

# VIII. *Zur Theorie der electrischen Schwingungen; von Franz Koláček.*

Der Nachweis des Satzes, dass electrische Wellen im Luftraume mit Lichtgeschwindigkeit fortschreiten, erfordert neben der Kenntniss der Wellenlänge, einer dank den bahnbrechenden Versuchen von Hertz gegenwärtig direct messbaren Grösse, noch die Kenntniss der Schwingungsdauer. Letztere berechnet man mit einer Formel, deren Herleitung in der gerade entgegengesetzten Annahme, jener der Fernkräfte wurzelt. Es bleibt fraglich — auch Hertz hat dies hervorgehoben, ob, und wie weit die für Flaschenoscillationen noch zulässige Formel für die gebräuchlichen Vibratoren gültig bleibt. Aber auch hiervon abgesehen, wird die Anwendung der Formel illusorisch, wenn man mit ihr die Periode eines gestreckten Vibrators ohne Endcapacitäten berechnen will. Solche kommen bei den berühmten Hohlspiegelexperimenten und auch als secundäre Receptoren in Verwendung. In diesem Aufsätze wird die Theorie eines solchen Vibrators, dessen Materie unendlich gut leitet, direct aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet. Die Oscillationen sind unter der gegebenen Voraussetzung rein periodisch, eine wesentliche Vereinfachung der Aufgabe.

I. Im Folgenden bedeuten  $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z, u, v, w$  die Componenten der magnetischen und electrischen Kräfte, sowie jene der Leitungsströme, die letzteren zwei Gruppen electrostatisch gemessen;  $V = 3 \cdot 10^{10}$  ist die Weber'sche Zahl,  $\lambda$  die electrostatisch gemessene Leitfähigkeit der Vibratormaterie. Es bestehe Symmetrie um die  $z$ -Axe, sonach seien die Vibratoren Umdrehungskörper;  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  ist der Werth der electrischen Kraft senkrecht zur Axe in einem Raumpunkte  $z$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Der Continuitätsgleichung  $\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z = 0$  genügt die Annahme:

$$(0) \quad Z \cdot \varrho = \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \quad R \cdot \varrho = - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Die Substitution in die Maxwell'schen Gleichungen  $\partial^2 X / \partial t^2 = V^2 \Delta X$ , resp.  $4\pi\lambda \partial X / \partial t = V^2 \Delta X$  ergibt:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{V^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} & (\text{für Luft}), \\ \frac{4\pi\lambda}{V^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} & (\text{Metall}). \end{cases}$$

Aus den Definitionsgleichungen der magnetischen Kraft  $\partial a / \partial t = V(\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z)$  etc. ergibt sich für den Grössenwerth der in Kreisen um die Axe verlaufenden magnetischen Gesamtkraft der Werth  $\partial \psi / \partial t \cdot 1/\varrho V$  resp.  $\psi \cdot 4\pi\lambda/\varrho V$ . Der erstere gilt für Luft, der zweite für das Metall. Es hat also  $\psi$  eine leicht auszusprechende physikalische Bedeutung.

Die Gleichungen (0) enthalten die Regel für ein einfaches Verfahren, den Werth der electricischen Kraftcomponente  $K$  zu finden, die in eine bestimmte Richtung  $s$  fällt. Es sei  $s'$  eine hierzu senkrechte Richtung, linkerhand gelegen, wenn man längs  $s$  vorwärtsblickt. Dann ist  $K = +1/\varrho \cdot \partial \psi / \partial s'$ .

Die Bedingungen, denen  $\psi$  noch genügen muss, ergeben sich aus der Forderung, dass die Tangentialcomponenten der electricischen und magnetischen Kräfte continuirlich durch Grenzflächen hindurchgehen. In unserem Falle gilt für die Leiteroberfläche  $(\partial \psi / \partial t)_e = 4\pi\lambda \psi_i$  und  $(\partial \psi / \partial n)_e = (\partial \psi / \partial n)_i$ . Der Index  $e$  bezieht sich auf Luft,  $i$  auf das Metall.

