

3. *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über
einem ebenen Leiter;*
von *H. Weyl.*

§ 1. *Das Problem.*

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum, der zur Hälfte von einem homogenen Dielektrikum, zur andern von einer homogenen Substanz endlicher Leitfähigkeit erfüllt ist (eine Ebene soll die gemeinsame Grenze beider Teile sein), ist von Sommerfeld in einer bekannten Arbeit untersucht worden.¹⁾ Ich glaube aber, daß die dort zur Diskussion der Lösung eingeschlagene Methode dem Problem zu wenig angepaßt ist, und möchte daher im folgenden auf eine andere hinweisen, welche mir auf natürlicherem Wege zu durchsichtigeren und vollständigeren Resultaten zu führen scheint.

Die Grundformel. Wir benutzen rechtwinklige Koordinaten xyz . Im Nullpunkt O befinde sich der Ursprung einer Kugelwelle. Eine solche kann — in einem Halbraum wie $z \geq 0$ — aufgefaßt werden als Superposition von lauter ebenen Wellen verschiedener Richtung, wobei Richtungskegel der gleichen Größe mit der gleichen Intensität zur Geltung kommen. Es gilt nämlich im Gebiete $z > 0$ die folgende Formel

$$(1) \quad \Pi_0 = \frac{e^{-ikR}}{-ikR} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\omega.$$

Darin ist k eine reelle positive Konstante, R ist die Entfernung des im oberen Halbraum gelegenen Punktes $P = (xyz)$ vom Ursprung. $(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnet einen Punkt auf der Einheitskugel, nach dem integriert wird, — es ist also, wenn ϑ, φ die zur z -Achse gehörigen Polarkoordinaten sind,

$$\alpha = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \beta = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \vartheta \quad —$$

1) Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys. 28. S. 665—736. 1909.

und

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

das Oberflächenelement der Einheitskugel. Es ist zu integrieren nach φ von 0 bis 2π , nach ϑ über den in der Fig. 1 breit



Fig. 1.

ausgezogenen Weg in der komplexen ϑ -Ebene; auf ihm durchläuft $\sin \vartheta$ die positiven Werte von 0 bis ∞ , bleibt der schließlich ins Positiv-Unendliche wachsende Realteil von $ik \cos \vartheta$ durchweg ≥ 0 . Diese Umstände verbürgen die Konvergenz des Integrals im oberen Halbraum. Man muß also nicht nur alle ebenen Wellen zusammenfassen, deren Fortpflanzungsrichtung $(\alpha \beta \gamma)$ mit der z -Achse einen Winkel ϑ zwischen 0 und $\pi/2$ bildet, sondern noch eine kontinuierliche Serie komplexer

Neigungswinkel ϑ hinzunehmen.

Der Beweis für (1) ist leicht erbracht. Wir führen Polarkoordinaten η, ψ zur Achse OP ein; dann wird das Integral auf der rechten Seite

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikR \cos \eta} \sin \eta d\eta d\psi.$$

Der Integrationsbereich ist in den Variablen η, ψ zunächst ein anderer (durch andere Ungleichungen zu beschreibender) als in den Variablen ϑ, φ ; nach dem Cauchyschen Integralsatz können wir ihn aber durch den gleichen ersetzen: so daß jetzt wieder ψ von 0 bis 2π , η längs des oben gezeichneten Weges läuft. Die Integration nach ψ vollziehend und

$$ikR \cos \eta = \tau$$

als Integrationsvariable an Stelle von η einführend, erhalten wir dann

$$\frac{1}{-ikR} \int_{ikR}^{\infty} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{-ikR} \left[e^{-\tau} \right]_{\infty}^{ikR} = \frac{e^{-ikR}}{-ikR}.$$

Sommerfeld benutzt zur Darstellung von Π_0 diejenige Formel, welche aus der unsrigen (1) hervorgeht, wenn die Integration nach φ ausgeführt wird.¹⁾ Aber gerade dadurch

1) Vgl. indes seine Bemerkungen auf S. 733, insbesondere Gl. (64).

wird die auf dem Cauchyschen Integralsatz beruhende Freiheit der Verlagerung des Integrationsbereichs von vornherein so eingeschränkt, daß eine natürliche Diskussion unmöglich wird. Man muß nämlich, um die Verhältnisse in einem Punkte P bequem zu überblicken, Polarkoordinaten zur Achse OP einführen, also auf der Einheitskugel um diese Achse und nicht um die z -Achse herum integrieren.

Die Lösung. Ein im Punkte O in der Richtung der z -Achse schwingender Dipol sende ungedämpfte Schwingungen aus. Das homogene Medium habe die Dielektrizitätskonstante ε , die Permeabilität 1, die Leitfähigkeit σ . c sei die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ν die Frequenz; t bedeutet die Zeit. Das Feld leitet sich aus einer Hertzschen Funktion $e^{i\nu t} \cdot \Pi_0$ her; dabei ist

$$k^2 = \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \left\{ \varepsilon - \frac{i\sigma c}{\nu} \right\}.$$

Wir nehmen jetzt an, der obere Halbraum $z > 0$ sei von einem Dielektrikum erfüllt ($\sigma = 0$, k reell und > 0); im unteren Halbraum $z < 0$ aber befinde sich eine Substanz endlicher Leitfähigkeit. Die auf sie bezüglichen Größen (z. B. k) sollen durch einen Akzent charakterisiert werden. Der Dipol befinde sich zunächst nicht im Nullpunkt, sondern auf der z -Achse im Abstand d oberhalb des Nullpunktes. Die einfallende Welle leitet sich dann aus der soeben angegebenen Hertzschen Funktion her. Im oberen Halbraum bildet sich außerdem eine reflektierte Welle, im unteren eine gebrochene aus von der gleichen Frequenz ν ; auch sie entspringen aus je einer Hertzschen Funktion

$$e^{i\nu t} \cdot \Pi_r, \quad e^{i\nu t} \cdot \Pi'.$$

Für das gesamte Feld im oberen Halbraum ist die Funktion $\Pi = \Pi_0 + \Pi_r$ maßgebend. Die Grenzbedingungen an der Trennungsebene $z = 0$ verlangen, daß Π und $\frac{1}{k^2} \frac{\partial \Pi}{\partial z}$ stetig hindurchgehen:

$$\Pi = \Pi', \quad \frac{1}{k^2} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{1}{k'^2} \frac{\partial \Pi'}{\partial z} \quad \text{für } z = 0.$$

