auf Curven vom Geschlechte 1 lässt sich auf unsern Satz 1. direct basiren. Bei der ebenen Curve 3. Ordnung z. B. braucht man nur die Parameter zweier Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf der Curve liegen, als Coordinaten einzuführen.

Ohne auf alles dieses näher einzugehen, sei es mir gestattet einige neue Anwendungen dieser fruchtbaren Methode zu geben, wobei es mir hauptsächlich darauf ankommt zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich dieselbe in der oben aufgestellten geometrischen Formulirung für geometrische Probleme verwerthen lässt.

II.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise will ich im Folgenden *einen Punkt P einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung einen Tangentialpunkt einer Geraden G nennen, wenn die durch P und G gehende Ebene die Raumcurve in einem von P verschiedenen Punkte berührt.*

Es ist klar, dass jede die Raumcurve nicht treffende Gerade vier Tangentialpunkte besitzt. Dagegen ist jeder beliebige Punkt der Raumcurve Tangentialpunkt für jede beliebige Tangente der Curve. Es sei nun eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung C_3 und eine dieselbe nicht treffende Gerade G_1 gegeben. Durch G_1 legen wir alle möglichen Ebenen. Jede solche Ebene schneidet die C_3 in 3 Punkten, und die Gesammtheit dieser Punktetripel bildet offenbar auf der Curve eine Involution 3^{ten} Grades.

Lassen wir nun je zwei Punkte der Raumcurve einander entsprechen, deren Verbindungsgerade G_1 trifft, so dass also in jedem Tripel der erwähnten Involution je zwei Punkte immer dem dritten

---

*) In der That kommen alle diese Probleme auf die Untersuchung von 2 — 2-deutigen Beziehungen zwischen rationalen Mannigfaltigkeiten hinaus. Siehe: Mathem. Annalen XV, pag. 8, wo diese Probleme auf ihren algebraischen Kern zurückgeführt sind.

als entsprechende zugehören, so ist damit eine $2-2$-deutige Beziehung zwischen den Punkten der C_3 hergestellt.

Ertheilen wir den Doppelelementen dieser Beziehung, also den *Tangentialpunkten* der Geraden G_1 die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k},$$

so wird die $2-2$-deutige Beziehung nach unserem Satze 1. der Art sein, dass dem Punkte $\operatorname{sn} u$ die Punkte $\operatorname{sn}(u+C)$ und $\operatorname{sn}(u-C)$ entsprechen. Die letzteren Punkte sind aber dann auch zwei sich entsprechende Punkte und es folgt daher:

„*Die Constante C ist ein Periodendrittheil $\frac{\Omega_1}{3}$, so dass je drei Punkten, die von einer durch die Gerade G_1 gelegten Ebene auf C_3 ausgeschnitten werden, die Parameter*

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_1}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\,\frac{\Omega_1}{3}\right)$$

zukommen.“

Den Tangentialpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 der Geraden G_1 entsprechen dabei die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3, B_4 der die Gerade G_1 treffenden Tangenten, jeder doppelt gezählt. Unser allgemeiner Satz 3. ergiebt daher, unter Berücksichtigung einer bekannten Eigenschaft der Raumcurve 3. Ordnung, folgendes Theorem:

„*Das aus den Tangentialpunkten einer Geraden als Ecken gebildete Tetraeder und das in gleicher Weise durch die Berührungspunkte der jene Gerade treffenden Tangenten bestimmte Tetraeder liegen so zu einander, dass jedes Paar von gegenüberliegenden Kanten des einen Tetraeders mit je einem Paar gegenüberliegender Kanten des anderen Tetraeders 4 Erzeugende eines Hyperboloides bilden.*“

Die 9 incongruenten Periodendrittel vertheilen sich bei Ausschluss des Periodendrittels 0 in vier Paare, wie

$$\frac{\Omega_1}{3}, \quad 2\,\frac{\Omega_1}{3}; \qquad \frac{\Omega_2}{3}, \quad 2\,\frac{\Omega_2}{3};$$

$$\frac{\Omega_3}{3}=\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}, \quad 2\,\frac{\Omega_3}{3}; \quad \text{und} \quad \frac{\Omega_4}{3}=\frac{\Omega_1-\Omega_2}{3}, \quad 2\,\frac{\Omega_4}{3}.$$

Wir sahen, dass bei Zuweisung der Punkte

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_1}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\,\frac{\Omega_1}{3}\right),$$

die durch diese Punktetripel gehenden Ebenen die Gerade G_1 enthalten.

