

SUR UNE EXTENSION D'UN PRINCIPE CLASSIQUE DE L'ANALYSE  
ET  
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MONOGÈNES  
DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER.

PAR

E. PHRAGMÉN ET ERNST LINDELÖF  
à STOCKHOLM                      à HELSINGFORS.

Les résultats que l'un de nous a fait connaître dans ce journal<sup>1</sup> sont susceptibles d'être notablement étendus et précisés, en même temps qu'on peut les rattacher aux principes élémentaires de l'Analyse. On arrive ainsi à certains théorèmes nouveaux d'un caractère assez général, qui semblent appelés à jouer un rôle dans l'étude des fonctions monogènes dans le voisinage de leurs points singuliers.

**I. Principe général.**

**1.** On connaît le rôle que joue dans l'Analyse le principe suivant :

*Soient dans le plan de la variable complexe  $x$  un domaine connexe,  $T$ , et une fonction monogène,  $f(x)$ , régulière à l'intérieur de ce domaine. Supposons que le module  $|f(x)|$  est uniforme dans le domaine  $T$  et vérifie pour tout point  $\xi$  de son contour cette condition :*

(A) *Quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\varepsilon$ , l'inégalité*

$$|f(x)| < C + \varepsilon,$$

*où  $C$  désigne une constante, est vérifiée dès que  $x$ , restant à l'intérieur de  $T$ , est suffisamment rapproché du point  $\xi$ .*

*Dans ces conditions on aura, pour tout point pris dans l'intérieur de  $T$ ,*

(I) 
$$|f(x)| \leq C,$$

*l'égalité étant d'ailleurs exclue si la fonction ne se réduit pas à une constante.*

---

<sup>1</sup> E. PHRAGMÉN, *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions*, Acta mathematica t. 28, p. 351—368.

Voici maintenant la généralisation de ce principe que nous avons annoncée, et dont nous développerons quelques conséquences dans la suite de ce travail :

**Principe général.** Admettons que le module de la fonction monogène  $f(x)$ , qui est supposée régulière à l'intérieur du domaine  $T$ , soit uniforme dans ce domaine et vérifie la condition (A) sur son contour, en exceptant les points d'un certain ensemble  $E$ .

Admettons d'autre part qu'il existe une fonction monogène  $\omega(x)$ , régulière et différente de zéro dans  $T$  et jouissant en outre des propriétés suivantes :

(a) A l'intérieur de  $T$  le module  $|\omega(x)|$  est uniforme et vérifie la condition

$$|\omega(x)| \leq 1.$$

(b) En désignant par  $\sigma, \varepsilon$  des nombres positifs aussi petits qu'on voudra et par  $\xi$  un point quelconque de l'ensemble  $E$ , on aura

$$|\omega^\sigma(x)f(x)| < C + \varepsilon,$$

dès que  $x$ , restant à l'intérieur de  $T$ , sera suffisamment rapproché du point  $\xi$ .

Dans ces conditions, la conclusion (1) reste valable pour tout point  $x$  intérieur au domaine  $T$ .

Considérons en effet la fonction

$$F(x) = \omega^\sigma(x) f(x).$$

Elle est d'abord régulière et son module uniforme dans le domaine  $T$ . En vertu de l'hypothèse (a) on a, d'autre part,  $|F(x)| \leq |f(x)|$  dans le même domaine, d'où il résulte que  $F(x)$  vérifie la condition (A) pour les points de son contour qui ne figurent pas dans l'ensemble  $E$ . Mais, en vertu de l'hypothèse (b), la condition (A) a lieu aussi pour les points de cet ensemble, et le principe rappelé ci-dessus nous apprend donc que  $|F(x)| \leq C$ , ou bien

$$|f(x)| \leq C |\omega(x)|^{-\sigma},$$

pour tout point à l'intérieur de  $T$ . Comme cette conclusion subsiste quelque petit qu'on ait choisi le nombre  $\sigma$ , nous arrivons bien au résultat voulu.

2. Il est possible de présenter les hypothèses admises ci-dessus sous une forme plus générale, qui nous sera utile dans la suite. Nous allons en effet démontrer cette proposition :

Les autres conditions restant les mêmes qu'au n° 1, admettons qu'on puisse diviser l'ensemble  $E$  en un nombre dénombrable d'ensembles partiels

$$E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots$$

de telle manière que, à chaque ensemble  $E_\nu$ , corresponde une fonction monogène  $\omega_\nu(x)$ , régulière et différente de zéro dans  $T$  et jouissant en outre des propriétés suivantes :

(a)' A l'intérieur de  $T$  le module  $|\omega_\nu(x)|$  est uniforme et vérifie la condition

$$|\omega_\nu(x)| \leq 1.$$

(b)'  $\sigma, \varepsilon$  désignant des nombres positifs aussi petits qu'on voudra et  $\xi_\nu$  un point quelconque de l'ensemble  $E_\nu$ , l'inégalité

$$|\omega_\nu^\sigma(x) f(x)| < C + \varepsilon$$

est vérifiée dès que  $x$ , restant à l'intérieur de  $T$ , est suffisamment rapproché de  $\xi_\nu$ .

Si ces conditions sont remplies, il existe une fonction  $\omega(x)$  jouissant des propriétés énoncées au n° 1, en sorte que l'inégalité (1) aura lieu à l'intérieur du domaine  $T$ .

Pour la démonstration, prenons d'abord une suite de nombres positifs décroissants  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots$  dont la somme est finie, puis une suite de domaines  $T_1, T_2, \dots, T_\nu, \dots$ , tous compris dans  $T$  et tels que tout point donné à l'intérieur de  $T$  appartienne à  $T_\nu$  dès que  $\nu$  est suffisamment grand.

Comme  $\omega_\nu(x)$  ne s'annule pas dans  $T$ , on pourra choisir le nombre positif  $\sigma_\nu$  de telle sorte qu'on ait

$$1 \leq |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)| \leq 1 + \varepsilon_\nu$$

tant que  $x$  reste dans le domaine  $T_\nu$ . Les exposants  $\sigma_\nu$  étant ainsi fixés, formons le produit

$$|\omega(x)| = |\omega_1^{\sigma_1}(x)| \cdot |\omega_2^{\sigma_2}(x)| \dots |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)| \dots$$

En vertu de l'inégalité ci-dessus, ce produit converge uniformément dans toute aire comprise dans le domaine  $T$  et n'ayant aucun point commun avec son contour, et représente par conséquent dans ce domaine le module d'une fonction monogène, régulière et différente de zéro.

On voit de suite que cette fonction  $\omega(x)$  vérifie la condition (a) du n° 1. D'autre part on a, pour chaque indice  $\nu$ ,

$$|\omega(x)| \leq |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)|,$$

d'où

$$|\omega^\sigma(x) f(x)| \leq |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x) \cdot f(x)|,$$

et, en tenant compte de l'hypothèse (b) ci-dessus, on en conclut que la fonction  $\omega(x)$  vérifie aussi la condition (b) pour les points faisant partie de l'un quelconque des ensembles  $E_\nu$ , c'est à dire pour tout point de l'ensemble  $E$ .

Donc la fonction  $\omega(x)$  jouit de toutes les propriétés énoncées au n° 1, ce que nous voulions établir.

## II. Quelques applications du principe général.

3. Comme première application du principe établi ci-dessus nous démontrerons la proposition suivante :

*Soient un domaine connexe  $T$  et une fonction monogène  $f(x)$  régulière à l'intérieur de ce domaine. On suppose*

*1° que la condition (A) du n° 1 est vérifiée pour les points situés sur le contour de  $T$ , en exceptant les points faisant partie d'un certain ensemble dénombrable  $E$  ;*

*2° que,  $x_v$  étant un point quelconque de  $E$  et  $\varepsilon$  un nombre positif aussi petit qu'on voudra, le produit*

$$(x - x_v)^\varepsilon f(x)$$

*tend uniformément vers zéro lorsque  $x$  tend vers  $x_v$ , en restant à l'intérieur de  $T$ .*

*Cela étant, on aura*

$$(1) \quad |f(x)| \leq C$$

*dans tout le domaine  $T$ .*

Posons en effet

$$\bar{\omega}_v(x) = \frac{x - x_v}{x - a},$$

$a$  étant un point quelconque situé en dehors du domaine  $T^1$ . Cette expression représente une fonction monogène, régulière et différente de zéro à l'intérieur du domaine  $T$ , et, comme elle prend une valeur finie pour  $x = \infty$ , son module reste dans tout ce domaine inférieur à une certaine quantité positive  $M_v$ . En ayant égard à la condition 2° ci-dessus, on voit donc que la fonction

$$\omega_v(x) = \frac{\bar{\omega}_v(x)}{M_v}$$

jouit bien des propriétés (a)' et (b)' du n° 2, d'où résulte notre proposition.