Wir zerlegen die Kugelwelle Π_0 in ebene: im Gebiete $z < d$, also insbesondere auf der Trennungsebene, gilt

$$H_0 = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(ax + \beta y + \gamma(d-z))} d\omega.$$

Zu jeder der ebenen Partialwellen bestimmen wir die reflektierte und gebrochene; durch ihre Summation erhalten wir dann Π_r und Π' . Aus der einfallenden Welle

$$e^{-ik(ax + \beta y + \gamma(d-z))} \quad (0 \leq z < d)$$

entsteht die reflektierte

$$e^{-ik(ax + \beta y + \gamma(d+z))} \cdot f_r \quad (z \geq 0)$$

und die gebrochene

$$e^{-ik'(a'x + \beta'y - \gamma'z)} e^{-ik\gamma d} f' \quad (z \leq 0)$$

[f_r und f' sind unabhängig von xyz]. Die Grenzbedingungen liefern zunächst das geometrische Brechungsgesetz

$$(2) \quad k \sin \vartheta = k' \sin \vartheta' \quad (\varphi = \varphi')$$

und außerdem die Gleichungen

$$1 + f_r = f', \quad \frac{\gamma}{k}(1 - f_r) = \frac{\gamma'}{k'} f';$$

daraus

$$f' = \frac{2k'\gamma}{k\gamma' + k'\gamma}.$$

Ist $\frac{k'}{k} = n$ der komplexe Brechungsindex, so gilt also wegen (2)

$$f' = \frac{2n^2\gamma}{n^2\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (n^2 - 1)\gamma^2}}.$$

Die Wurzel ist als eine stetige Funktion auf unserm Integrationswege so zu nehmen, daß sie für unendlich großes γ gleich γ wird. Im Gebiete $z > d$ ist

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(ax + \beta y + \gamma z)} \{e^{ik\gamma d} + e^{-ik\gamma d} f_r\} d\omega.$$

Lassen wir jetzt die Quelle auf die Trennungsebene, in den Nullpunkt hineinrücken, also d gegen 0 konvergieren, so ergibt sich im Limes

$$(3) \quad \begin{cases} \Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(ax + \beta y + \gamma z)} \cdot f' d\omega, \\ \Pi' = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik'(a'x + \beta'y - \gamma'z)} \cdot f' d\omega. \end{cases}$$

Π wird aber jetzt im Nullpunkt nicht mehr so unendlich wie Π_0 ; sondern wie

$$(4) \quad \frac{2n^2}{n^2 + 1} \cdot \Pi_0.$$

Denn es ist

$$f' = \frac{2n^2}{n^2 + 1} + \text{einer Funktion } f_*,$$

die für $\gamma = \infty$ in zweiter Ordnung verschwindet. Spaltet man entsprechend den Ausdruck (3) von Π in zwei Summanden, so ist der erste = (4), der zweite aber bleibt im Nullpunkt endlich, da das Integral

$$\int |f_* d\omega|$$

einen endlichen Wert besitzt. Wir wollen zu Π einen derartigen konstanten Faktor hinzufügen, daß es im Nullpunkt wieder so unendlich wird wie Π_0 . Dann haben wir schließlich

$$(5) \quad \Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(ax + \beta y + \gamma z)} f d\omega,$$

$$(6) \quad f = \frac{(n^2 + 1)\gamma}{n^2\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (n^2 - 1)}} = f(\gamma).$$

Wir schreiben noch $\Pi = \Pi_0 \cdot F$. Die Untersuchung dieses Faktors F , dessen absoluter Betrag die durch Anwesenheit des Leiters bedingte Schwächung der Kugelwelle, dessen Azimut die Phasenverschiebung angibt, ist unsere Aufgabe; im Ursprung ist $F = 1$. Wir beschränken uns darauf, die Ausbreitung der Welle im Dielektrikum zu verfolgen.

§ 2. Diskussion für einen komplexen Brechungsindex von mäßiger Größe.

Ein beliebiger Punkt P im oberen Halbraum habe von der Trennungsebene den Abstand $z (> 0)$, von der z -Achse den Abstand r , vom Ursprung R ; OP bilde mit der z -Achse den Winkel ϑ_0 :

$$\gamma_0 = \cos \vartheta_0 = \frac{z}{R}, \quad \sin \vartheta_0 = \frac{r}{R}.$$

Wir setzen jetzt zur Vereinfachung $k = 1$, d. h. wir benutzen den 2π ten Teil der Wellenlänge im Dielektrikum als Maßeinheit für alle vorkommenden Entfernungen. R sei (im Vergleich zur Wellenlänge) eine große Zahl. Indem wir Polarkoordinaten η, ψ zur Achse OP einführen, wobei wir die Ebene durch z -Achse und OP als Nullmeridian benutzen, erhalten wir

$$(7) \quad \Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iR \cos \eta} \cdot f \sin \eta d\eta d\psi.$$

Dabei ist in $f = f(\gamma)$ für γ einzusetzen:

$$(8) \quad \gamma = \cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \cos \eta + \sin \vartheta_0 \sin \eta \cos \psi.$$