Es ist noch zu untersuchen, welche Bedingungen ausreichend sind, damit die Lösung für  $\psi$  eindeutig sei. Nach einem von Poynting herrührenden Satze bestimmt sich der in der Zeiteinheit erfolgende Zuwachs der Gesamtenergie, den ein bestimmter Raum durch eine ihn begrenzende Fläche empfängt, durch ein Flächenintegral folgender Eigenschaft: „Der durch jedes einzelne Flächenelement eintretende Betrag ist gleich dem Producte aus den in die Oberfläche fallenden Componenten der electricischen und magnetischen Kräfte, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, den sie miteinander bilden, und dividirt durch  $4\pi V$ .“<sup>(1)</sup>

Dieser Winkel ist in unserem Falle, wo die Grenzflächen Rotationsflächen sind, ein rechter, da die magnetische Kraft

1) Hertz, Wied. Ann. 36. p. 3. 1889.

in Parallelkreisen, die electrische in der Meridianebene verläuft. Der Zuwachs der Energie  $E$  in der Zeiteinheit ist dann eine mit dem Flächenintegrale:

$$\int d\omega \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$$

proportionale Grösse. Es sei nun an der Oberfläche eines Luftraumes entweder  $\psi$  oder  $\partial \psi / \partial n$  eine vorgeschriebene Function der Zeit, ferner sei  $\psi$  und  $\partial \psi / \partial t$  zur Zeit  $t = 0$  für jeden Punkt desselben gegeben. Sind  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zwei diesen Bedingungen genügende Lösungen, so ist auch  $\Psi = \psi_1 - \psi_2$  eine die Differentialgleichung befriedigende Lösung, für welche  $\Psi$  resp.  $\partial \Psi / \partial n$  an den Grenzflächen dauernd Null bleibt. Demnach ist:

$$8\pi E = \iiint dx dy dz \frac{1}{\varrho^2} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} \right)^2 \right]$$

dauernd constant und immer Null, wenn es (wie hier für  $t = 0$ ) einmal Null war. Daraus folgt, dass  $\psi_1$  von  $\psi_2$  nur um eine Constante verschieden sein kann, und damit die Eindeutigkeit der Lösung unter den angeführten Bedingungen.

In ähnlicher Weise ist  $\psi$  bis auf eine additive Constante ( $= 0$ ) im Inneren des Leiters eindeutig bestimmt, wenn an der Grenzfläche  $\psi$  oder  $\partial \psi / \partial n$  als Functionen der Zeit, und für  $t = 0$  der Werth des  $\psi$  in jedem Punkte des Leiters bekannt ist. Da sich die durch die Oberfläche in denselben tretende Energie in Wärme und magnetische Energie ( $E_m$ ) umsetzt, so muss, die Lösung  $\Psi = \psi_1 - \psi_2$  vorausgesetzt, die Stromwärme durch den Abfall von  $E_m$  gedeckt werden; d. h. es ist:

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = - \iiint dx dy dz (u^2 + v^2 + w^2) h.$$

Nun ist für  $t = 0$  überall  $\Psi = 0$ , also gleichzeitig  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , deshalb muss:

$$8\pi E_m = \iiint \frac{dx dy dz}{\varrho^2} \frac{\Psi^2}{V} \left( \frac{4\pi\lambda}{V} \right)^2$$

immer Null bleiben, da es ja nicht negativ werden kann. Also ist  $\Psi = \psi_1 - \psi_2$  immer gleich Null. Es ist jedoch bei Problemen, in welchen ein Dielectricum mit einem Metall

in Wechselwirkung tritt, ein willkürliches Verfügen über  $\psi$  oder  $\partial\psi/\partial n$  an der Grenzfläche ausgeschlossen. Angenommen, man sei im Stande für jeden der Körper eine Lösung zu finden, die den Zuständen zur Zeit  $t=0$  und noch der Bedingung genügt, dass  $\partial\psi/\partial n$  an der Grenzfläche beliebig als Function von  $t$  gegeben sei. Nach dem obigen ist das Problem immer eindeutig lösbar, wie beschaffen auch  $\partial\psi/\partial n$  an der Oberfläche ist. Die Coëxistenz beider Körper erheischt indess das Erfülltsein der Bedingung  $(\partial\psi/\partial t)_e = 4\pi\lambda\psi_i$ , und diese Bedingung lehrt erst, welchen Eigenschaften  $\partial\psi/\partial n$  an der Grenzfläche genügen muss. Hat man  $\partial\psi/\partial n$  demgemäss bestimmt, so ist das Problem als gelöst zu betrachten.