Nach der Umkehrung unseres allgemeinen Satzes folgt nun:

„*Die durch die Schaar der Punktetripel*

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\,\frac{\Omega_\alpha}{3}\right)$$

bestimmten Ebenen gehen durch eine feste Gerade G_α, deren Tangentialpunkte die Punkte ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ *sind."*

Also:

„Jeder Geraden G_1 sind in Bezug auf eine Raumcurve 3ter Ordnung 3 andere Gerade G_2, G_3, G_4 eindeutig zugewiesen. Und zwar haben alle diese Geraden dieselben Tangentialpunkte."

Man erkennt leicht die Richtigkeit der Umkehrung dieses Satzes:

„Sind die 4 Tangentialpunkte einer Geraden in Bezug auf eine gegebene Raumcurve 3ter Ordnung gegeben, so ist die Gerade 4-deutig bestimmt.) Den überhaupt möglichen auf einer Raumcurve 3ter Ordnung liegenden Punktquadrupeln entsprechend, ordnen sich also die sämmtlichen Geraden des Raumes in Gruppen von je vieren."* —

Eine Ebene durch G_α schneidet die C_3 in den Punkten

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3}\right).$$

Dann schneiden die durch G_β und diese 3 Punkte gelegten Ebenen in den weiteren Punkten

$$\begin{array}{lll}\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3} + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3} + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), \\ \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3} + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3} + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right),\end{array}$$

Hier lehrt der Augenschein, dass je 3 in eine Horizontalreihe geschriebene Punkte wieder mit G_α in einer Ebene liegen. Folglich:

„Legt man durch eine der 4 Geraden, die zu denselben Tangentialpunkten gehören, eine Ebene, verbindet die 3 Schnittpunkte dieser Ebene mit der C_3 durch neue Ebenen mit irgend einer andern der 4 Geraden, so bestimmen diese neuen Ebenen 6 weitere Schnittpunkte auf der C_3, die sich auf zwei durch die erstere Gerade gehenden Ebenen vertheilen."

Betrachtet man jetzt die 9 Punkte

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\mu}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\mu}{3}\right), \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

so erkennt man, dass sich der soeben ausgesprochene Satz in folgenden, mehr sagenden, einschliessen lässt:

„In Bezug auf jedes durch eine Raumcurve 3ter Ordnung bestimmtes Geradenquadrupel (G) gruppiren sich die Punkte der Curve ihrerseits zu je neun. Jede Ebene durch eine der Geraden von (G), welche einen der neun Punkte enthält, geht zugleich durch zwei weitere dieser Punkte, der Art, dass sich die neun Punkte auf vier Weisen als Durchschnittspunkte der Curve mit drei Ebenen eines Ebenenbüschels auffassen lassen."

---

*) Wir nehmen dabei stillschweigend an, dass die Punkte getrennt liegen und die zu bestimmende Gerade keine Tangente der Raumcurve sein darf.

Die Analogie dieses Satzes mit den Gruppirungssätzen der neun Wendepunkte einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung ist in die Augen springend.

Als bemerkenswerth, wenn auch in den obigen Sätzen implicite enthalten, ist noch folgender Satz anzuführen:

„*Aus den 16 Berührungspunkten der die Geraden eines Geradenquadrupels treffenden Tangenten der Raumcurve lassen sich 4 Tetraeder bilden, so dass die Seitenflächen irgend eines dieser Tetraeder der Reihe nach durch die 4 Geraden des Quadrupels hindurchlaufen.*“

III.

Wir betrachten auf einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung zwei Punkte P und P', und fassen diese als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel auf.

Nennen wir zwei Strahlen, von denen der eine durch P, der andere durch P' läuft, dann einander entsprechend, wenn sie sich in einem Punkte der Curve 3^{ter} Ordnung treffen, so haben wir damit eine $2-2$-deutige Beziehung zwischen den Strahlbüscheln festgesetzt, indem jedem Strahle aus P zwei Strahlen aus P', und umgekehrt jedem Strahle von P' zwei Strahlen durch P zugehören.