4. Voici une autre conséquence de notre principe, dont nous indiquerons dans la suite différentes généralisations :

<sup>1</sup> Si le point  $x_v$  est à l'infini, on posera  $\bar{\omega}_v(x) = \frac{1}{x - a}$ . Si le domaine  $T$  avec ces points limites embrasse tout le plan, on choisira pour  $a$  un point régulier de  $f(x)$  situé à l'intérieur de  $T$ , et on exclura provisoirement du domaine  $T$  un petit voisinage du point  $a$ . Notre démonstration sera alors applicable au domaine ainsi formé et, en désignant par  $C'$  la plus grande valeur de  $|f(x)|$  dans le dit voisinage de  $a$  et par  $C''$  la plus grande des deux constantes  $C$  et  $C'$ , on pourra en conclure que  $|f(x)| \leq C''$  dans tout le domaine  $T$ . Or on a nécessairement  $C'' = C$ , car si on avait  $C'' > C$ , c'est qu'on aurait  $C' > C$ ,  $C'' = C'$ . Dans ce cas  $|f(x)|$  prendrait sa valeur maxima  $C'$  en un point situé à l'intérieur de  $T$  et on devrait avoir  $|f(x)| = C'$  dans tout ce domaine, ce qui est en contradiction avec la condition 1°.

Soit une fonction monogène  $f(x)$  de la variable complexe  $x \equiv re^{i\varphi}$  qui, dans l'angle  $T$  défini par les inégalités

$$(2) \quad -\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha},$$

est régulière et jouit des propriétés suivantes:

1° la condition (A) du n° 1 est remplie pour tout point du contour de  $T$  situé à une distance finie de l'origine;

2° il existe un nombre positif  $k < \alpha$  tel que le produit

$$e^{-rk} f(x)$$

tende uniformément vers zéro à l'intérieur de  $T$  lorsque  $r$  croît indéfiniment.

Dans ces conditions, l'inégalité (1) est vérifiée à l'intérieur du domaine  $T$ .

La démonstration est immédiate. Posons en effet

$$\omega(x) = e^{-x^{k'}} \quad (k < k' < \alpha),$$

fonction qui est évidemment régulière et différente de zéro dans  $T$ . Son module s'écrit

$$|\omega(x)| = e^{-r^{k'} \cos k'\varphi},$$

et l'on aura donc à l'intérieur de  $T$

$$|\omega(x)| < e^{-\beta r^{k'}},$$

en désignant par  $\beta$  la quantité positive  $\cos\left(\frac{k'\pi}{\alpha}\right)$ . Il en résulte que  $|\omega(x)| < 1$  dans le domaine en question et, d'autre part, que le produit

$$\omega^\sigma(x) f(x),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\sigma$ , tend uniformément vers zéro lorsque  $x$ , restant à l'intérieur de  $T$ , tend vers le point à l'infini (qui est dans ce cas l'unique point de l'ensemble  $E$ ). La fonction  $\omega(x)$  vérifie donc les conditions énoncées au n° 1 et, par suite, notre proposition est démontrée.

Signalons, en passant, la conclusion suivante, qu'on déduit immédiatement de cette proposition en tenant compte de la remarque faite au début du n° 5.

Si l'on sait que l'ordre d'une fonction entière donnée n'est pas supérieur à un nombre fini  $\varrho$  et que son module reste au-dessous d'une limite finie sur certains rayons, disposés de telle manière que l'angle compris entre deux rayons consécutifs quelconques soit inférieur à  $\frac{\pi}{\varrho}$ , on peut affirmer que la fonction se réduit à une constante.

5. La démonstration donnée au n° 4 reste valable dans le cas où  $T$  est un domaine connexe quelconque faisant partie de l'angle (2). D'une manière générale, il est permis de choisir pour  $T$  tout domaine qui pourra être enfermé

dans un angle d'ouverture  $\frac{\pi}{\alpha}$ , quelle que soit son orientation. En effet, en effectuant un déplacement convenable, représenté analytiquement par une certaine transformation linéaire  $x' = ax + b$ , on pourra toujours ramener cet angle dans la position (2), et la fonction donnée se trouve alors transformée en une fonction de  $x'$  à laquelle s'applique notre raisonnement.<sup>1</sup>

Mais voici une remarque plus intéressante. Nous montrerons en effet que, dans la proposition du n° 4, il est permis de substituer à la condition 2° la suivante qui est plus générale:

*Quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\varepsilon$ , le produit*

$$e^{-\varepsilon r^\alpha} f(x)$$

*tend uniformément vers zéro dans le domaine (2) lorsque  $r$  croît indéfiniment.*

A cet effet, considérons l'expression

$$F(x) = e^{-\eta x^\alpha} f(x),$$

$\eta$  étant un nombre positif arbitrairement petit mais fixe.

Comme  $|e^{-\eta x^\alpha}| < 1$  dans l'angle (2), on voit d'abord que  $F(x)$  vérifie la condition (A) aux points  $x$  faisant partie du contour de cet angle et situés à une distance finie de l'origine.

D'après la condition admise ci-dessus nous savons, d'autre part, que  $F(x)$  tend vers zéro lorsque le point  $x$  s'éloigne indéfiniment suivant un rayon quelconque compris dans l'angle (2) et, en particulier, suivant l'axe réel positif. Le module  $|F(x)|$  aura donc une limite supérieure finie  $C'$  sur cet axe.

Soit  $C''$  la plus grande des quantités  $C$  et  $C'$ , et désignons par  $T_1$  et  $T_2$  les moitiés de l'angle (2) situées respectivement au-dessus et au-dessous de l'axe réel.

Sur les contours des domaines  $T_1$  et  $T_2$ , la fonction  $F(x)$  vérifie, à distance finie, la condition (A) où l'on aura substitué  $C''$  à  $C$ , et dans chacun de ces domaines le produit  $e^{-r^\alpha} F(x)$  tend uniformément vers zéro en même temps que  $\frac{1}{r}$ , d'après l'hypothèse admise ci-dessus. Comme  $T_1$  et  $T_2$  occupent chacun un angle d'ouverture  $\frac{\pi}{2\alpha}$ , il résulte dès lors de la proposition du n° 4 que

$$(3) \quad |F(x)| \leq C''$$

dans chacun de ces domaines et, par suite, dans tout le domaine (2).

---

<sup>1</sup> Le rapport  $\left| \frac{x'}{x} \right|$  tendant vers l'unité lorsque le point  $x$  s'éloigne indéfiniment, on constate immédiatement que la fonction transformée vérifie une condition de même forme que la condition 2° du n° 4.

Mais on aura nécessairement  $C' \leq C$  et, par suite,  $C'' = C$ .

En effet, si l'on avait  $C' > C$ , d'où  $C'' = C'$ , le module  $|F(x)|$  prendrait la valeur  $C'$  en un point de l'axe réel situé à l'intérieur du domaine (2). Comme, d'après (3),  $|F(x)|$  ne dépasse la valeur  $C$  en aucun point de ce domaine, on y devrait donc avoir identiquement  $|F(x)| = C'$ , ce qui est en contradiction avec la condition 1° du n° 4.

Il est donc démontré que  $|F(x)| \leq C$ ,<sup>1</sup> ou bien

$$|f(x)| \leq C |e^{\eta x^\alpha}|$$

à l'intérieur de (2), et comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit  $\eta$ , il en résulte bien qu'on a dans tout ce domaine  $|f(x)| \leq C$ , c. q. f. d.

La démonstration subit de légères modifications dans le cas où  $T$  est un domaine de forme quelconque faisant partie de l'angle (2). Il peut alors arriver que ce domaine soit divisé par l'axe réel en plusieurs portions séparées, dont quelques-unes sont finies tandis que d'autres s'étendent à l'infini. Pour les premières l'inégalité (3) découle immédiatement du principe classique rappelé au début, pour les autres elle se démontre comme ci-dessus.

