SUR LA LOI D'AMPÈRE;

PAR M. P. DUHEM.

Gauss a énoncé le premier la proposition suivante :

« Il existe une infinité de lois pour l'action d'un élément de courant sur un autre élément de courant, telles que l'action d'un courant fermé sur un élément de courant soit identique à l'action déterminée par la loi d'Ampère; mais, parmi toutes ces lois, une seule, la loi d'Ampère, est telle que l'action d'un élément de courant sur un autre élément de courant se réduise à une force unique dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments. »

Depuis l'époque où Gauss a découvert cette proposition, on en a donné plusieurs démonstrations. La suivante nous paraît particulièrement simple.

La proposition en question résulte immédiatement de celle-ci :

L'action d'un élément de courant sur un autre élément de courant est complètement déterminée lorsqu'on connaît l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant, et lorsqu'on sait, de plus, que l'action élémentaire est dirigée suivant la droite qui joint les éléments.

Soient ds, ds' les deux éléments de courant; soient i, i' les intensités des courants qui les traversent. Supposons que l'on puisse admettre pour l'action de l'élément ds sur l'élément ds' deux expressions distinctes, soumises toutes deux aux restrictions indiquées dans l'énoncé précédent. D'après la première expression, les composantes de l'action de ds sur ds' auraient pour valeur

$$ii'X\,ds\,ds',$$
$$ii'Y\,ds\,ds',$$
$$ii'Z\,ds\,ds'.$$

D'après la seconde expression, ces mêmes composantes auront pour valeur

$$ii'X_1\,ds\,ds',$$
$$ii'Y_1\,ds\,ds',$$
$$ii'Z_1\,ds\,ds'.$$

Supposons que l'élément ds fasse partie d'un courant fermé et uniforme quelconque. L'action de ce courant sur l'élément ds' doit être la même, que l'on accepte l'une ou l'autre des deux lois élémentaires. On doit donc avoir

$$\int X\,ds = \int X_1\,ds,$$
$$\int Y\,ds = \int Y_1\,ds,$$
$$\int Z\,ds = \int Z_1\,ds,$$

les intégrales étant des intégrales curvilignes étendues à un contour fermé quelconque.

D'après les propriétés connues des intégrales curvilignes, ces égalités peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} (X - X_1)\,ds &= d\mathfrak{F}(x, y, z),\\ (Y - Y_1)\,ds &= d\mathfrak{G}(x, y, z),\\ (Z - Z_1)\,ds &= d\mathfrak{H}(x, y, z),\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ étant des fonctions quelconques des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément ds.

Si les deux actions considérées sont dirigées suivant la droite qui joint les deux éléments ds, ds', on devra avoir, en désignant par x', y', z' les coordonnées d'un point de l'élément ds',

$$(y'-y)Z - (z'-z)Y = 0,$$
$$(z'-z)X - (x'-x)Z = 0,$$
$$(x'-x)Y - (y'-y)X = 0;$$

et aussi

$$(y'-y)Z_1 - (z'-z)Y_1 = 0,$$
$$(z'-z)X_1 - (x'-x)Z_1 = 0,$$
$$(x'-x)Y_1 - (y'-y)X_1 = 0.$$

On déduit alors des égalités (1) les relations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} (y'-y)\,d\mathfrak{H}(x,y,z)-(z'-z)\,d\mathfrak{G}(x,y,z)=0, \\ (z'-z)\,d\mathfrak{F}(x,y,z)-(x'-x)\,d\mathfrak{H}(x,y,z)=0, \\ (x'-x)\,d\mathfrak{G}(x,y,z)-(y'-y)\,d\mathfrak{F}(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (y'-y)\,\mathfrak{H}(x,y,z)-(z'-z)\,\mathfrak{G}(x,y,z), \\ G(x,y,z) &= (z'-z)\,\mathfrak{F}(x,y,z)-(x'-x)\,\mathfrak{H}(x,y,z), \\ H(x,y,z) &= (x'-x)\,\mathfrak{G}(x,y,z)-(y'-y)\,\mathfrak{F}(x,y,z). \end{aligned}$$

Les égalités (2) permettront d'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}(x,y,z)\,dy-\mathfrak{G}(x,y,z)\,dz=-\,dF(x,y,z), \\ \mathfrak{F}(x,y,z)\,dz-\mathfrak{H}(x,y,z)\,dx=-\,dG(x,y,z), \\ \mathfrak{G}(x,y,z)\,dx-\mathfrak{F}(x,y,z)\,dy=-\,dH(x,y.z). \end{cases}$$

Examinons la première égalité : la différentielle totale de $F(x,y,z)$ ne renfermant pas de terme en dx, la fonction $F(x,y,z)$ est indépendante de x ; il en est de même de ses dérivées partielles $\mathfrak{G}(x,y,z)$ et $\mathfrak{H}(x,y,z)$. En raisonnant de même sur les deux autres égalités, on arrive à la conclusion suivante :

$\mathfrak{F}$ est une fonction de la seule variable x,
$\mathfrak{G}$ est une fonction de la seule variable y,
$\mathfrak{H}$ est une fonction de la seule variable z.

Mais les égalités (3) nous donnent également, en exprimant que les premiers membres sont des différentielles totales,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial z}+\dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}=0. \end{cases}$$

De là on déduit

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial z}=0.$$

Si l'on joint ces résultats à ceux qui viennent d'être obtenus, on voit que les quantités $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont de simples constantes. En se reportant aux égalités (1), on trouve

$$X = X_1,$$
$$Y = Y_1,$$
$$Z = Z_1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.