

## XIX. Bemerkung zu dem Artikel des Herrn E. von Fedorow, die Zusammenstellung seiner krystallographischen Resultate und der meinigen betreffend \*).

Von

A. Schoenflies in Göttingen.

---

In einem kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Artikel hat sich der russische Mineraloge E. von Fedorow der nicht geringen Mühe unterzogen, die Ergebnisse, die in den letzten Jahren über die theoretischen Fragen der Krystallographie von ihm selbst und von mir abgeleitet worden sind, in Parallele zu setzen. Das Erscheinen dieser Arbeit war mir um so mehr erfreulich, als ich selbst ursprünglich die Absicht hatte, in meine unlängst erschienene Schrift \*\*) analoge Betrachtungen aufzunehmen. Leider hat diese Absicht gleich einigen anderen dem Wunsche auf möglichste Reduction des Stoffes weichen müssen.

Wenn ich mich auch den Ausführungen Fedorow's im wesentlichen anschliessen kann, so möchte ich doch nicht unterlassen, einige Bemerkungen hinzuzufügen, in denen ich von der Auffassung Fedorow's abweiche. Ich beschränke mich dabei auf solche Punkte, in denen nach der Meinung F's. Mängel meiner eigenen Arbeit vorliegen. Ein Theil derselben betrifft die von uns gewählten Bezeichnungen, ein anderer Theil bezieht sich auf angebliche Unvollständigkeit meiner Darstellung.

Auf die Bezeichnungen, resp. auf die Frage, welche von ihnen den Vorzug verdienen, will ich nicht näher eingehen. Wenige von ihnen habe ich neu einführen müssen; denjenigen, die ich vorfand, habe ich ihren üblichen Sinn belassen. Nur über das Wort »Molekelgitter« sei hier eine Bemerkung gestattet, weil Fedorow sich dahin ausdrückt, der erweiterte Begriff des Molekelgitters sei mir unbekannt geblieben, und der von mir aufgestellte Satz, dass die Symmetrie des Molekelgitters niemals höher sei,

---

\*) Diese Zeitschr. 20, 25.

\*\*) Krystallsysteme und Krystalstructure. Leipzig 1894.

als die Symmetrie der Molekel, werde im erweiterten Sinne unrichtig (S. 44). Das letzte trifft vollständig zu. Sollte aber aus den Worten Fedorow's herausgelesen werden, dass die »erweiterten Molekelgitter« in meiner Schrift nicht enthalten sind, so würde dies irrig sein; sie sind von mir auf S. 398 abgeleitet worden. Ich bezeichne sie allerdings schon als Molekelhaufen allgemeiner Art; für sie gilt ein analoger Satz nicht.