La remarque faite au début de ce numéro permet d'étendre le résultat qui précède à tout domaine qui pourra être enfermé dans un angle d'ouverture  $\frac{\pi}{\alpha}$ , et nous avons ainsi établi ce théorème:

*Soit dans le plan de la variable complexe  $x \equiv re^{i\varphi}$  un domaine connexe quelconque  $T$  qu'on puisse entourer d'un angle d'ouverture  $\frac{\pi}{\alpha}$ , et soit, d'autre part,  $f(x)$  une fonction monogène qui, à l'intérieur de ce domaine, est régulière et jouit des propriétés suivantes:*

1° *Le module  $|f(x)|$  est uniforme dans  $T$ , et la condition (A) est vérifiée pour tout point à distance finie situé sur le contour de  $T$ .*

2° *Quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\varepsilon$ , le produit*

$$e^{-\varepsilon r^\alpha} f(x)$$

*tend uniformément vers zéro à l'intérieur de  $T$  lorsque  $r$  croît indéfiniment.*

*Dans ces conditions on aura*

$$|f(x)| \leq C$$

*pour tout point intérieur au domaine  $T$ .*

---

<sup>1</sup> L'inégalité (3) une fois établie, cette conclusion pourrait se déduire aussi de la proposition démontrée au n° 4 ou de celle du n° 3.

6. En effectuant un changement de variable, on peut modifier de différentes manières ce théorème.

Faisons d'abord  $x' = \log x$ ; au domaine (2) correspondra, dans le plan de la variable  $x'$ , une bande comprise entre deux droites parallèles dont la distance est  $\frac{\pi}{\alpha}$ , et l'on en conclut facilement ce résultat:

*Soient un domaine connexe,  $T$ , faisant partie d'une bande de largeur  $\frac{\pi}{\alpha}$ , et une fonction monogène,  $f(x)$ , régulière à l'intérieur de ce domaine, dont le module est uniforme dans  $T$  et vérifie la condition (A) sur son contour (à distance finie). On suppose d'ailleurs que le produit*

$$e^{-\varepsilon e^{ar}} f(x),$$

*quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ , tend uniformément vers zéro dans le domaine en question lorsque  $r$  croît indéfiniment.*

*Cela étant, on aura  $|f(x)| \leq C$  pour tout point intérieur à  $T$ .*

En posant

$$x' = Cx^{\beta+i}$$

$C$  et  $\beta$  étant des constantes positives, transformation qui fait correspondre au domaine (2) la portion du plan des  $x'$  comprise entre deux spirales logarithmiques, on établit de même cet autre résultat:

*Supposons que la fonction monogène  $f(x)$  est régulière et son module uniforme dans un domaine connexe  $T$  compris entre les spirales logarithmiques*

$$r = e^{(\varphi - \varphi_0) \cot \omega} \quad \text{et} \quad r = e^{(\varphi - \varphi_0 - \frac{\pi}{\alpha}) \cot \omega},$$

*qu'elle vérifie la condition (A) sur le contour de  $T$  (à distance finie) et que, à l'intérieur de ce domaine, le produit*

$$e^{-\varepsilon r^{\frac{\alpha}{\cos^2 \omega}}} f(x)$$

*tend uniformément vers zéro lorsque  $r$  augmente indéfiniment, quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ .*

*Dans ces conditions, on aura  $|f(x)| \leq C$  pour tout point intérieur au domaine  $T$ .*

7. Nous indiquerons encore en quelques mots une autre généralisation de la proposition établie au n° 4.

Considérons une suite de courbes,  $S_1, S_2, \dots, S_v, \dots$ , reliant les deux côtés de l'angle (2) et dont les distances de l'origine augmentent indéfiniment, et désignons par  $M_v$  la plus grande valeur que prend le module de l'expression  $e^{-r^k} f(x)$  sur la courbe  $S_v$ . Nous admettrons qu'il est possible de choisir les courbes  $S_v$  de telle manière qu'on ait



$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} M_\nu = 0.$$

Nous allons voir que la proposition dont il s'agit ne cesse pas d'avoir lieu si, à la condition 2°, on substitue cette dernière condition, qui est évidemment plus générale.

En effet, il résulte de cette condition que, le nombre positif  $\sigma$  étant donné aussi petit qu'on voudra, le module maximum  $\bar{M}_\nu$  du produit

$$e^{-\sigma x^{k'}} f(x) \quad (k < k' < \alpha)$$

sur la courbe  $S_\nu$  tend vers zéro lorsque  $\nu$  augmente indéfiniment. Si l'on se donne arbitrairement un point  $x$  compris dans le domaine (2), on pourra donc choisir  $\nu$  de telle sorte que ce point soit intérieur à la courbe  $S_\nu$  et que l'on ait en même temps  $\bar{M}_\nu < C$ . D'après le principe rappelé au n° 1, le module du produit ci-dessus est donc inférieur à  $C$  au point considéré, et, comme ce résultat subsiste quelque petit que soit  $\sigma$ , on aura bien  $|f(x)| \leq C$ .

En tenant compte de la remarque faite au début du n° 5, on arrive ainsi à ce résultat:

*Soit une fonction monogène,  $f(x)$ , régulière dans un domaine  $T$  tel qu'il est dit dans le théorème du n° 5, et admettons que son module soit uniforme dans  $T$  et vérifie la condition (A) sur son contour, en exceptant le point à l'infini.*

*Dans ces conditions, deux cas peuvent se présenter:*

*Ou bien on aura  $|f(x)| \leq C$  pour tout point pris dans l'intérieur du domaine  $T$ .*

*Ou bien, en désignant par  $M(r)$  le maximum de  $|f(x)|$  sur la portion du cercle  $|x|=r$  intérieure à  $T$ , l'inégalité*

$$M(r) > e^{r^{\alpha-\varepsilon}}$$

*sera vérifiée dès que  $r$  dépassera une certaine limite, le nombre positif  $\varepsilon$  étant donné aussi petit qu'on voudra.*

A cette dernière inégalité on pourrait d'ailleurs substituer la suivante qui est plus précise:

$$M(r) > e^{V(r)}$$

où  $V$  désigne une expression de la forme<sup>1</sup>

$$V(r) = \frac{r^\alpha}{\log r \cdot \log^{(2)} r \cdot \dots \log^{(\nu-1)} r \cdot (\log^{(\nu)} r)^{1+\sigma}}$$

$\sigma$  étant une quantité positive et  $\nu$  un entier positif quelconque.

<sup>1</sup> Pour abrégé, nous écrivons

$$\log(\log x) = \log^{(2)} x, \log[\log^{(2)} x] = \log^{(3)} x, \dots$$

Il semble même probable qu'il existe toujours, dans cette seconde hypothèse, une constante positive  $\eta$  telle qu'on ait

$$M(r) > e^{\eta r^\alpha}$$

pour  $r$  suffisamment grand. Mais il paraît difficile d'en trouver une démonstration.

8. Les résultats des nos 4 et 5 nous permettent de préciser comme il suit le théorème établi au n° 3:

*Admettons que, d'un point donné  $x_v$  de l'ensemble  $E$ , on puisse tracer deux arcs de cercles n'ayant aucun point à l'intérieur du domaine  $T$ , et soit  $A_v$  l'angle compris entre ces arcs (du côté du domaine  $T$ ).*

*Dans ces conditions il est permis de remplacer la condition 2° du n° 3, en tant qu'il s'agit du point  $x_v$  considéré ici, par l'une ou l'autre des conditions suivantes:*

*Si  $A_v = \frac{\pi}{\alpha}$  ( $> 0$ ), on suppose que le produit*

$$e^{-\frac{\varepsilon}{|x-x_v|^\alpha}} f(x),$$

*quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\varepsilon$ , tend uniformément vers zéro lorsque  $x$  tend vers  $x_v$ , en restant à l'intérieur de  $T$ .*

*Si  $A_v = 0$ , il suffit d'admettre que la même condition soit remplie pour le produit*

$$e^{-\varepsilon \frac{\alpha}{|x-x_v|}} f(x),$$

*le nombre  $\alpha$  étant cette fois égal à  $2\pi$  divisé par la valeur numérique de la différence entre les courbures des arcs envisagés.*

Il résulte d'abord du théorème établi au n° 2 que le résultat du n° 4 reste encore vrai dans le cas où la condition (A) cesse d'être remplie pour un nombre dénombrable de points situés sur le contour de  $T$ , pourvu que la condition 2° du n° 3 soit vérifiée en ces mêmes points.

On constate ensuite que le résultat établi au n° 5 comporte une généralisation analogue.