Es ist nach ψ zu integrieren von 0 bis 2π , nach η am besten längs eines solchen Weges (er ist in Fig. 1 gestrichelt eingetragen), der zunächst vom Punkte $\eta = 0$ im Gebirge des Imaginärteils von $\cos \eta$ möglichst steil in die Tiefe führt ($1 - \cos \eta$ rein imaginär).¹⁾ Die Integration nach ψ denken wir uns ausgeführt; wir erhalten den Mittelwert

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\psi$$

und mit der neuen Integrationsvariablen

$$t = \frac{1 - \cos \eta}{i}$$

an Stelle von η :

$$(9) \quad F = R \int_0^{\infty} e^{-Rt} \cdot f dt.$$

Dieser Ausdruck läßt ohne weiteres erkennen, daß nur der erste Anfang des Integrationsweges einen wesentlichen Beitrag zum Wert des Integrals leistet; es kommt also bei der Integration auf der Einheitskugel im wesentlichen nur die unmittelbare Umgebung des in der Richtung OP gelegenen Punktes in Betracht. In erster Annäherung (wobei der begangene Fehler von der Größenordnung $1/R$), können wir f durch seinen Wert für $t = 0$, d. i. $f(\cos \vartheta_0)$ ersetzen und erhalten

$$(10) \quad F \sim f(\cos \vartheta_0).$$

In Entfernungen vom Erreger, die groß sind gegenüber der Wellenlänge, hängt also Schwächung und Phasenverschiebung der Kugelwelle nur ab von der Richtung OP , und zwar in der aus (6), (10) ersichtlichen Weise. Insbesondere ist zu bemerken, daß $f(\cos \vartheta_0)$ verschwindet für $\vartheta_0 = \pi/2$. In erster Annäherung wird demnach die längs der trennenden Oberfläche selbst fortschreitende Erregung zu 0 abgeschwächt. Der Grund dafür ist

1) In seinem weiteren Verlauf muß er freilich von dieser Paßstraße abführen, damit die Singularitäten von f vermieden werden. In § 3 kommen wir genauer darauf zurück.

aus unserer Herleitung klar. Diejenigen in der Kugelwelle enthaltenen ebenen Wellen, welche unter Winkeln ϑ von der Quelle ausgehen, welche nur wenig *kleiner* als $\pi/2$ sind, werden fast vollständig zerstört von solchen, die durch Reflexion aus Wellen entstanden sind, deren Winkel ϑ wenig *größer* sind als $\pi/2$.

(10) ist das erste Glied einer asymptotischen Entwicklung nach Potenzen von $1/R$. Man sieht zunächst leicht, daß f eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von t in der Umgebung der Stelle $t=0$ zuläßt. Man bilde dazu die Taylorreihe

$$f(\gamma) = f_0 + \frac{f'_0}{1!}(\gamma - \gamma_0) + \frac{f''_0}{2!}(\gamma - \gamma_0)^2 + \dots$$

Auf das einzelne Potenzglied

$$(\gamma - \gamma_0)^h = [\cos \vartheta_0 (\cos \eta - 1) + \sin \vartheta_0 \sin \eta \cos \psi]^h$$

wende man den binomischen Lehrsatz an und integriere nach ψ : es bleiben nur diejenigen Glieder stehen, welche den zweiten Summanden in einer geraden Potenz enthalten, in denen also η nur als ganzzahlige Potenz von

$$\sin^2 \eta = (1 - \cos \eta)(1 + \cos \eta) = it(2 - it)$$

auftritt. Das Integral von $(\gamma - \gamma_0)^h$ nach ψ ist somit ein Polynom in t , in welchem $t^{h/2}$ oder $t^{\frac{h+1}{2}}$ die niedrigste vorkommende Potenz ist, je nachdem h gerade oder ungerade. Das erste Glied der Entwicklung

$$(11) \quad f = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots$$

ist natürlich $a_0 = f(\gamma_0) = f_0$, das zweite

$$a_1 = \frac{1}{i} \left\{ f'_0 \gamma_0 - \frac{f''_0 (1 - \gamma_0^2)}{2} \right\}.$$

Aus (9), (11) und

$$\int_0^\infty e^{-Rt} t^h dt = \frac{h!}{R^{h+1}}$$

fließt die asymptotische Entwicklung

$$F \sim \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{R^h}.$$

Die beiden ersten Glieder ergeben

$$(12) \quad F \sim f(\cos \vartheta_0) + \frac{f'(\cos \vartheta_0) \cdot \cos \vartheta_0 - \frac{1}{2} f''(\cos \vartheta_0) \cdot \sin^2 \vartheta_0}{iR}.$$

In der unmittelbaren Nachbarschaft der Trennungsebene wird neben dem ersten, das für $\vartheta_0 = \pi/2$ verschwindet, noch dies zweite zu berücksichtigen sein. Es ist dort von der gleichen Größenordnung (nämlich $1/R$) wie das erste, wo $\cos \vartheta_0 = z/R$ klein ist wie $1/R$, wo also die Erhebung z über der Grenzfläche der 1, d. i. der Wellenlänge vergleichbar ist. Setzen wir

$$f'(0) = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^2 - 1}} = C_1, \quad -\frac{1}{2} f''(0) = \frac{n^2(n^2 + 1)}{n^2 - 1} = C_2,$$

so ist in diesem Bereich, wie (12) lehrt,

$$F \sim \frac{C_1 z - i C_2}{R}$$

(mit einem Fehler von der Größenordnung $1/R^2$). — Nirgendwo zeigt sich hier eine Andeutung dafür, daß es berechtigt wäre, den Vorgang in eine „Raum“- und eine „Oberflächen“-Welle zu trennen.