II. Der Ausdruck, dass die Vibratormaterie vollkommen leitend sei, soll sagen, dass dieselbe sich von der im Dielectricum bestehenden Energie nichts zu eigen machen kann. Die Tangentialcomponente der magnetischen Kraft fällt in die Oberfläche, es muss daher mit Rücksicht auf den Satz von Poynting die Tangentialcomponente  $\partial\psi/\partial n$  an der Leiteroberfläche verschwinden. Durch die Annahme  $\psi=0$  im Inneren des Leiters wird dann wegen  $\lambda = \infty$  der zweiten Grenzbedingung genügt.<sup>1)</sup> Auch bei dieser Vereinfachung ist das Problem für beliebig gegebene Vibratorformen nicht lösbar. Ausrechnen lässt sich jedoch folgendes Problem: „Es ist ein Vibrator gegeben, dessen Oberfläche durch ein Rotationsellipsoid begrenzt ist. Der zwischen seinen congruenten Hälften liegende Schlitz ist durch die Oberfläche eines confoc. Rotationshyperboloids begrenzt. Während der Oscillation existirt ein die Scheitel der Hyperbelflächen verbindender unendlich gut leitender Funke, dessen Oberfläche wir unbeschadet der Genauigkeit mit einem confoc. Rotationsellipsoid zusammenfallen lassen können, und dessen Halbaxe fast gleich ist dem Abstände der Brennpunkte.“

Wir wählen auf der  $z$ -Axe die zwei Punkte  $z = -e$  und  $z = +e$  zu Brennpunkten. Es sei  $r^2 = (z + e)^2 + \varrho^2$ ,

---

1) Ueber den Grad der Genauigkeit, mit welcher diese Annahme bei wirklichen Leitern, beispielsweise bei Kupfer erfüllt ist, siehe Abschnitt IV dieses Aufsatzes.

$r_1^2 = (z - e)^2 + \varrho^2$ . Diese Radienvectoren  $r$  und  $r_1$  führen wir an Stelle von  $z$  und  $\varrho$  als indep. Variable ein.

Statt Gl. (1) haben wir:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1 \partial r} \left( \frac{r^2 + r_1^2 - 4e^2}{r r_1} \right).$$

Wir setzen  $\xi = (r_1 + r)/2$ ,  $\eta = (r_1 - r)/2$ .  $\xi$   $\eta$  sind die Halbaxen der durch einen Raumpunkt gehenden confocalen Kegelschnitte. Dieselben als independ. Variable eingeführt, erhält man:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (\xi^2 - e^2 - \eta^2 + e^2) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} (\xi^2 - e^2) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} (\eta^2 - e^2).$$

Als Integral setzen wir  $\psi = \sin. 2\pi/\tau \cdot (t + \vartheta) \cdot \Omega(\xi) \cdot H(\eta)$ , wo  $\Omega$  von  $\xi$ ,  $H$  von  $\eta$  abhängt. Setzen wir  $\mu = 2\pi/\tau V$  und verstehen unter  $\nu$  eine noch zu bestimmende Constante, so muss gelten:

$$(2) \quad \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \mu^2 H = \frac{\nu H}{\eta^2 - e^2},$$

$$(3) \quad \frac{d^2 \Omega}{d\xi^2} + \mu^2 \Omega = \frac{\nu \cdot \Omega}{\xi^2 - e^2}.$$