Or il est évident que, dans l'une et l'autre des hypothèses envisagées ci-dessus, les points de l'ensemble  $E$ , compris dans un certain entourage  $c_v$  du point  $x_v$ , sont tels que la fonction  $f(x)$  reste finie dans leur voisinage et que, par suite, la condition 2° du n° 3 s'applique à chacun de ces points. D'autre part, on voit facilement qu'il existe un changement de variable,  $x = \varphi(x')$ , réalisant la représentation conforme d'un certain voisinage  $t_v$  du point  $x_v$ , pris dans l'intérieur de  $c_v$ , sur une aire  $T_v$  faisant partie de l'angle (2), et que la fonction  $\bar{f}(x')$  qui résulte de  $f(x)$  par ce changement est telle que le produit

$$e^{-\varepsilon|x'|^a} \bar{f}(x')$$

tend uniformément vers zéro lorsque  $x'$  tend vers l'infini en restant à l'intérieur de  $T_v$ , et cela quelque petit que soit  $\varepsilon$ . A l'aide du théorème du n° 5, généralisé comme il a été dit, on peut en conclure que  $|\bar{f}(x')|$  reste au-dessous d'une limite finie dans  $T_v$ . Il en est donc de même de  $|f(x)|$  dans l'aire  $t_v$ , et, par suite, la fonction  $f(x)$  vérifie la condition 2° du n° 3 aussi au point  $x_v$ .

Les hypothèses admises ci-dessus se ramènent donc à celles du n° 3.

### III. Quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier.

9. Les propositions que nous venons de démontrer conduisent à certains résultats nouveaux relatifs aux propriétés asymptotiques d'une fonction monogène dans le voisinage d'un point singulier isolé. Pour simplifier le langage, nous admettrons que le point singulier qu'il s'agit d'étudier ait été rejeté à l'infini à l'aide d'un changement de variable. D'ailleurs, nous nous occuperons uniquement des singularités d'ordre fini, mais des résultats que nous allons établir on pourrait tirer aussi certaines conséquences relatives à d'autres points singuliers, en s'appuyant sur des considérations du genre de celles exposées au n° 6.

Soit donc une fonction monogène  $f(x)$  de la variable complexe  $x \equiv re^{i\varphi}$  qui vérifie les conditions suivantes:

1° Elle est régulière dans l'angle

$$(4) \quad a < \varphi < b$$

dès que  $r$  est supérieur à une certaine limite.

2° A l'intérieur de cet angle,  $f(x)$  est d'un ordre fini  $\rho$ , en sorte que, quelque petit qu'on se donne le nombre positif  $\varepsilon$ , l'égalité

$$\limsup_{r=\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0$$

a lieu uniformément pour les valeurs  $\varphi$  comprises dans l'intervalle (4), tandis que cette condition n'est remplie pour aucune valeur négative de  $\varepsilon$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> En d'autres termes, pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ , l'inégalité

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

a lieu dans l'angle (4) dès que  $r$  est supérieur à une certaine limite, et l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

du moins pour une infinité de points  $x$  tendant vers l'infini et intérieurs à ce même angle, tandis que l'une au moins de ces conditions cessera d'être remplie lorsque  $\varepsilon$  est négatif.

Soit  $V(x)$  une autre fonction monogène jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle est régulière dans l'angle

$$(5) \quad -\omega < \varphi < \omega$$

dès que  $r$  est supérieur à une certaine limite,  $\omega$  désignant la plus petite des quantités

$$\frac{\pi}{2\varrho} \text{ et } \frac{b-a}{2}.$$

2° Elle prend des valeurs réelles et positives pour les valeurs réelles et positives de  $x$  qui dépassent une limite donnée.

3° Lorsque  $r$  augmente indéfiniment, le rapport

$$\frac{V(r)}{r^{\varrho + \varepsilon}}$$

tend régulièrement vers zéro, tandis que le rapport

$$\frac{V(r)}{r^{\varrho - \varepsilon}}$$

admet l'infini pour limite supérieure, le nombre  $\varepsilon$  étant donné aussi petit que l'on veut.

4°  $r$  tendant vers l'infini, l'expression

$$\frac{V(re^{i\varphi})}{V(r)}$$

tend uniformément vers  $e^{i\varphi}$  pour les valeurs  $\varphi$  comprises dans l'intervalle (5).

Telle est, par exemple, toute fonction de la forme

$$(6) \quad x^{\varrho} (\log x)^{\alpha_1} (\log \log x)^{\alpha_2} (\log \log \log x)^{\alpha_3} \dots$$

Cela posé, nous allons étudier la fonction réelle  $h(\varphi)$  de la variable réelle  $\varphi$  définie par l'égalité asymptotique<sup>1</sup>

$$(7) \quad h(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{V(r)}.$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle (4), mais parmi ses valeurs possibles figurent aussi les valeurs  $+\infty$  et  $-\infty$ .

<sup>1</sup> Si  $h(\varphi)$  prend une valeur finie pour une valeur donnée de  $\varphi$ , on aura, d'après cette définition, quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ ,

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{[h(\varphi) + \varepsilon] V(r)}$$

dès que  $r$  dépassera une certaine limite, et d'autre part l'inégalité

$$|f(re^{i\varphi})| > e^{[h(\varphi) - \varepsilon] V(r)}$$

subsistera du moins pour une infinité de valeurs  $r$  tendant vers l'infini.

Nous ferons l'étude complète de la fonction  $h(\varphi)$  dans le cas où  $\varrho$  est positif, et nous ajouterons ensuite, au n° 18, quelques mots relatifs au cas  $\varrho = 0$ .

Lorsque  $\varrho > 0$ , la propriété caractéristique de la fonction  $h(\varphi)$  se démontre de la manière la plus facile en la comparant à une fonction auxiliaire de la forme<sup>1</sup>

$$(8) \quad H(\varphi) = A \cos \varrho \varphi + B \sin \varrho \varphi,$$

dépendant linéairement des deux paramètres  $A$  et  $B$ . Cette fonction  $H(\varphi)$  se trouve parfaitement déterminée si on lui impose les conditions

$$(9) \quad H(\varphi_1) = h_1, \quad H(\varphi_2) = h_2,$$

$h_1$  et  $h_2$  désignant des quantités réelles et finies, et  $\varphi_1, \varphi_2$  des angles quelconques dont la différence ne soit pas un multiple exact de  $\frac{\pi}{\varrho}$ . En effet, on tire immédiatement de ces conditions

$$\begin{aligned} A \sin \varrho (\varphi_2 - \varphi_1) &= h_1 \sin \varrho \varphi_2 - h_2 \sin \varrho \varphi_1, \\ B \sin \varrho (\varphi_2 - \varphi_1) &= -h_1 \cos \varrho \varphi_2 + h_2 \cos \varrho \varphi_1. \end{aligned}$$

On voit que  $A$  et  $B$  sont fonctions continues de  $h_1, h_2, \varphi_1, \varphi_2$  tant que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  satisfont à l'inégalité

$$0 < |\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}.$$

Si  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\pi}{\varrho}$ , les conditions (9) ne sont compatibles que si l'on a  $h_1 + h_2 = 0$ .

Dans ce cas, ces conditions se réduisent à une seule, et il existe une infinité de fonctions  $H(\varphi)$  qui les vérifient.

10. Après ces préliminaires, nous allons établir le théorème fondamental qui suit:

*Soient deux fonctions monogènes,  $f(x)$  et  $V(x)$ , telles qu'il est dit au n° 9, et admettons en outre que les inégalités*

$$(10) \quad \frac{\log |f(re^{i\varphi_1})|}{V(r)} < h_1 + \varepsilon, \quad \frac{\log |f(re^{i\varphi_2})|}{V(r)} < h_2 + \varepsilon$$

*subsistent dès que  $r$  dépasse une certaine limite,  $\varepsilon$  désignant un nombre positif qu'on*

<sup>1</sup> Il est commode, dans ce qui suit, de se représenter les fonctions  $H(\varphi)$  et  $h(\varphi)$  par des courbes, en prenant  $\varphi$  pour abscisse. A la première de ces fonctions correspondra une sinusoïde de période  $\frac{2\pi}{\varrho}$ , oscillant autour de l'axe des abscisses.