Die Doppelelemente dieser $2-2$-deutigen Beziehung sind im Strahlbüschel P die vier von P aus an die Curve gelegten Tangenten, im Strahlbüschel P' die vier in gleicher Weise von P' ausgehenden Tangenten der Curve.

Nach unsern an die Spitze dieser Arbeit gestellten Sätzen haben diese zwei Tangentenquadrupel dasselbe Doppelverhältniss, womit ein bekannter Satz aus der Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung auf's Neue bewiesen ist. Das allgemeine Theorem 3. liefert, auf die Beziehung zwischen den Büscheln P und P' angewandt, folgenden Satz:

„*Legt man von einem Punkte P einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung die vier Tangenten an diese und zieht von demselben Punkte aus die vier Strahlen nach den Berührungspunkten der vier Tangenten, die von einem ganz beliebigen andern Punkte der Curve ausgehen, so haben die beiden durch P laufenden Strahlenquadrupel dieselbe Covariante sechster Ordnung, die acht sie constituirenden Strahlen lassen sich also auf drei Weisen zu vier Strahlenpaaren in Involution anordnen.*“

Dieser Satz ergiebt sich übrigens auch unschwer aus bekannten Sätzen über die Hesse'sche Correspondenz auf der Curve 3^{ter} Ordnung *).

Die von uns betrachtete $2-2$-Correspondenz zwischen den Strahlbüscheln P und P' wird nun nach Satz 1. analytisch so darzustellen sein, dass dem Strahle $\operatorname{sn} u$ von P die Strahlen $\operatorname{sn}(u+C)$ und

*) Siehe z. B. Schröter, Mathem. Annalen Bd. V, pag. 50.

$\operatorname{sn}(u - C)$ von P' entsprechen. Dabei sind die Strahlen durch die ihnen zukommenden Parameter bezeichnet.

Verlangt man jetzt, dass der Curve 3ter Ordnung ein Steiner'sches $2n$-Eck einbeschrieben werden könne, dessen Seiten abwechselnd durch P und P' laufen, so sieht man, dass diesen Seiten als Strahlen der Büschel P und P' die Parameter zufallen: $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn}(u + C)$, $\operatorname{sn}(u + 2C) \cdots \operatorname{sn}(u + (2n - 1)C)$ und dass nothwendig der Strahl vom Parameter $\operatorname{sn}(u + 2nC)$ mit dem Strahle $\operatorname{sn} u$ identisch sein, also

$$C = \frac{\Omega}{2n} \text{ sein muss,}$$

wo Ω eine Periode von $\operatorname{sn} u$ bezeichnet.*)

Bei diesem Werthe von C ist es klar, dass

$$\operatorname{sn}(u + 2nC) = \operatorname{sn} u$$

unabhängig von dem Werthe von u, *woraus der Satz der Steiner'schen Polygone folgt.*

Folgender interessante Umstand scheint bis jetzt dabei nicht bemerkt zu sein:

„Ergänzt man ein zu dem Punktepaar P, P' gehöriges Steiner'sches $2n$-Eck zu einem vollständigen $2n$-Seit, indem man die n durch P laufenden Seiten mit den n durch P' laufenden Seiten zum Schnitt bringt, so liegen, falls n eine ungerade Zahl ist, immer n Eckpunkte des so erhaltenen vollständigen $2n$-Seits auf einem durch P und P' gehenden Kegelschnitt. Ferner bleibt dieser Kegelschnitt derselbe für alle unzählig vielen Steiner'schen Polygone, die zu P und P' gehören, auch läuft derselbe durch vier von den 16 Punkten hindurch, in denen die vier von P an die Curve 3ter Ordnung gehenden Tangenten von den vier in gleicher Weise durch P' laufenden getroffen werden."