Die Grenzbedingungen, denen diese Grössen  $\Omega$ ,  $H$  genügen müssen, sind die folgenden: An der ellipsoidischen Oberfläche, welcher  $\xi = a$  entspricht, sowie jener des Funkens  $\xi = \bar{a}$ , muss  $\partial\psi/\partial n$  d. i.  $\partial\psi/\partial\xi$ , das ist  $d\Omega/d\xi$  verschwinden, weil dort keine Tangentialcomponente der electrischen Kraft bestehen kann. 2) Aus gleichem Grunde muss für  $\eta = \pm \bar{\eta}$ , wo  $2\bar{\eta}$  die Entfernung der Hyperbelflächenscheitel bedeutet,  $dH/d\eta$  verschwinden. Nebenbei muss  $H$  für  $\varrho=0$ , d. h. für  $\eta = \pm e$  Null sein. Hiermit sind Punkte der Rotationsaxe gemeint, sofern sie ausserhalb des Ellipsoides gelegen ist, denn für diese würde sonst der durch  $R = -(\partial\psi/\partial z)(1/\varrho)$  bestimmte Werth der Radialkraft unendlich werden. Daher muss  $\psi$  und mit ihm  $H$  für jedes  $z$ , d. h. für  $\eta = \pm e$  verschwinden. Der Werth der Z-Kraft oder  $(\partial\psi/\partial\varrho)(1/\varrho)$  oder  $\partial\psi/\partial r (1/r) + \partial\psi/\partial r_1 (1/r_1)$  bleibt in diesen Gebieten endlich.

Diesen Bedingungen lässt sich folgendermaassen genügen. Es sei  $\Omega_1$  ein particuläres und

$$\Omega = \Omega_1 \int_{\xi}^{\xi} \frac{d\xi}{\Omega_1^2}$$

das vollständige Integral von (3).  $k$  ist eine Integrations-constante.

Es hat dann:

$$\frac{1}{\Omega_1} \frac{d\Omega_1}{d\xi} + \int_k^\xi \frac{d\xi}{\Omega_1^2}$$

für  $\xi = a$  und  $\xi = \bar{a}$  Null zu sein. Setzt man einmal  $\xi = a$ , das andere mal  $\bar{a}$  und zieht beide Gleichungen ab, so muss:

$$\int_{\bar{a}}^a \frac{d\xi}{\Omega_1^2} + \int_{\bar{a}}^a \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\Omega_1} \frac{d\Omega_1}{d\xi} \right) d\xi$$

Null sein. Dies ergibt bei Rücksicht auf Gl. (3) die Bestimmungsgleichung des  $\nu$ :

$$(4) \quad \nu \cdot \int_{\bar{a}}^a \frac{d\xi}{\xi^2 - e^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{d\Omega_1}{d\xi} \right)^2} = \mu^2 \int_{\bar{a}}^a \frac{d\xi}{\left( \frac{d\Omega_1}{d\xi} \right)^2}.$$

Für gestreckte Ellipsoide, wo  $a$  und  $\bar{a}$  wenig verschieden ist, lässt sich angenähert schreiben:

$$(4') \quad \nu \cdot \int_{\bar{a}}^a \frac{d\xi}{\xi^2 - e^2} = \mu^2 (a - \bar{a}).$$

Wenden wir uns zur Gleichung (2). In derselben bedeutet  $\eta$  soviel als  $(r_1 - r)/2$ . Hätte man  $(r - r_1)/2$ , also  $-\eta$ , das wir  $\eta'$  nennen wollen, an Stelle von  $\eta$  als indep. Variable eingeführt, so würde gelten:

$$(2') \quad \frac{d\Omega}{d\eta'^2} + \mu^2 \Omega = \frac{\nu \Omega}{\eta'^2 - e^2}.$$

Dasselbe  $\Omega = f(\eta) = f(-\eta')$ , welches der Gl. (2) genügt, genügt auch der Gl. (2'), und damit resultirt die Relation  $f''(\eta)f(-\eta) - f'''(-\eta)f(\eta) = 0$ , welche integriert:

$$(5) \quad f'(\eta)f(-\eta) + f'(-\eta)f(\eta) = C \text{ und:}$$

$$(6) \quad f(-\eta) = f(\eta) e^{k \int_{f(\eta)f(-\eta)}^\eta \frac{d\eta}{f(\eta)f(-\eta)}}$$

ergibt.