Dans cette représentation, les propriétés de la fonction  $h(\varphi)$  démontrées aux nos 13—17 deviennent à peu près intuitives, dès qu'on s'est bien rendu compte de la signification géométrique des propositions établies au n° 12.

peut choisir arbitrairement petit,  $h_1$  et  $h_2$  des quantités finies quelconques, et  $\varphi_1, \varphi_2$  des valeurs de  $\varphi$  comprises dans l'intervalle (4) et vérifiant la condition

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}.$$

Cela étant, si l'on désigne par  $H_{1,2}(\varphi)$  la fonction (8) que déterminent univoquement les conditions

$$H_{1,2}(\varphi_1) = h_1, \quad H_{1,2}(\varphi_2) = h_2,$$

on aura nécessairement, quelque petit que soit  $\varepsilon$ ,

$$(11) \quad \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{V(r)} < H_{1,2}(\varphi) + \varepsilon$$

dès que  $\varphi$  satisfera aux inégalités

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

et que  $r$  dépassera une certaine limite finie, indépendante de  $\varphi$ .

Pour la démonstration, nous formerons d'abord la fonction  $H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi)$  de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$(12) \quad H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi_1) = h_1 + \sigma, \quad H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi_2) = h_2 + \sigma,$$

$\sigma$  désignant une quantité positive arbitraire. Nous écrirons cette fonction sous la forme

$$H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) = A^{(\sigma)} \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + B^{(\sigma)} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

en posant

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Puis nous formerons l'expression

$$K(x) = e^{-(A^{(\sigma)} - iB^{(\sigma)}) V(xe^{-i\varphi_0})}.$$

Cette expression définit évidemment une fonction régulière pour  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  et pour les valeurs suffisamment grandes de  $r$ . D'autre part, d'après les propriétés de  $V(x)$ , on aura

$$|K(x)| = e^{-[H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) + \varepsilon(r, \varphi)] V(r)},$$

$\varepsilon(r, \varphi)$  tendant uniformément vers zéro pour  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  lorsque  $r$  augmente indéfiniment. Il en résulte, d'après (10) et (12), que le module du produit

$$F(x) = K(x) \cdot f(x)$$

reste inférieur à l'expression

$$e^{-V(r) [\sigma - \varepsilon + \varepsilon(r, \varphi)]}$$

pour  $\varphi = \varphi_1$  et pour  $\varphi = \varphi_2$  dès que  $r$  dépasse une certaine limite, et cela quelque petit que soit  $\varepsilon$ .

Le module de  $F(x)$  restera donc inférieur à une certaine constante  $C$  sur tout le bord du domaine

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad r \geq R,$$

si  $R$  est choisi suffisamment grand, et comme  $F(x)$  est dans ce domaine d'un ordre au plus égal à  $\varrho$ , tandis que le domaine fait partie d'un angle plus petit que  $\frac{\pi}{\varrho}$ , il résulte des nos 4 et 5 qu'on a  $|F(x)| < C$ , ou bien

$$|f(x)| < C e^{[H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) + \varepsilon(r, \varphi)] V(r)},$$

pour tout point intérieur au domaine en question.

En observant que  $H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi)$  converge uniformément vers  $H_{1,2}(\varphi)$  lorsque  $\sigma$  tend vers zéro, on en conclut bien que l'inégalité (11) a lieu pour  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  dès que  $r$  est suffisamment grand, c. q. f. d.

II. Avant de poursuivre les conséquences qu'on peut tirer de ce théorème fondamental pour l'étude de la fonction  $h(\varphi)$ , nous allons en déduire un résultat dont nous aurons besoin plus loin.

Si, dans un intervalle  $a' \leq \varphi \leq b'$  compris tout entier à l'intérieur de l'intervalle (4), on a constamment

$$h(\varphi) \leq A,$$

$A$  étant une constante, on aura nécessairement, quelque petit que soit  $\varepsilon$ ,

$$(13) \quad |f(x)| < e^{(A + \varepsilon) V(r)}$$

dès que  $\varphi$  satisfera aux inégalités

$$a' \leq \varphi \leq b'$$

et que  $r$  dépassera une certaine limite finie, indépendante de  $\varphi$ .

En effet, divisons l'intervalle en question en un nombre fini d'intervalles partiels, chacun inférieur ou égal à  $\frac{2}{\varrho} \arccos \frac{A}{A + \frac{1}{2}\varepsilon}$ . Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les valeurs extrêmes d'un tel intervalle. En faisant  $h_1 = h_2 = A$  on trouvera

$$H_{1,2}(\varphi) = \frac{A \cos \varrho \left( \varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}{\cos \varrho \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}},$$

et on aura par conséquent

$$H_{1, 2}(\varphi) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le théorème du n° 10 nous permet donc de conclure qu'on aura

$$|f(x)| < e^{(A + \varepsilon)V(r)}$$

pour  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , dès que  $r$  dépassera une certaine limite finie. On déterminera de la sorte une limite pour chacun des intervalles en lesquels l'intervalle  $a' \leq \varphi \leq b'$  a été divisé; dès que  $r$  sera supérieur à la plus grande de ces limites, l'inégalité (13) sera satisfaite dans tout l'intervalle  $a' \leq \varphi \leq b'$ .

Tacitement, nous avons supposé ci-dessus la constante  $A$  positive; si elle est négative ou nulle, la démonstration se simplifie.

12. Le théorème du n° 10 conduit immédiatement à cette propriété fondamentale de la fonction  $h(\varphi)$ , définie par l'égalité (7):

*Admettons que, pour deux valeurs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\varphi$ , comprises dans l'intervalle*

(4) *et telles que  $|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}$ , on ait*

$$h(\varphi_1) \leq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) \leq H(\varphi_2),$$

*$H(\varphi)$  désignant une fonction déterminée de la forme (8); on aura aussi*

$$h(\varphi) \leq H(\varphi)$$

*pour toute valeur de  $\varphi$  intermédiaire entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .*

Par un raisonnement facile on en conclut cette autre propriété de  $h(\varphi)$ :

*Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  trois valeurs de  $\varphi$  telles que  $|\varphi_3 - \varphi_1| < \frac{\pi}{\varrho}$  et que  $\varphi_2$  soit intermédiaire entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_3$ . Si*

$$h(\varphi_1) \leq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) \geq H(\varphi_2),$$

*on aura nécessairement*

$$h(\varphi_3) \geq H(\varphi_3).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait choisir la quantité positive  $\sigma$  de telle manière qu'on eût  $h(\varphi_3) \leq H(\varphi_3) - \sigma$ . En posant

$$\bar{H}(\varphi) = H(\varphi) - \sigma \frac{\sin \varrho(\varphi - \varphi_1)}{\sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_1)},$$

ce qui est toujours une fonction de la forme (8), on aurait alors



d'où  $\bar{H}(\varphi_1) = H(\varphi_1)$ ,  $\bar{H}(\varphi_2) < H(\varphi_2)$ ,  $\bar{H}(\varphi_3) = H(\varphi_3) - \sigma$ ,

$$h(\varphi_1) \leq \bar{H}(\varphi_1), \quad h(\varphi_3) \leq \bar{H}(\varphi_3).$$

D'après le théorème du n° 10, il en résulterait  $h(\varphi_2) \leq \bar{H}(\varphi_2)$  et, par suite,

$$h(\varphi_2) < H(\varphi_2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

En appliquant deux fois de suite la proposition qui précède, on arrive au résultat suivant qui est, à un certain point de vue, plus général :

*Étant données deux valeurs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\varphi$ , telles que*

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\rho},$$

*admettons que  $h(\varphi_2)$  soit finie et que*

$$h(\varphi_1) \leq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) = H(\varphi_2),$$

*$H(\varphi)$  désignant une fonction déterminée de la forme (8); on aura nécessairement*

$$h(\varphi) \geq H(\varphi)$$

*tant que  $|\varphi - \varphi_2| < \frac{\pi}{\rho}$  et que  $\varphi - \varphi_2$  et  $\varphi_1 - \varphi_2$  seront de signes différents.*

Supposons par exemple  $\varphi_1 < \varphi_2$ , et choisissons une valeur  $\varphi_3$  de telle sorte que  $\varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_1 + \frac{\pi}{\rho}$ . Une première application de la proposition ci-dessus nous donnera

$$h(\varphi) \geq H(\varphi) \text{ pour } \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3.$$

Puis, partant des relations

$$h(\varphi_2) = H(\varphi_2), \quad h(\varphi_3) \geq H(\varphi_3),$$

et appliquant encore une fois la même proposition, nous trouvons

$$h(\varphi) \geq H(\varphi) \text{ pour } \varphi_3 \leq \varphi < \varphi_2 + \frac{\pi}{\rho}.$$

L'inégalité  $h(\varphi) \geq H(\varphi)$  subsiste donc pour  $\varphi_2 \leq \varphi < \varphi_2 + \frac{\pi}{\rho}$ , c. q. f. d.