In der That sind, wie schon bemerkt,

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + 2 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 4 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right) \cdots \operatorname{sn}\left(u + 2(n-1)\frac{\Omega}{2n}\right)$$

die Parameter der n durch P laufenden Seiten des Polygons und

$$\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega}{2n}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 3 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right) \cdots \operatorname{sn}\left(u + (2n-1)\frac{\Omega}{2n}\right)$$

die Parameter der n durch P' laufenden Seiten. Ist nun n eine un-

---

*) Die Werthe u, für welche

$$2u + 2nC \equiv \frac{\omega_1}{2} \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

und also auch $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u + 2nC)$, liefern nur singuläre $2n$-Ecke der veangten Art.

gerade Zahl, so kommt unter den durch P' laufenden Strahlen der Strahl vom Parameter $\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega}{2}\right)$ vor, und allgemein findet sich zu jedem der n Strahlen durch P je ein Strahl durch P', dessen Argument $u+k\cdot\frac{\Omega}{2n}$ sich von dem Argumente des durch P gehenden Strahles um $\pm\frac{\Omega}{2}$, also um eine halbe Periode unterscheidet. Nach dem Ausnahmefalle des Satzes 2. sind daher die n Strahlen durch P projectivisch zu den n Strahlen durch P', woraus sofort die Richtigkeit des ersten Theiles unseres Satzes erhellt.

Da die betrachtete Projectivität dadurch hergestellt ist, dass dem Strahle $\operatorname{sn} u$ aus P immer der Strahl $\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega}{2}\right)$ aus P' entspricht, so ist klar, dass der im ersten Theil des Satzes genannte Kegelschnitt für alle zu P und P' gehörige Steiner'sche Polygone derselbe ist, und dass den Strahlen ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ von P die Strahlen ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ von P', letztere in einer bestimmten Reihenfolge genommen, correspondiren. Damit sind auch die weiteren Theile unseres Satzes vollkommen erwiesen.

Ist n eine gerade Zahl $=2m$, so folgt aus ähnlichen Gründen:

„Die $2m$ durch P laufenden Seiten eines zu dem Punktepaare P, P' gehörigen Steiner'schen $4m$-Ecks lassen sich in m Strahlenpaare einer quadratischen Involution anordnen. Diese Involution bleibt dieselbe, welches der unzählig vielen zu P und P' gehörigen Polygone man auch auswählen mag.) Gleiches gilt von den durch P' laufenden Seiten.“*

Der letzte Satz lässt sich auch ohne Schwierigkeit mit Hülfe der elliptischen Parametervertheilung auf der Curve 3ter Ordnung erhalten. Dass sich ganz ähnliche Sätze für Raumcurven 4ter Ordnung erster Species mit derselben Leichtigkeit aus unsern allgemeinen Sätzen ergeben, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

IV.

Ich wende mich zu andern Anwendungen der an die Spitze dieser Abhandlung gestellten Sätze, werde mich jedoch dabei, da die Schlüsse der Art nach bei allen diesen Anwendungen dieselben sind, theils auf kurze Andeutungen beschränken, theils nur Resultate angeben.

Die Gesammtheit der Kreise, welche zwei feste Kreise berühren, zerfällt — den beiden Aehnlichkeitspunkten der festen Kreise entsprechend — in zwei getrennte Schaaren. Irgend ein Kreis einer einzelnen

*) Diese Involution ist eine derjenigen, von denen der Satz pag. 62 handelt.

dieser Schaaren wird von zwei Kreisen derselben Schaar berührt, und jede einzelne dieser Schaaren schickt zwei ihrer Kreise durch einen willkürlich gegebenen Punkt.

Diese Angaben genügen, um aus unseren allgemeinen Sätzen einerseits die Richtigkeit der die Steiner'schen Kreisreihen betreffenden Sätze zu erweisen, andererseits den folgenden Satz mit Leichtigkeit herzuleiten:

Es seien zwei feste Kreise gegeben, von denen man sich den einen M_1 innerhalb des anderen M_2 liegend denken möge. Ferner sei ein dritter fester Kreis M_3 gegeben, dessen Peripherie ganz in dem zwischen den ersten beiden Kreisen liegenden Raume verlaufen soll.*)

Wir betrachten nun die sämmtlichen Kreise, welche in dem Raume zwischen M_1 und M_2 liegend diese beiden Kreise berühren — M_1 von aussen, M_2 von innen — und wollen nun je zwei dieser berührenden Kreise einander *benachbart* nennen, wenn einer ihrer beiden Schnittpunkte auf dem festen Kreise M_3 gelegen ist. Hiernach ist klar, dass jeder Kreis zwei Nachbarn besitzt, einen rechten und einen linken.