§ 3. Die Singularitäten des Integranden. Zerlegung der Störung in Haupt- und Nebenwelle.

Nun sind freilich die bisherigen Annäherungen brauchbar nur für den Fall, daß n eine mäßige Zahl ist. Wenn n groß ist, wird eine neue Untersuchung erforderlich. Mathematisch gesprochen, werden wir den Grenzübergang $\lim n = \infty$ zu vollziehen haben. Aus der Formel (5) geht hervor, daß dabei gegen 1 konvergiert; doch ist die Konvergenz nicht gleichmäßig in dem ganzen oberen Halbraum, sondern, wenn ε irgend eine positive Zahl ist, nur für $0 \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Was hier zu tun übrig bleibt, illustriere ich durch das bekannte „Gibbs'sche Phänomen“ in der Theorie der Fourierschen Reihen. Entwickelt man diejenige Funktion $s(x)$, welche im Intervall von $-\pi$ bis 0 gleich -1 , im Intervall von 0 bis π gleich $+1$ ist, in eine Fouriersche Reihe, so konvergiert die n te Partialsumme $s_n(x)$ mit unbegrenzt wachsendem Index n gegen $s(x)$; jedoch nicht gleichmäßig in einem Intervall wie

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2},$$

welches die Sprungstelle $x = 0$ einschließt. Dagegen gilt hier die folgende Ungleichung

$$(13) \quad |s_n(x) - \text{Si}(nx)| \leq \frac{\text{Konst.}}{n},$$

in der Si den Integralsinus

$$\text{Si}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

bedeutet und Konst. unabhängig ist von n und x . Sie gibt genauen Aufschluß darüber, wie sich die Partialsummen $s_n(x)$ bei großem n in der Nähe der Sprungstelle verhalten; man sieht aus ihr insbesondere, daß der jähe Übergang der Funktion $s_n(x)$ vom Niveau -1 auf das Niveau $+1$ an der Stelle $x=0$ vorbereitet und gefolgt wird von heftigen, dicht gedrängten Oszillationen. Wegen der mangelnden Gleichmäßigkeit ist die Näherungsformel $s_n(x) \sim s(x)$ unzulänglich; erst die gleichmäßig gültige, im Sinne der Ungleichung (13) zu interpretierende $s_n(x) \sim \text{Si}(nx)$ ist wirklich brauchbar. — Das Analoge ist hier zu leisten: wir wollen F (das dem s_n beim Gibbsschen Phänomen entspricht) durch eine in ihrem Wertverlauf leicht überblickbare Funktion F^* (analog zu $\text{Si}(nx)$) approximieren, so daß im ganzen oberen Halbraum und für alle hinreichend großen Werte des komplexen Brechungsindex n die Ungleichung

$$|F - F^*| \leq \frac{\text{Konst.}}{|n|^3}$$

besteht. Doch müssen wir zunächst noch die Grundlage unserer Untersuchung verfestigen, indem wir die Lage der Singularitäten unseres Integranden ermitteln, um die Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes zu legitimieren. Wir behalten dabei den uns vorzugsweise interessierenden Fall eines n^2 mit mäßigem Real-, aber großem Imaginärteil im Auge.

Zur Verwendung gelangt eine ϑ -Ebene, in der sowohl die Werte von ϑ wie von η zur Darstellung gebracht werden, neben einer γ -Ebene zur Veranschaulichung der Werte von $\gamma = \cos \vartheta$ und $\xi = \cos \eta$. Der in $f(\gamma)$ auftretende Radikand verschwindet für $\gamma = \pm \sqrt{1 - n^2}$. Wir tragen diese beiden Punkte in der γ -Ebene ein samt der Geraden g durch den Nullpunkt, welche sie miteinander verbindet. g zerlegt die Ebene in zwei Hälften, eine rechte, welcher der Punkt $\gamma = 1$ angehört, und eine linke. In der rechten Hälfte ist f nicht

nur eine eindeutige Funktion, sondern auch überall regulär. Zwar könnte f dort unendlich werden, wo

$$\gamma^2 = \frac{1}{n^2 + 1}$$

ist; von diesen beiden Zahlen $\pm \sqrt{\frac{1}{n^2 + 1}}$ werde die in der linken Hälfte gelegene mit a , die andere mit $-a$ bezeichnet.

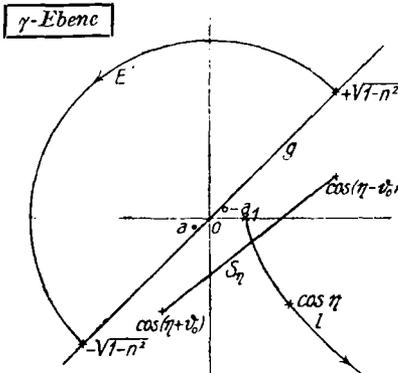


Fig. 2.

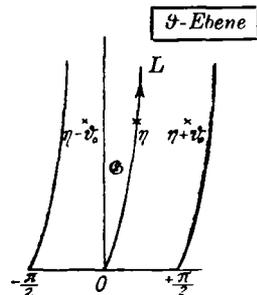


Fig. 3.