13. En resserrant un peu les hypothèses, nous démontrerons maintenant ce résultat assez précis :

*Admettons que*

$$h(\varphi_1) \leq h_1, \quad h(\varphi_2) = h_2, \quad h(\varphi_3) \leq h_3,$$

$h_1, h_2, h_3$  désignant des quantités finies quelconques et  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  des valeurs de  $\varphi$  comprises dans l'intervalle (4) et satisfaisant aux inégalités

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho}.$$

Cela étant, la fonction  $h(\varphi)$  reste finie et continue pour  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_3$  et, de plus, le rapport

$$(14) \quad \frac{h(\varphi + \delta) - h(\varphi)}{\delta}$$

reste compris entre des limites finies lorsque  $\delta$  tend vers zéro.

En effet, en désignant par  $H_{1,2}(\varphi)$  la fonction (8) qui prend pour  $\varphi = \varphi_1$  la valeur  $h_1$  et pour  $\varphi = \varphi_2$  la valeur  $h_2$ , et, d'une manière analogue, par  $H_{2,3}(\varphi)$  la fonction de la même forme qui prend pour  $\varphi = \varphi_2$  la valeur  $h_2$  et pour  $\varphi = \varphi_3$  la valeur  $h_3$ , on aura, d'après les propriétés démontrées au n° 12,

$$\begin{aligned} \text{pour } \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2: & \quad H_{2,3}(\varphi) \leq h(\varphi) \leq H_{1,2}(\varphi), \\ \text{pour } \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3: & \quad H_{1,2}(\varphi) \leq h(\varphi) \leq H_{2,3}(\varphi). \end{aligned}$$

Ces inégalités nous montrent d'abord que la fonction  $h(\varphi)$  reste finie dans l'intervalle de  $\varphi_1$  à  $\varphi_3$ . D'autre part, en observant que

$$H_{1,2}(\varphi_2) = H_{2,3}(\varphi_2) = h(\varphi_2),$$

on en conclut

$$\frac{H_{1,2}(\varphi) - H_{1,2}(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2} \leq \frac{h(\varphi) - h(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2} \leq \frac{H_{2,3}(\varphi) - H_{2,3}(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2}$$

pour les valeurs de  $\varphi$  comprises entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_3$ . On voit donc que la fonction  $h(\varphi)$  est continue et que le rapport (14) reste compris entre des limites finies pour la valeur  $\varphi_2$  de  $\varphi$ . Pour étendre ces conclusions à toute autre valeur  $\varphi_2'$  située dans l'intervalle de  $\varphi_1$  à  $\varphi_3$ , il suffit de choisir dans cet intervalle deux valeurs  $\varphi_1'$  et  $\varphi_3'$  de manière que

$$\varphi_1' < \varphi_2' < \varphi_3', \quad \varphi_2' - \varphi_1' < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3' - \varphi_2' < \frac{\pi}{\varrho},$$

et de répéter le raisonnement ci-dessus, en remplaçant seulement  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  par  $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$  et  $h_1, h_2, h_3$  par les quantités

$$h_1' = h(\varphi_1'), \quad h_2' = h(\varphi_2'), \quad h_3' = h(\varphi_3').$$

14. En supposant désormais la fonction  $h(\varphi)$  finie dans l'intervalle (4), nous déduisons encore quelques propriétés caractéristiques de cette fonction.

Étant finie, la fonction  $h(\varphi)$  est nécessairement aussi continue, comme nous venons de voir. Si elle est positive pour une valeur donnée de  $\varphi$ , elle restera donc positive dans un certain intervalle, limité par des valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles la fonction s'annule (ou par l'une, ou toutes les deux, des valeurs  $a$  et  $b$ ), et les valeurs  $\varphi$  pour lesquelles  $h(\varphi)$  est négative appartiendront à des intervalles limités de la même manière.

On peut démontrer plusieurs propriétés intéressantes relatives à ces intervalles où  $h(\varphi)$  garde un signe invariable.

*Un intervalle où la fonction  $h(\varphi)$  est négative est limitrophe des deux côtés d'intervalles, où elle est positive, à moins qu'il n'aboutisse à l'un des points  $a$  et  $b$ .*

Soit  $\varphi_0$  une valeur de  $\varphi$ , comprise entre  $a$  et  $b$ , pour laquelle  $h(\varphi)$  s'annule et qui limite un intervalle où  $h(\varphi) < 0$ . Choisissons dans cet intervalle une valeur  $\varphi_1$  telle que  $|\varphi_1 - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$ , et formons la fonction  $H_{0,1}(\varphi)$  de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$H_{0,1}(\varphi_0) = h(\varphi_0) = 0, \quad H_{0,1}(\varphi_1) = h(\varphi_1) < 0.$$

Cette fonction peut évidemment se mettre sous la forme

$$H_{0,1}(\varphi) = C \sin \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

$C$  désignant une constante. Comme  $H_{0,1}(\varphi_1) < 0$ , on en conclut immédiatement que  $H_{0,1}(\varphi) > 0$  pour les valeurs  $\varphi$  telles que  $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$  et que  $\varphi - \varphi_0$  et  $\varphi_1 - \varphi_0$  soient de signes contraires.

Or il résulte de la dernière proposition du n° 11 qu'on a pour ces valeurs de  $\varphi$ , à condition toutefois qu'on ne sorte pas de l'intervalle (4),  $h(\varphi) \geq H_{0,1}(\varphi)$  et, par suite,  $h(\varphi) > 0$ . L'intervalle considéré, où  $h(\varphi) < 0$ , est donc contigu au point  $\varphi_0$  à un intervalle où  $h(\varphi) > 0$ , ce que nous voulions démontrer. Mais notre raisonnement nous a fourni en même temps cette nouvelle propriété de la fonction  $h(\varphi)$ .

*Tout intervalle où  $h(\varphi)$  est positive, et qui est limité par des valeurs  $\varphi$  pour lesquelles  $h(\varphi)$  s'annule, est d'une étendue supérieure ou égale à  $\frac{\pi}{\varrho}$ .*

Les intervalles où  $h(\varphi)$  est positive seront donc nécessairement en nombre limité, si l'intervalle donnée (4) est fini. Il en sera évidemment de même des intervalles où  $h(\varphi)$  est négative et aussi de ceux où  $h(\varphi)$  garde constamment la valeur zéro, puisque l'un quelconque de ces intervalles, s'il n'aboutit pas à un des points  $a$  et  $b$ , est limitrophe des deux côtés d'intervalles où  $h(\varphi)$  est positive. **Donc:**

Si l'intervalle (4) est fini, on peut le diviser en un nombre limité de sous-intervalles tels que, dans chacun d'eux, la fonction  $h(\varphi)$  ou garde un signe invariable, ou reste constamment nulle.

Nous démontrerons enfin cette proposition:

L'étendue d'un intervalle où  $h(\varphi)$  est négative ne saurait être supérieure à  $\frac{\pi}{\varrho}$ .

S'il en était autrement, on pourrait, en effet, trouver une valeur  $\varphi_0$  telle que  $h(\varphi)$  serait négative pour chacune des trois valeurs  $\varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho}$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho}$ . Soit  $C$  une constante inférieure à  $h(\varphi_0)$  et posons

$$H(\varphi) = C \cos \varrho (\varphi - \varphi_0),$$

ce qui est une fonction de la forme (8) s'annulant pour  $\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho}$  et pour  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho}$ . En choisissant le nombre positif  $\delta$  suffisamment petit, on aurait alors, à cause de la continuité des fonctions  $h(\varphi)$  et  $H(\varphi)$ ,  $h(\varphi) < H(\varphi)$  pour chacune des valeurs  $\varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho} + \delta$  et  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho} - \delta$ , dont la différence est inférieure à  $\frac{\pi}{\varrho}$ , tandis que  $h(\varphi) > H(\varphi)$  pour la valeur intermédiaire  $\varphi_0$ . On se trouverait ainsi en contradiction avec le résultat établi au n° 12.