Ist  $H_1$  ein particuläres Integral von (2) und:

$$H = H_1 \int_{k_0}^{\eta} \frac{d\eta}{H_1^2}$$

das vollständige, so lässt sich  $k_0$ , die Integrationsconstante, jedenfalls so bestimmen, dass  $H$  für  $\eta = e$  Null wird. Laut (6) verschwindet dann  $H$  von selbst für  $\eta = -e$ . Aus (5) sehen wir, dass die Constante  $C$ ,  $\eta = e$  gesetzt, sich auf Null reduziert, und dass, wenn  $dH/d\eta = f'(\eta)$  für  $\eta = +\bar{\eta}$  verschwindet, es von selbst für  $\eta = -\bar{\eta}$  verschwinden muss. Es genügt also, dass:

$$H = H_1 \int_{k_0}^{\eta} \frac{d\eta}{H_1^2}$$

für  $\eta = +e$  und  $dH/d\eta$  für  $\eta = +\bar{\eta}$  verschwindet. Durch Elimination von  $k_0$  resultirt eine Gleichung, die nur mehr  $(\eta, e, \mu)$  und  $\nu$  enthält. Setzt man  $\nu$  aus (4) hierin ein, so gewinnen wir eine zur Bestimmung von  $\mu$  dienende Relation  $(\eta, a, \bar{a}, e, \mu) = 0$ . Wir können demnach die mit dem Vibrator verträglichen Wellenlängen eruiren, wenn es gelingt, für die Gleichungen (2) und (3) particuläre Integrale in geschlossener Form anzugeben. Dies ist nun meines Wissens eine noch zu leistende Aufgabe, da die Gleichung  $\partial^2 y / \partial^2 x = y f(x)$  nur in einzelnen Fällen, etwa wo sie die Riccati'sche Form annimmt, geschlossen integrirt werden kann.

Wohl aber lässt sich für  $H_1$  eine nach Potenzen von  $(e^2 - \eta^2)$  aufsteigende Reihe aufstellen, welche nachweisbar für  $\eta^2 < e^2$ , eine immer erfüllte Bedingung, convergirt. Dieses  $H_1$  erfüllt zudem von selbst die Bedingung für  $\eta = \pm e$  zu verschwinden, es genügt daher, in  $dH_1/d\eta = 0$  statt  $\eta$  den Werth  $\bar{\eta}$  und statt  $\nu$  den etwa aus (4) hergenommenen und für gestreckte Vibratoren gültigen Werth einzusetzen, um die Gleichung für die Wellenlängen in Form einer Reihe zu bekommen. Eine andere Reihenentwicklung ist in der Form  $\eta F(\eta^2)$  durchführbar.

Vom mathematischen Standpunkte ist die Lösung des Problems eine vollständige, sie bietet jedoch vermöge des complicirten Baues der Coëfficienten der Reihe keinen physikalisch verwerthbaren Ueberblick. Aus diesem Grunde ist die explicite Aufstellung der Reihe unterblieben, zumal das physikalische Interesse sich auf den Fall  $\nu = 0$  beschränkt.

III. In diesem Falle hat man  $d^2 \Omega / d\xi^2 + \mu^2 \Omega = 0$ ,  $d^2 H / d\eta^2 + \mu^2 H = 0$ . Das Integral ist:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cdot \cos \mu (\xi - a) \cdot (C \cos \mu \eta + D \sin \mu \eta).$$

Nun hat  $\psi$  für  $\psi = \pm e$ , die Punkte des ausserhalb des Ellipsoides gelegenen Stückes der Rotationsaxe zu verschwinden. Dies gibt zwei Gruppen von Lösungen:

$$(A) \quad \begin{cases} \cos \mu e = 0 & \text{oder} \quad \tau V = \frac{4e}{2K+1} \quad \text{und} \\ \psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \cos \mu \eta, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \sin \mu e = 0 & \text{oder} \quad \tau V = \frac{4e}{2K} \quad \text{und} \\ \psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \sin \mu \eta. \end{cases}$$

Hierin bedeutet  $K$  eine beliebige ganze Zahl. Beide Gruppen erfüllen die Bedingung  $\partial \psi / \partial \xi = 0$  für  $\xi = a$ . Sie repräsentiren die mit einem geschlossenen metallischen Ellipsoid verträglichen electrischen Schwingungen, und entsprechen sohin dem Falle passend dünner Vibratoren, deren sehr enger Zwischenraum während der Oscillation durch den als sehr gut leitend vorausgesetzten Funken vollständig ausgefüllt wird. Die zur Gruppe (A) gehörige Grundschiwingung hat eine Wellenlänge, welche das Doppelte der Brennpunktsentfernung, angenähert dasselbe der ganzen Vibratorlänge, beträgt. Die Wellenlängen der Oberschwingungen der Gruppe (A) sind ungeradzahlige, jene der Gruppe (B) geradzahlige aliquote Theile derselben.