Es stellt sich nun aber ohne Mühe heraus, daß f bei der von uns zu wählenden Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel

$$(\sqrt{\gamma^2 + (n^2 - 1)}) \sim \gamma \text{ im Unendlichen}$$

in $-a$ keinen Pol besitzt. Auf die rechte Hälfte der γ -Ebene wird, wenn man die geradlinige Strecke von 0 bis 1 zur Begrenzung hinzufügt, der in der ϑ -Ebene gezeichnete krummlinig begrenzte Parallelstreifen \mathfrak{G} umkehrbar eindeutig abgebildet. Es ist in der ϑ -Ebene außerdem diejenige Linie L gezeichnet, welche aus der linken Begrenzung des Parallelstreifens durch die Verschiebung $\pi/2$ hervorgeht (aus der rechten durch die Verschiebung $-\frac{\pi}{2}$) und ihr Bild l in der γ -Ebene. Erstreckt man die Integration nach η in Gl. (7) längs dieser Linie L , so ist dafür gesorgt, daß der aus (8) sich ergebende Wert von γ für alle η des Integrationsweges, alle ϑ_0 des Intervalls $0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ und alle reellen ψ in der

rechten Hälfte der γ -Ebene liegt, woselbst die Funktion $f(\gamma)$ regulär ist. In der Tat durchläuft γ nach (8) bei gegebenem η und ϑ_0 diejenige geradlinige Strecke S_η , welche die beiden Punkte $\cos(\eta - \vartheta_0)$ und $\cos(\eta + \vartheta_0)$ miteinander verbindet. Unter den angegebenen Bedingungen liegen aber $\eta - \vartheta_0$ und $\eta + \vartheta_0$ im Parallelstreifen \mathfrak{G} , ihre Cosinusse daher innerhalb der rechten Hälfte der γ -Ebene, also auch ihre Verbindungsstrecke S_η .

Um jetzt die Gleichung (7) sicherzustellen, verfahren wir so. Zunächst ersetzen wir den Integrationsweg, welchen ϑ in (5) durchlaufen sollte (Fig. 1), durch L ; das ist statthaft, sofern ϑ_0 kleiner ist als der Winkel, den die Gerade g in der γ -Ebene mit der positiv-imaginären Halbachse einschließt. Dies setzen wir zunächst von P voraus. Nun vollziehen wir den Übergang von der vertikalen zur Polachse OP kontinuierlich (in ihrer gemeinsamen Ebene), wobei der Neigungswinkel λ der Polachse gegen die Vertikale die Werte von 0 bis ϑ_0 durchlaufen wird. Das drückt sich durch die Formeln aus:

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \lambda \cdot \alpha' - \sin \lambda \cdot \gamma', & \beta = \beta'; & (0 \leq \lambda \leq \vartheta_0), \\ \gamma = \sin \lambda \cdot \alpha' + \cos \lambda \cdot \gamma', & \\ \alpha' = \sin \eta \cdot \cos \psi, & \beta' = \sin \eta \cdot \sin \psi, & \gamma' = \cos \eta. \end{cases}$$

Ich setze einen Augenblick

$$\frac{1}{2\pi} e^{-i(\alpha r + \gamma z)} \cdot \frac{f(\gamma)}{\gamma} = \Phi,$$

und bilde

$$J = J(\lambda) = \int \Phi d\alpha d\beta = \int \Phi \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\eta, \psi)} d\eta d\psi,$$

indem bei festem λ über denjenigen Bereich integriert wird, der entsteht, wenn ψ die Werte von 0 bis 2π , η den Weg L durchläuft. Dieses Integral stimmt für $\lambda = 0$ mit (5), für $\lambda = \vartheta_0$ mit (7) überein. Wir zeigen in bekannter Weise, daß die Ableitung jenes Integrals nach λ verschwindet (Beweis des Cauchyschen Integralsatzes durch stetige Variation des Weges). Die damit erwiesene Übereinstimmung von (5) und (7) ist, da diese beiden Integrale regulär-analytische Funktionen von xyz im ganzen oberen Halbraum sind, nicht auf die Punkte P des bisher betrachteten Kegelraumes beschränkt.

Für Φ als Funktion von $\alpha\beta\gamma$ gilt, da die Argumente beständig die Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

erfüllen und somit

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$$

ist:

$$(15) \quad d\Phi = \Phi'_\alpha d\alpha + \Phi'_\beta d\beta,$$

wo

$$\Phi'_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}, \quad \Phi'_\beta = -\frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}.$$

Man beachte, daß in dem ganzen nach (14) in Betracht kommenden Gebiet der Einheitskugel Φ regulär (insbesondere auch $\gamma \geq 0$) ist. Bezeichnet δ die Differentiation nach λ , so kommt wegen $\delta\beta = 0$:

$$\delta J = \int \Phi'_\alpha \delta\alpha \cdot \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\eta, \psi)} d\eta d\psi + \int \Phi \frac{\partial(\delta\alpha, \beta)}{\partial(\eta, \psi)} d\eta d\psi.$$

Der zweite Teil geht durch partielle Integration über in

$$- \int_0^{2\pi} \Phi \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \delta\alpha \Big|_{\eta=0} d\psi - \int \delta\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Phi \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\Phi \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) \right\} d\eta d\psi.$$

Hier ist der erste Summand = 0, weil $\partial\beta/\partial\psi$ für $\eta = 0$ verschwindet; im Integranden des zweiten ist der in geschweifte Klammern gesetzte Faktor

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \beta}{\partial \psi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \beta}{\partial \eta},$$

und daher auf Grund von (15):

$$= \Phi'_\alpha \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\eta, \psi)}.$$

Also wird, wie behauptet, $\delta J = 0$.