15. On peut de différentes manières déterminer une limite supérieure de la valeur absolue de  $h(\varphi)$  dans un intervalle où cette fonction est négative. Le théorème le plus simple qu'on puisse démontrer dans cet ordre d'idées est le suivant:

Si  $h(\varphi_0) = 0$ , on aura

$$h(\varphi_0 + x) + h(\varphi_0 - x) \geq 0$$

tant que  $0 < x < \frac{\pi}{\varrho}$  [pourvu qu'on ne sorte pas de l'intervalle (4)].

Déterminons, en effet, la fonction (8) par les conditions

$$H(\varphi_0) = h(\varphi_0) = 0, \quad H(\varphi_0 + x) = h(\varphi_0 + x),$$

la valeur  $x$  étant comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{\varrho}$ . On aura d'après le n° 12

$$h(\varphi) \geq H(\varphi) \quad \text{pour} \quad \varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi < \varphi_0.$$

En faisant  $\varphi = \varphi_0 - x$  et en observant qu'on a

$$H(\varphi_0 - x) = -H(\varphi_0 + x) = -h(\varphi_0 + x),$$

on en tire l'inégalité voulue.

Notons la conclusion suivante qui résulte immédiatement de cette inégalité:

*Si un intervalle où  $h(\varphi) < 0$  est limitrophe des deux côtés d'intervalles où  $h(\varphi) > 0$  et aux extrémités desquels  $h(\varphi) = 0$ , le minimum de  $h(\varphi)$  dans le premier intervalle est, en valeur absolue, au plus égal à son maximum dans l'un des intervalles voisins.*

Le théorème démontré ci-dessus n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du suivant, qui exprime sous une forme assez élégante la propriété la plus générale de la fonction  $h(\varphi)$ :

*Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sont trois valeurs quelconques de  $\varphi$ , comprises dans un intervalle où la fonction  $h(\varphi)$  reste finie et qui vérifient les conditions*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho},$$

*on aura*

$$h(\varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 0.$$

En effet, toute fonction  $H(\varphi)$  satisfait à l'identité

$$H(\varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + H(\varphi_2) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3) + H(\varphi_3) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

En spécialisant  $H(\varphi)$  de manière que

$$H(\varphi_1) = h(\varphi_1), \quad H(\varphi_2) = h(\varphi_2),$$

et en observant qu'on a dans ce cas, d'après le n° 12,

$$h(\varphi_3) \geq H(\varphi_3),$$

on obtient précisément l'inégalité ci-dessus.

**16.** Revenons encore une fois sur la propriété fondamentale de la fonction  $h(\varphi)$  établie au n° 12. Si, dans la dernière forme donnée à cette propriété, on fait tendre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vers une même valeur  $\varphi_0$ , on aura à la limite ce nouveau résultat, dont nous nous proposons de donner ici une démonstration directe et rigoureuse.

*Si la fonction  $h(\varphi)$  a un maximum ou un minimum pour  $\varphi = \varphi_0$ , ou, plus généralement, si la fonction est stationnaire pour cette valeur de  $\varphi$ , en sorte que la différence  $h(\varphi) - h(\varphi_0)$  ne change pas de signe lorsque  $\varphi$  varie dans un certain entourage de  $\varphi_0$ , et si  $H_{0,0}(\varphi)$  désigne la fonction (8) qui pour  $\varphi = \varphi_0$  est égale à  $h(\varphi_0)$  et a la dérivée nulle, fonction qui peut évidemment se mettre sous la forme*

$$H_{0,0}(\varphi) = h(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

*on aura  $h(\varphi) \geq H_{0,0}(\varphi)$  pour  $\varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{\varrho}$ , à condition qu'on ne sorte pas de l'intervalle (4).*

Supposons en effet qu'on ait  $h(\varphi_1) < H_{0,0}(\varphi_1)$  pour une valeur  $\varphi_1$  comprise entre les limites indiquées, et, pour fixer les idées, admettons par exemple que  $\varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi_1 < \varphi_0$ . Si nous formons la fonction  $H_{0,1}(\varphi)$  de la forme (8) qui est égale à  $h(\varphi)$  pour  $\varphi = \varphi_0$  et pour  $\varphi = \varphi_1$ , la différence

$$H_{0,1}(\varphi) - H_{0,0}(\varphi) \equiv \text{Const.} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

étant négative pour  $\varphi = \varphi_1$ , aura nécessairement une dérivée positive pour  $\varphi = \varphi_0$ , et comme  $H'_{0,0}(\varphi_0) = 0$ , il en résulte que  $H'_{0,1}(\varphi_0) > 0$ . En choisissant le nombre positif  $\delta$  suffisamment petit, on aura donc

$$H_{0,1}(\varphi_0 - \delta) < H_{0,1}(\varphi_0) < H_{0,1}(\varphi_0 + \delta).$$

Mais  $H_{0,1}(\varphi_0) = h(\varphi_0)$ , et d'autre part, d'après le n° 12,

$$h(\varphi_0 - \delta) \leq H_{0,1}(\varphi_0 - \delta), \quad h(\varphi_0 + \delta) \geq H_{0,1}(\varphi_0 + \delta).$$

Par suite, on aura nécessairement

$$h(\varphi_0 - \delta) < h(\varphi_0) < h(\varphi_0 + \delta),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut tirer de ce théorème plusieurs conséquences, parmi lesquelles nous signalerons ici les suivantes:

*Si la fonction  $h(\varphi)$ , dans un intervalle où elle est positive, est stationnaire pour une certaine valeur  $\varphi_0$  de  $\varphi$ , cette valeur divise l'intervalle en deux parties, dont chacune est supérieure ou égale à  $\frac{\pi}{2\varrho}$ .*

*Dans un intervalle où  $h(\varphi)$  est négative, il ne peut y avoir qu'une seule valeur  $\varphi = \varphi_0$  pour laquelle cette fonction est stationnaire. Cette valeur  $\varphi_0$  correspond à un vrai minimum de la fonction  $h(\varphi)$ , et divise l'intervalle en question en deux parties dont aucune n'est supérieure à  $\frac{\pi}{2\varrho}$ .*

Dans les deux cas, on suppose que l'intervalle considéré ne soit limité par aucun des points  $a$  et  $b$ .

17. Les théorèmes que nous venons de démontrer sur la fonction  $h(\varphi)$  peuvent tous être complétés dans une certaine direction. On aura d'abord cette proposition générale:

*Si l'égalité*

$$h(\varphi) = H(\varphi),$$

où  $H(\varphi)$  désigne une fonction déterminée de la forme (8), a lieu pour trois valeurs  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  de  $\varphi$ , telles que

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho},$$

elle subsiste pour toute valeur de  $\varphi$  comprise entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_3$ .

Cette proposition découle immédiatement du n° 13, en observant que les fonctions désignées respectivement par  $H_{1,2}(\varphi)$  et  $H_{2,3}(\varphi)$  coïncident actuellement avec  $H(\varphi)$ .

On démontre de même:

Si un intervalle où  $h(\varphi)$  est positive est limité par des valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles  $h(\varphi) = 0$ , et si l'étendue de cet intervalle est précisément égale à  $\frac{\pi}{\varrho}$ , la fonction  $h(\varphi)$  s'y réduit à une fonction de la forme (8).

Si un intervalle où  $h(\varphi)$  est négative est précisément d'étendue  $\frac{\pi}{\varrho}$ ,  $h(\varphi)$  y coïncide avec une fonction de la forme (8).

Si  $h(\varphi)$  est stationnaire pour  $\varphi = \varphi_0$ , et si l'égalité

$$h(\varphi) = H_{0,0}(\varphi) \equiv h(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0)$$

a lieu pour une valeur  $\varphi_1$  telle que  $|\varphi_1 - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$ , elle subsiste aussi pour toute valeur de  $\varphi$  comprise entre  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ .

En particulier, si  $h(\varphi)$  est stationnaire pour  $\varphi = \varphi_0$  et s'annule pour une des valeurs  $\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2\varrho}$ , l'égalité ci-dessus subsiste dans l'intervalle compris entre  $\varphi_0$  et cette valeur.

Les démonstrations de ces propriétés sont trop faciles à trouver pour que nous ayons besoin de nous y arrêter.