„*Construiren wir nun von einem der M_1 und M_2 berührenden Kreise als erstem ausgehend eine Reihe von Kreisen, von denen jeder spätere der rechte Nachbar des unmittelbar vorhergehenden ist, so sind zwei Fälle möglich: Entweder die Reihe ist commensurabel, d. h. wir kommen schliesslich zu einem n^{ten} Kreise, dessen rechter Nachbar wieder der erste, Ausgangs-Kreis ist, oder dieser Umstand trifft niemals ein. Welcher von beiden Fällen nun stattfindet, hängt nur von der gegenseitigen Lage der drei Kreise M_1, M_2, M_3 ab, so dass die Reihe immer commensurabel ist, von welchem Kreise, als erstem, man auch ausgehen mag, wenn sie es ein einziges Mal ist.*" —

V.

Endlich wollen wir noch eine Anwendung unserer Principien auf ein Beispiel machen, das einen eigenthümlichen von dem aller bis jetzt bekannten Beispiele verschiedenen Charakter hat, und welches zu den interessantesten Problemen Anlass bietet. Ich habe diese Untersuchungen jedoch noch nicht vollständig erledigt und muss mich daher auf wenige Bemerkungen beschränken.

Die ebene Curve 4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe hat bekanntlich einen Doppelpunkt, zwei Rückkehrpunkte, eine Doppeltangente und zwei Wendetangenten. Sie hat das Geschlecht Null und hängt von einer wesentlichen, gegenüber linearen Transformation unveränderlichen Constanten, ihrer absoluten Invariante, ab. Als diese absolute Invariante kann man z. B. das Doppelverhältniss der vier Parameter

*) Diese Lagenangaben sind nur der Anschaulichkeit wegen gemacht.

ansehen, die bei irgend einer auf der Curve festgelegten Parametervertheilung den beiden im Doppelpunkt vereinigten Punkten der Curve und den beiden Rückkehrpunkten zufallen.

Lässt man nun zwei Punkte dieser Curve sich entsprechen, wenn ihre Verbindungsgerade die Curve in einem dritten Punkte berührt, so hat man dadurch eine $2-2$ Correspondenz zwischen den Punkten der Curve hergestellt. Bei geeigneter Vertheilung der Parameter auf die Punkte der Curve werden dann dem Punkte vom Parameter $\operatorname{sn} u$ die Punkte $\operatorname{sn}(u+C)$ und $\operatorname{sn}(u-C)$ correspondiren. Der Werth der Constanten C und der Modul k von $\operatorname{sn} u$ werden dabei offenbar Functionen der absoluten Invariante der Curve sein.

Verlangt man nun, dass ein eigentliches (nicht singuläres) n-Eck existirt, welches der Curve gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, d. h. dessen n Ecken auf der Curve liegen, während gleichzeitig seine n Seiten Tangenten der Curve sind, so muss die Constante C ein Perioden-n-Theil sein, und folglich giebt es unzählig viele solche n-Ecke, wenn es ein einziges giebt. Die Bedingung aber, dass C der n^{te} Theil einer Periode sein soll, liefert für die absolute Invariante der Curve eine algebraische Gleichung mit Zahlencoefficienten. Nach alledem können wir sagen:

„*Die ebenen Curven 4ter Ordnung und 4ter Classe theilen sich in zwei Gruppen. In der einen Gruppe finden sich nur solche Curven, bei denen keine n-Ecke existiren, welche der Curve zugleich ein- und umbeschrieben sind. Dagegen theilen sich die Curven der andern Gruppe — den ganzen positiven Zahlen entsprechend — in unzählig viele Classen.*

Für jede Curve einer solchen Classe giebt es unzählig viele n-Ecke, welche der Curve zugleich ein- und umbeschrieben sind, und die absoluten Invarianten der Curven derselben Classe sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit Zahlencoefficienten.“

VI.

Es sei schliesslich noch folgende allgemeine Bemerkung gestattet: Wie der Fundamentalsatz der Algebra durch seine geometrische Formulirung im Correspondenzprincip zu einem der fruchtbarsten Werkzeuge geometrischer Forschung wird, so gewinnt jeder analytische Satz, welcher einer ähnlichen Umsetzung fähig ist, durch diese eine grosse Beweglichkeit in seiner Anwendbarkeit. Die obigen Entwicklungen bilden ein neues Beispiel für diese Thatsache.

Wie in ähnlicher Weise das Abel'sche Theorem ausgenutzt werden kann, denke ich demnächst zu zeigen.

Leipzig, den 22. Juni 1881.