Nachdem dies nachgeholt ist, fahren wir in unserer Untersuchung fort. Wir spalten die ungestörte Welle ab, schreiben also

$$F = 1 - F_1, \quad F_1 = \frac{R}{i} \int_1 e^{iR(1-\xi)} f_1 d\xi.$$

Den Mittelwert

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{2\pi} \int f_1 d\psi \quad \text{von} \quad f_1 = f - 1$$

bestimmen wir aber jetzt in anderer Weise als vorhin. Wir

führen (bei festem η) γ an Stelle von ψ als Integrationsvariable ein; dann ist nach (8)

$$d\gamma = -\sin \vartheta_0 \sin \eta \sin \psi d\psi,$$

$$d\psi = \frac{d\gamma}{i \sqrt{(\gamma - \cos \vartheta_0 \cos \eta)^2 - (\sin \vartheta_0 \sin \eta)^2}}.$$

Der Radikand $W(\gamma \xi)$ ist eine symmetrische Funktion von γ und $\xi = \cos \eta$. Die Wurzel selber ist eindeutig in der γ -Ebene, wenn man diese in der oben eingeführten geradlinigen Strecke S_η aufschneidet; sie werde mit solchem Vorzeichen genommen, daß sie im Unendlichen $= \gamma$ ist. Dann gilt also

$$(16) \quad f_1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1 d\gamma}{\sqrt{W(\gamma \xi)}};$$

dabei muß die Integration im positiven Sinn um den Schnitt S_η herum erstreckt werden.

Wir zeichnen in der γ -Ebene ferner (Fig. 2) die Ellipse E mit den Brennpunkten ± 1 , welche durch die Windungspunkte $\pm \sqrt{1 - n^2}$ von f hindurchgeht. Sie wird durch die Windungspunkte in zwei Halbellipsen zerlegt, von denen wir die linke mit E' bezeichnen. In der längs E' aufgeschnittenen γ -Ebene ist f eindeutig und besitzt einen einzigen Pol 1. Ordnung bei $\gamma = a$ mit dem Residuum $n^2 a / n^2 - 1$. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz kann das Integral (16) um S_η herum ersetzt werden durch die negative Summe zweier Integrale, deren eines sich um den Pol a , deren anderes sich um den Schnitt E' herum im positiven Sinne erstreckt. Dies ist zutreffend, weil das Integral längs eines unendlich großen Kreises um den Nullpunkt der γ -Ebene Null ergibt (denn der Integrand verschwindet im Unendlichen wie $1/\gamma^3$). Das erste ist gleich dem Residuum des Integranden im Pol, also

$$= \frac{n^2 a}{n^2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{W(\xi a)}};$$

das andere wird, wenn man das Integral am inneren Ufer von E' entlang mit dem Integral längs des äußeren Ufers vereinigt,

$$= f_1^* = \frac{1}{\pi i} \int_{E'} \frac{f_1 d\gamma}{\sqrt{W(\xi \gamma)}}.$$

Hier fasse man nun E' nicht mehr als Schnitt auf, sondern

die beiden vorkommenden Wurzeln

$$\sqrt{\gamma^2 + (n^2 - 1)} \quad \text{und} \quad \sqrt{W}$$

als eindeutige Funktionen von γ in der ganzen linken Hälfte der γ -Ebene (mit solchen Vorzeichen, daß sie im Unendlichen $= \gamma$ werden). Längs E' wird in dem aus der Figur ersichtlichen Pfeilsinn integriert. Entsprechend der Zerfällung von f_1 in zwei Summanden zerlegt sich auch F_1 in zwei Teile $F^* + F_1^*$. Setzt man

$$(17) \quad \Omega(\gamma) = \int_i \frac{e^{iR(1-\xi)}}{\sqrt{W(\xi\gamma)}} d\xi,$$

so ist

$$(18) \quad F^* = \frac{iRn^2 a}{n^2 - 1} \cdot \Omega(a),$$

$$(19) \quad F_1^* = \frac{R}{\pi} \int_{E'} \Omega(\gamma) f_1(\gamma) d\gamma.$$

Bei festem $\gamma = \cos \vartheta$ erfüllen die beiden Nullstellen des Polynoms 2. Grades $W(\xi\gamma)$ in ξ , falls ϑ_0 das Intervall von 0 bis $\pi/2$ durchläuft, eine Halbellipse E_γ mit den Brennpunkten ± 1 , das durch die Funktion \cos entworfene Bild der gradlinigen Verbindungsstrecke der beiden Punkte $\vartheta - \pi/2$ und $\vartheta + \pi/2$ in der ϑ -Ebene. Solange γ in der linken Hälfte der γ -Ebene liegt (links von g), trifft l den Ellipsenbogen E_γ nicht. W bleibt also, während ξ den Weg l durchläuft, von 0 verschieden, und es ist in (17) derjenige mit ξ stetig variierende Wurzelwert zu nehmen, der für unendlich großes ξ in $-\xi$ übergeht; denn wenn $\vartheta_0 = 0$ ist, wird $\sqrt{W} = \gamma - \xi$. — F^* nennen wir den *Hauptteil der Störung*, F_1^* die *Nebenwelle*; diese Zerlegung ist für die Diskussion des Vorgangs bei großen Werten des Brechungsindex n die natürliche.

§ 4. Diskussion im Falle eines großen Brechungsindex.

Es ergibt sich nämlich leicht, daß F_1^* einer Ungleichung

$$(20) \quad |F_1^*| \leq \frac{\text{Konst.}}{|n|^2}$$

genügt, wo Konst. nicht nur von n , sondern auch vom Orte (P) unabhängig ist. Setzen wir in üblicher Weise

$$n = n_0(1 - i\alpha), \quad (n_0, \alpha \text{ positiv reell}),$$

so gilt dies wenigstens, solange der Absorptionskoeffizient κ (der stets < 1 ist) oberhalb einer festen positiven Grenze liegt. Praktisch wichtig ist vor allem der Fall, wo κ nahezu $= 1$ ist.