18. Jusqu'ici nous avons supposé constamment  $\varrho > 0$ . Dans le cas où  $\varrho = 0$  on aura, d'après les hypothèses admises au n° 9,

$$V(re^{i\varphi}) = V(r)[1 + \varepsilon(r, \varphi)],$$

où  $\varepsilon(r, \varphi)$  tend uniformément vers zéro pour  $a < \varphi < b$  lorsque  $r$  augmente indéfiniment, et il en résulte que la fonction que nous avons désignée par  $H(\varphi)$  se réduit actuellement à une constante. A cette différence près, le raisonnement donné au n° 10 reste encore valable et conduit à cette propriété générale de la fonction  $h(\varphi)$ :

Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sont des valeurs consécutives quelconques de  $\varphi$  comprises dans l'intervalle (4), on ne saurait avoir à la fois

$$h(\varphi_2) > h(\varphi_1) \quad \text{et} \quad h(\varphi_2) > h(\varphi_3).$$

Evidemment, ces inégalités ne nous permettent pas de conclure que la fonction  $h(\varphi)$  soit continue.

On arrive à des résultats plus précis en supposant la fonction  $V(x)$  de la forme (6) page 389. En effet, on constate aisément que, dans ce cas, la partie réelle de l'expression

$$i \log x \cdot V(x)$$

est de la forme

$$-(\alpha_1 + 1) \rho V(r) [1 + \varepsilon(r, \varphi)],$$

$\varepsilon(r, \varphi)$  ayant la même propriété que ci-dessus. Si, dans la démonstration donnée au n° 10, on remplace l'expression  $K(x)$  par la suivante

$$e^{-[A' + iB' \log(xe^{-i\varphi_0})] V(xe^{-i\varphi_0})},$$

on retrouve notre théorème fondamental, avec cette modification que la fonction  $H(\varphi)$  aura maintenant la forme

$$A + B\varphi,$$

$A$  et  $B$  désignant, comme  $A'$  et  $B'$ , des constantes réelles. Il en résulte que la fonction  $h(\varphi)$  jouit des propriétés démontrées aux n°s 12 et 13, et, en particulier, qu'elle est continue dans tout intervalle où elle reste finie.

19. En terminant, nous appliquerons les résultats précédents au cas où la fonction  $f(x)$  est uniforme et régulière dans un certain voisinage du point à l'infini. Nous admettrons de plus que, pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ , l'inégalité

$$(15) \quad |f(x)| < e^{(A+\varepsilon)V(r)}$$

subsiste dès que  $r$  est supérieur à une certaine limite, et l'inégalité

$$(16) \quad |f(x)| > e^{(A-\varepsilon)V(r)}$$

du moins pour une infinité de points  $x$  dont les modules vont en croissant indéfiniment,  $A$  désignant une constante positive ou nulle (si cette constante était négative, la fonction  $f(x)$  serait nécessairement régulière à l'infini) et  $V$  une fonction monogène qui jouit des propriétés énumérées au n° 9 pour les valeurs de  $\varphi$  comprises entre les limites

$$-\omega < \varphi < \omega,$$

$\omega$  étant la plus petite des quantités  $\frac{\pi}{2\rho}$  et  $\pi$ .



Il est d'abord évident que, dans ces conditions, la fonction  $h(\varphi)$  admet la période  $2\pi$ , et qu'elle ne saurait dépasser la valeur  $A$  pour aucune valeur de  $\varphi$ . Mais elle pourra prendre des valeurs inférieures à  $A$  d'aussi peu qu'on voudra. En effet, nous avons démontré au n° 11, que l'inégalité  $h(\varphi) \leq A'$ ,  $A'$  désignant une constante inférieure à  $A$ , aurait pour conséquence que l'inégalité

$$|f(x)| < e^{(A'+\varepsilon)V(r)}$$

subsisterait pour toutes les valeurs de  $\varphi$  dès que  $r$  serait supérieur à une certaine limite  $\varepsilon$  désignant une quantité positive arbitrairement petit. Or cette conclusion est en contradiction avec la condition (16).

Soit maintenant  $\varphi_1$  une valeur quelconque pour laquelle  $h(\varphi)$  est finie. Comme on a constamment  $h(\varphi) \leq A$ , le théorème du n° 13 nous apprend que  $h(\varphi)$  reste certainement finie et continue dans l'intervalle de  $\varphi_1 - \omega$  à  $\varphi_1 + \omega$ . Si  $\varphi_2$  est une valeur quelconque comprise entre ces limites, la même conclusion s'applique évidemment à l'intervalle de  $\varphi_2 - \omega$  à  $\varphi_2 + \omega$ , et, en continuant ainsi, on arrive à ce résultat que la fonction  $h(\varphi)$  est finie et continue pour toutes les valeurs de  $\varphi$ .

Étant continue, la fonction  $h(\varphi)$  aura nécessairement une valeur maxima qui, d'après ce qui précède, ne saurait être autre que la valeur  $A$ .

Enfin, le résultat établi au n° 15 nous permet d'affirmer que  $h(\varphi)$  ne saurait être inférieure à  $-A$  pour aucune valeur de  $\varphi$ .

Nous avons ainsi établi ce théorème, où l'on suppose  $\varrho > 0$ :

*Sous les conditions énoncées ci-dessus, la fonction  $h(\varphi)$  est finie et continue et jouit des propriétés démontrées aux nos 11—16 pour toutes les valeurs de  $\varphi$ . De plus on aura constamment*

$$-A \leq h(\varphi) \leq A,$$

*la valeur  $A$  étant atteinte pour une valeur au moins de la variable  $\varphi$ .*

Soit, dans le cas où  $A$  est positif,  $\varphi_0$  une valeur de  $\varphi$  pour laquelle  $h(\varphi)$  est égale à  $A$ : on aura d'après le n° 17

$$h(\varphi) \geq A \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) \quad \text{pour} \quad |\varphi - \varphi_0| \leq 2\omega,$$

d'où ces conclusions:

*Si  $\varrho < \frac{1}{2}$ , la fonction  $h(\varphi)$  reste constamment positive, et sa valeur minima n'est pas inférieure à  $A \cos \varrho\pi$ .*

*Si  $\frac{1}{2} < \varrho < 1$ , la fonction  $h(\varphi)$  peut prendre des valeurs négatives, mais elle ne descend pas au-dessous de la limite  $A \cos \varrho\pi$ , qui est supérieure à  $-A$ .*

Nous démontrerons enfin cette proposition:

Dans le cas où  $\rho = 0$ , la fonction  $h(\varphi)$  garde la valeur constante  $A$  pour toutes les valeurs de  $\varphi$ .

Admettons, en effet, qu'on ait  $h(\varphi_1) \leq A'$ ,  $A'$  étant inférieur à  $A$ . En appliquant le théorème du n° 10 à l'intervalle de  $\varphi_1$  à  $\varphi_1 + 2\pi$ , remplaçant les deux quantités  $h_1$  et  $h_2$  par  $A'$ , et remarquant qu'on a identiquement  $H_{1,2}(\varphi) = A'$ , on arriverait à ce résultat que l'inégalité

$$|f(x)| < e^{(A'+\varepsilon)V(r)}$$

est vérifiée dès que  $r$  est supérieur à une certaine limite, quelque petit que soit  $\varepsilon$ . On se trouverait ainsi en contradiction avec la condition (16).

Les résultats démontrés ci-dessus s'appliquent, en particulier, aux fonctions entières d'ordre fini.

Une question intéressante est celle du choix de la fonction  $V(x)$ . Évidemment, on pourra toujours mettre  $V(x) = x^\rho$ ,  $\rho$  étant supérieur à l'ordre de la fonction  $f(x)$ . Mais, dans ce cas, on aura  $A = 0$ , et les considérations précédentes nous font voir seulement que  $h(\varphi)$  s'annule pour toutes les valeurs de  $\varphi$ , ce qui ne constitue pas un résultat nouveau.

Dans les cas où l'on peut choisir  $V(x)$  de manière que les conditions (15) et (16) soient vérifiées pour une valeur positive de la constante  $A$ , nos considérations conduisent, au contraire, à des propriétés nouvelles de la fonction  $f(x)$ , relatives à la manière dont elle se comporte lorsque  $x$  tend vers l'infini dans différentes directions. On sait que cette circonstance se présente toutes les fois que soit les zéros de la fonction soit les coefficients de son développement de Taylor vérifient certaines inégalités asymptotiques d'un caractère assez général. On pourrait même dire que cela a lieu pour toutes les fonctions entières qui se sont introduites naturellement dans l'Analyse.

Cependant on peut se demander si, à chaque fonction entière d'ordre fini, correspond une fonction monogène  $V(x)$ , jouissant des propriétés énumérées au n° 9, et telle qu'on ait des inégalités de la forme indiquée, la constante  $A$  étant positive. Nous trouverons peut-être une autre fois l'occasion de revenir sur cette question.