Von den Ausstellungen, die Fedorow gegen den Inhalt meiner Schrift erhebt, sind es besonders zwei, an die ich einige Worte anzuknüpfen habe. Die erste richtet sich dagegen, dass ich nicht alle Symmetriegruppen, resp. wie Fedorow sehr zweckmässig sagt, nicht alle Symmetriearten aufgezählt habe, sondern nur diejenigen, die auf eine endliche Gruppe von Operationen, d. h. auf eine endliche Zahl von Symmetrieachsen führen (S. 31). Ausgeschlossen sind daher nur solche Gruppen, die ohne krystallographische Bedeutung sind, nämlich diejenigen, in denen Symmetrieachsen von beliebig kleinem Drehungswinkel auftreten. Hierzu darf ich wohl bemerken, dass meines Erachtens durchaus nicht Alles, was sich über einen Gegenstand sagen lässt, Aufnahme in einer zusammenhängenden Darstellung zu finden braucht, und dass die zweckmässige Beschränkung des Stoffes für mich gerade den schwierigsten Theil meiner Arbeit ausmachte. Manche Sätze, die ich für die Darstellung nöthig hatte, bleiben für die von mir ausgeschlossenen Gruppen gar nicht in Kraft; die Definitionen mussten daher immer so gefasst werden, dass sie zur vollständigen Ableitung aller Resultate von eigentlich krystallographischer Bedeutung wirklich ausreichten. Uebrigens steht auch die Annahme Fedorow's, dass es ausser den von mir abgeleiteten Gruppen nur zwei andere giebt, nämlich diejenigen, welche der Symmetrieart des Kegels und der Kugel entsprechen (S. 31), mit den modernen mathematischen Auffassungen, wie sie sich besonders auf Grund des »Abzählbarkeitsbegriffes« entwickelt haben, nicht im Einklang. Die Zahl der ausgeschlossenen Gruppen ist unbegrenzt gross; irgend zwei sich schneidende Symmetrieachsen von beliebiger Zähligkeit bilden im Allgemeinen eine von ihnen, und der Mathematiker ist gehalten, sie von derjenigen Gruppe, welche der Symmetrie der Kugel entspricht, zu unterscheiden. Gerade hierdurch wurde die oben genannte Beschränkung gefordert. Auf den Unterschied näher einzugehen, ist hier nicht der Ort; es dürfte aber evident sein, dass man an eine von speciell mathematischer Seite geschriebene Darstellung die Forderung zu stellen hat, dass sie sich nicht auf den Boden der im Allgemeinen plausibeln Thatsachen stellt, sondern dass sie auf alle diejenigen Dinge Rücksicht nimmt, die der strengen mathematischen Auffassung entsprechen\*).

---

\*) Das Gleiche gilt bezüglich der Raumgruppen, und des Satzes, dass sie stets eine Gruppe endlicher Translationen enthalten (S. 44).

Endlich habe ich an das dritte Capitel der Fedorow'schen Arbeit, in dem seine eigentlichen Structurvorstellungen skizzirt sind, einige Worte anzuknüpfen. Hier liegen mehr sachliche Differenzpunkte vor. Ich bedauere übrigens, dass ich die Fedorow'sche Structurtheorie früher nicht gekannt habe, ich würde sie sonst in meiner Schrift eingehender besprochen haben \*). Hier beschränke ich mich auf folgende Bemerkungen.

Denkt man sich einen beliebigen festen Körper aus individuellen Molekeln aufgebaut, so kommen, welcher Art dieser Körper auch sein mag, für seine Structur nur zwei Dinge in Betracht. Erstens die Qualität der einzelnen Molekeln, d. h. ihre Form, ihre chemische Natur, ihre Zusammensetzung, ihre Kräfte und deren Wirkungsweise u. s. w. u. s. w.; zweitens ihre gegenseitige Lagerung im Raume. Ein Drittes existirt überhaupt nicht. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob wir uns die körperliche Substanz als ein Continuum oder atomistisch vorstellen.

Unter diesen Körpern sind die Krystalle nach den modernen Structurtheorien — und hierin stimmt Fedorow mit den anderen Autoren überein — dadurch ausgezeichnet, dass alle ihre Molekeln gleichartig sind (d. h. congruent oder spiegelbildlich gleich) und eine regelmässige Anordnung im Raume besitzen.

Wie lassen sich nun von diesem Gesichtspunkte aus die Structuranschauungen Fedorow's charakterisiren? Wir müssen dazu nachsehen, wie er sich einerseits die constituirenden Krystallelemente, andererseits ihre räumliche Anordnung denkt. Die Einheit des Aufbaues bezeichnet Fedorow (S. 68) als »Molekelsphäre«. Sie hat die besondere Eigenschaft, dass sie von lauter Paaren paralleler und congruenter Flächen begrenzt wird, wie z. B. ein gewöhnliches Parallelepipeton. Sie enthält im Allgemeinen mehrere getrennte gleichartige Einzelkörperchen — sie mögen als Theilmoleküle bezeichnet werden — in sich; und zwar ist zu bemerken, dass sich Fedorow auch die Gesamtheit dieser Theilmoleküle regelmässig im Raume angeordnet denken muss. Die eigentliche Krystalleinheit ist ihm aber die Molekelsphäre; er sagt ausdrücklich, dass beim Wachsthum »bei dem Ansetzen jeder neuen Molekel eine Fläche . . der Molekelsphäre mit der entsprechenden Fläche einer früher abgesetzten Molekel zusammenfällt.« (S. 69). Die Molekelsphären erfüllen daher den Raum stetig und lückenlos.