Zunächst ist $\Omega(\gamma)$ abzuschätzen. Mit γ liegen auch alle Punkte von E_γ auf E , und zwar erfüllen die zu den verschiedenen γ auf E' gehörigen E_γ die ganze Ellipse E mit Ausnahme des einen Punktes n ; dies ist das Tor, durch welches der Weg l hindurchführt. Da n auf E liegt, ist der kürzeste Abstand des Brennpunktes 1 von E

$$p = \frac{|1+n| + |1-n|}{2} - 1.$$

In (17) kann l durch einen (von γ abhängigen) Weg l' ersetzt werden, der den Punkt 1 der ξ -Ebene ohne Überschreitung von E_γ mit dem Unendlichen der unteren Halbebene

$$[\Re(i\xi) > 0]$$

verbindet. Wir suchen ihn so einzurichten, daß sich aus dem Prinzip „absoluter Betrag des Integrals \leq Integral des absoluten Betrages“ eine möglichst gute Abschätzung von Ω ergibt. Wir müssen also dafür sorgen, daß l' dem Bogen E_γ möglichst fern bleibt, andererseits aber der negative Imaginärteil der Richtungszahl $\frac{d\xi}{|d\xi|}$ längs l' möglichst groß. Beiden sich widereinander richtenden Forderungen genügen wir durch die folgende einfache Wahl in einer Weise, die dem Optimum leidlich nahe kommt: Die geradlinigen Strahlen, welche 1 mit Punkten von E_γ verbinden, lassen in der unteren Halbebene einen Winkelraum frei, dessen einer Schenkel die positive oder negative reelle Halbachse ist; wir wählen für l' den mittleren Strahl dieses Winkelraums. Ist μ sein Öffnungswinkel und bezeichnet x einen Augenblick den Imaginärteil von $1 - \xi$, so gilt

$$\int_V e^{iR(1-\xi)} d\xi = \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} \int_0^\infty e^{-Rx} dx = \frac{1}{R \sin \frac{\mu}{2}}.$$

Der absolute Betrag von W ist das Produkt der Abstände des Punktes ξ von zwei Punkten auf E_γ . Da der kürzeste Abstand zwischen E_γ und l' aber offenbar $\geq p \sin \frac{\mu}{2}$ ist, bekommen wir

$$|\Omega(\gamma)| \leq \frac{1}{R p \sin^2 \frac{\mu}{2}}.$$

Variiert γ auf E' , so nimmt μ seinen kleinsten Wert an, wenn γ mit dem in Fig. 3 als $-\sqrt{1-n^2}$ bezeichneten Endpunkt von E' zusammenfällt; $-\mu$ ist dann gleich dem zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 gelegenen Azimut von $n-1$, $\operatorname{tg} \mu > \kappa$. Unter der Voraussetzung, daß κ oberhalb einer festen positiven Grenze liegt, bleibt also auch $\sin^2 \frac{\mu}{2}$ auf ganz E' oberhalb einer solchen Grenze, und aus (19), dem Umstande, daß auf E'

$$|f_1| \leq \frac{\text{Konst.}}{|n|^2}$$

ist und E' eine Länge von der Größenordnung p oder $|n|$ besitzt, erhält man jetzt die gewünschte Abschätzung (20). Eine einigermaßen sorgfältige Durchführung derselben läßt erkennen, daß in ihr als Konst. die Zahl $4/\pi\kappa$ zur Verwendung kommen darf. So zeigt sich, daß für große n die Nebenwelle vollständig zu vernachlässigen und der Hauptteil der Störung, F^* , allein zu berücksichtigen ist.

Da die Halbellipse E'_α ganz dem Gebiet $\Re \xi < 1$ der ξ -Ebene angehört, kann in $\Omega(\alpha)$ an Stelle des Integrationsweges l die von 1 ausgehende Parallele zur negativ-imaginären Achse treten. α ist eine kleine Zahl; unter α verstehe ich denjenigen in der Nähe von $\alpha = 0$ gelegenen Winkel, für welchen $\alpha = \sin \alpha$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} W(\xi, \alpha) &= (\xi - \sin \alpha \cos \vartheta_0)^2 - (\cos \alpha \sin \vartheta_0)^2 \\ &= \frac{(R\xi - z \sin \alpha - r \cos \alpha)(R\xi - z \sin \alpha + r \cos \alpha)}{R^2} \\ &= -\frac{\tau(\tau + 2ir \cos \alpha)}{R^2}, \end{aligned}$$

wenn

$$\tau = i(R\xi - z \sin \alpha - r \cos \alpha)$$

gesetzt ist. Der Wert dieses Ausdrucks für $\xi = 1$ werde mit w bezeichnet:

$$w = i(R - r \cos \alpha - z \sin \alpha).$$

In

$$\sqrt{W} = \frac{i}{R} \sqrt{\tau(\tau + 2ir \cos \alpha)}$$

ist die Wurzel so zu nehmen, daß sie im Unendlichen = τ wird. Wir bekommen also

$$(21) \quad F^* = \frac{R n^2 a}{i(n^2 - 1)} \cdot \int_w^{w+\infty} \frac{e^{w-\tau} d\tau}{\sqrt{\tau(\tau + 2ir \cos \alpha)}} ;$$

der Integrationsweg verläuft parallel der positiven reellen Achse. Die zu Beginn des § 3 gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Die zum Gibbsschen Phänomen analoge Erscheinung tritt dort auf, wo r groß ist von der gleichen Ordnung wie n^2 , z aber von der gleichen oder kleinerer Größenordnung wie n . Wir lassen also den Brechungsindex n so über alle Grenzen wachsen, daß dabei seine Richtungszahl $n/|n|$ gegen einen bestimmten Wert $1/\iota$ strebt; $\iota = e^{i\delta}$, $0 < \delta \leq \frac{\pi}{4}$. Gleichzeitig sollen r und z so variieren, daß $r/|n|^2$ und $z/|n|$ gegen endliche Grenzwerte $r_1 > 0$ und z_1 gehen. Dann ist

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \sim r + \frac{1}{2} \frac{z^2}{r},$$

$$w \sim i \left[r(1 - \cos \alpha) - z \sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{z^2}{r} \right] \sim \frac{i}{2} \left[\frac{r}{n^2} + \frac{2z}{n} + \frac{z^2}{r} \right] \\ = \frac{i}{2r} \left(\frac{r}{n} + z \right)^2.$$

w konvergiert also gegen

$$(22) \quad w = \frac{i}{2r_1} (r_1 \iota + z_1)^2.$$

Im Nenner des Integrals (21) ist τ neben $2ir \cos \alpha$ zu vernachlässigen; und es ergibt sich im Limes

$$(23) \quad \boxed{F_1 = \frac{r_1 \iota}{r_1 \iota + z_1} \cdot \text{Er}(w)} ,$$

wo

$$(24) \quad \text{Er}(w) = \sqrt{w} \cdot e^w \int_w^{w+\infty} \frac{e^{-\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

gesetzt und w aus (22) zu entnehmen ist. w liegt im zweiten Quadranten der komplexen Ebene, sein Azimut ω liegt zwischen

$$\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{2} + 2\delta,$$

das Azimut $\omega/2$ von \sqrt{w} zwischen

$$\frac{\pi}{4} \text{ und } \frac{\pi}{4} + \delta.$$

Die Funktion Er hängt für reelle positive Argumentwerte eng mit dem Fehlerintegral, für rein imaginäre mit den Fresnel'schen Integralen zusammen. Es gilt die Potenzentwicklung

$$\text{Er}(w) = \sqrt{\pi w} \cdot e^w - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2w)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)};$$

denn in

$$\text{Er}(w) = \sqrt{\pi w} \cdot e^w - \sqrt{w} \int_0^w \frac{e^{w-\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

ist der Subtrahend, wenn $\sqrt{\tau/w} = x$ als Integrationsvariable eingeführt wird,

$$= 2w \int_0^1 e^{w(1-x^2)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n+1}}{n!} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx.$$

Nimmt man jedoch in (24) $\tau - w$ als Integrationsvariable x , so ergibt sich

$$\text{Er}(w) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 + \frac{x}{w}}},$$

und daraus gewinnt man durch Entwicklung von

$$\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Potenzen von x die asymptotische Darstellung

$$\text{Er}(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(-2w)^n},$$

insbesondere als erste Annäherung $\text{Er}(w) \sim 1$. Sie ist gültig, solange das Azimut $\omega/2$ von \sqrt{w} zwischen Grenzen liegt, die sich innerhalb des durch $-\frac{3\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2}$ beschriebenen Bereichs befinden. Um zu beurteilen, in welchem Gebiet der $r_1 z_1$ -Ebene w groß ist, zeichnen wir die Kurven $|w| = \text{const}$. Benutzen wir ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Öffnungswinkel δ und gleichen Maßeinheiten auf den Achsen

(Fig. 4), so erscheinen diese Kurven als Kreise, welche die z_1 -Achse im Nullpunkt berühren.

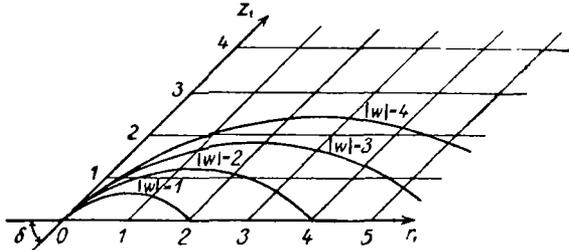


Fig. 4.

Die anschauliche Diskussion des durch die Formeln (22), (23), (24) in einfacher und vollständiger Weise beschriebenen Phänomens bereitet jetzt keine Schwierigkeiten mehr. F_1 bewirkt eine Abbildung des positiven Quadranten der $r_1 z_1$ -Ebene auf eine komplexe F_1 -Ebene. Beschreibt man in jener die Berandung des positiven Quadranten, nämlich 1. die r_1 -Achse

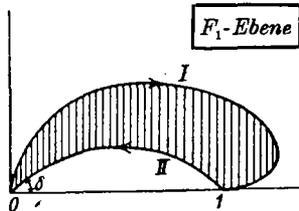


Fig. 5.

von 0 bis $+\infty$, 2. einen Viertelkreis um den Nullpunkt von unendlich großem Radius im positiven Sinne, und 3. die z_1 -Achse vom Unendlichen zurück zum Nullpunkt, so durchläuft F_1 in der F_1 -Ebene 1. den oberen, in Fig. 5 mit I bezeichneten Bogen, 2. den Kreisbogen II:

$$F_1 = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{r_1 e^{i\delta}}}$$

und 3. ist längs der ganzen z_1 -Achse $F_1 = 0$. Alle Werte von F_1 liegen in dem von I und II begrenzten schraffierten Bereich. Die Figur entspricht dem Falle $\delta = \frac{\pi}{4}$.

In der Gleichung $F = 1 - F_1$ wird man den ersten Summanden 1 als Raumwelle, den zweiten $-F_1$ aber als Oberflächenwelle bezeichnen dürfen; denn F_1 konvergiert ja mit wachsendem n gleichmäßig gegen 0 in jedem Kreiskegel um die positive z -Achse, dessen Öffnungswinkel $< \pi$ ist. Diese Zerlegung ist mit der Sommerfeldschen, deren sachliche Berechtigung ich bezweifle, nicht identisch. Im übrigen vergleiche man unsere Formel (23) für F_1 mit Gl. (47), (55) a. a. O.

In einer Züricher Dissertation wird die im vorstehenden geschilderte Methode auch auf das *optische* Problem der Reflexion und Brechung einer Kugelwelle angewendet werden; die dabei gewonnenen Resultate sind von einer gewissen Bedeutung für das Verständnis der viel diskutierten totalen Reflexion.

(Eingegangen 8. August 1919.)