Wie man sieht, bilden diese Ansichten eine directe Verallgemeinerung der Ideen von de la H a u y , resp. der Art, wie sich de la H a u y den Aufbau des Kalkspathes dachte. Die Fedorow'sche Verallgemeinerung besteht darin, dass sich Fedorow bezüglich der Form der Molekelsphäre nicht auf die Parallelepipeda beschränkt, sondern sich zunächst die Aufgabe

---

\*) Die ihr zu Grunde liegenden geometrischen Resultate Fedorow's waren mir — entgegen seiner Annahme — sehr wohl bekannt.

stellte, noch andere von parallelen Flächen begrenzte Figuren zu suchen — er nennt sie Paralleloëder — die eine lückenlose Raumerfüllung gestatten \*). Für jeden Krystall bildet eine dieser Figuren die constituirende Einheit; damit ist von selbst ihre Anordnung im Raume, also auch die dem Krystalle eigenthümliche Structurauffassung gegeben.

Für die Qualität der Molekel kommt neben der eigentlichen physikalischen und chemischen Natur noch die Vertheilung der in ihr enthaltenen gleichartigen Theilmoleküle in Frage. In Bezug hierauf ist aber nicht jede Bestimmung zulässig; vielmehr legen sich beim Wachstume die Molekeln resp. Molekelsphären so an einander, dass auch die in ihnen enthaltenen Theilmoleküle eine regelmässige Anordnung im Raume besitzen. Diese Vorstellung mag künstlich erscheinen; sie ist aber unumgänglich nothwendig, weil nur auf diese Weise der Molekelhaufen die ihm nöthige Symmetrie erwerben kann. Die Symmetrie ist daher nicht in dem Verhalten der individuellen Krystallbausteine zu einander, sondern in dem Verhalten der in ihnen befindlichen Theilmoleküle begründet \*\*).

Aus diesem Resultate ist nun zu folgern, dass die Differenz zwischen den Ansichten Fedorow's und denjenigen der anderen Autoren in letzter Linie auf eine Abweichung in der Bezeichnung hinausläuft. Auch bei Fedorow bleibt die regelmässige Vertheilung der einzelnen Theilmolekeln die Grundlage, auf die sich alle anderen Conceptionen aufbauen. Von meinem eigenen Standpunkte aus ziehe ich vor, diese Theilmoleküle auch als die constituirenden Elemente der Krystallmaterie zu betrachten. Ich verstehe aber sehr wohl die Möglichkeit, dass der Krystallograph mit Rücksicht auf die Wachsthumerscheinungen solche Ideen bevorzugt, wie sie de la Haüy, Bravais und nun auch Fedorow ausgebildet haben, und habe dem auch in meiner Schrift Ausdruck gegeben (S. 643).

In wie weit die besonderen Ansichten Fedorow's von diesem Gesichtspunkte aus auf den Beifall der Krystallographen zu rechnen haben, ist eine Frage, die sich meiner Beurtheilung naturgemäss entzieht.

---

\*) Vergl. die Anmerk. auf S. 264.

\*\*) Wenn Fedorow für seine Theorie hervorhebt, dass bei gleichen Symmetrieelementen doch verschiedene Structuren möglich sind, so ist dies nichts, was seiner Auffassung eigenthümlich ist. Man vergl. z. B. S. 345 und 609 meiner Schrift.