Behufs Untersuchung der Kräftevertheilung ersetzen wir in  $\psi$  die Grössen  $\xi$  und  $\eta$  durch ihre Werthe, und bekommen für die ungeradzahligen Schwingungen:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) [\cos \mu (r - a) + \cos \mu (r_1 - a)],$$

für die geradzahligen:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) [\sin \mu (r_1 - a) - \sin \mu (r - a)].$$

Die Kräfte  $R$  und  $Z$  bestimmen sich durch:

$$(7) \quad Z = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

$$(8) \quad R = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho} \left[ \frac{z+e}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{z-e}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right].$$



Zuvörderst sieht man, dass bei den geradzahligen Partialschwingungen für  $r = r_1$  die Grösse  $\psi$ , und mit ihr die magnetische Kraft in der Mitte des Vibrators verschwindet. Die Normalkraft dagegen hat hierselbst einen nicht verschwindenden Werth. Genau entgegengesetzt ist es bei den ungeradzahligen Schwingungen;  $\psi$  verschwindet nicht, wohl aber die Normalkraft. Dieser charakteristische Unterschied gilt nicht blos in diesem speciellen Falle, sondern allgemein.

Die oben besprochene Function  $H(\eta)$  hatte die Eigenschaft, dass, wenn sie für ein positives  $\eta = e$  verschwindet, sie auch für  $\eta = -e$  verschwinden muss. Dasselbe galt von  $dH/d\eta$ . Dieser Eigenschaft entspricht ein  $H = \eta f(\eta^2)$  und ein anderes  $H = F(\eta^2)$ . Ersteres  $H$  verschwindet für  $\eta = 0$ , und mit ihm  $\psi$  und die magnetische Kraft in der Mitte des Vibrators, für  $\partial H/d\eta$  ergibt sich  $f(\eta^2)$ , das für  $\eta = 0$  nicht Null sein kann, da  $H$  und  $f(\eta^2)$  blos für  $\eta = e$  verschwinden muss. Dagegen bleibt  $H$  und  $\psi$  in der zweiten Gruppe für  $\eta = 0$  von Null verschieden, und es verschwindet:

$$\frac{dH}{d\eta} = \eta \frac{\partial F}{\partial \eta}(\eta^2),$$

daher auch die Normalkraft für  $\eta = 0$ .

Daraus können wir schliessen, dass unsere Lösung angenähert richtig bleiben wird, wenn auch der Funke den ganzen Querschnitt des Vibrators nicht ausfüllt. Es zeigt sich dies auch in einem Vergleiche mit den Messungen. Hertz fand für einen Vibrator, dessen Form allerdings nur angenähert mit der Form des unserigen übereinstimmt, die halben Wellenlängen zu 33, 32, 33 cm. Der Vibrator war eine Stange von Cylinderform mit angesetzten Kugeln, und die Distanz der Enden betrug sammt Funkenstrecke (0,3 cm) 30,3 cm. So gross sollte die theoretisch berechnete halbe Wellenlänge sein.

Im Folgenden berechnen wir für unsere stehenden Schwingungen die Vertheilung der electrischen Kräfte auf der Oberfläche des Vibrators. Der Grössenwerth  $N$  dieser Normalkraft ergibt sich, wenn die Gleichungen (7) und (8) addirt und quadriert werden. Bequemlichkeits halber wird  $2\partial\psi/\partial r$  durch  $\partial\psi/\partial\xi - \partial\psi/\partial\eta$  und  $2\partial\psi/\partial r_1$  durch  $\partial\psi/\partial\xi + \partial\psi/\partial\eta$  ersetzt. An der Oberfläche ist wegen  $\xi = a$

$\partial \psi / \partial \xi = 0$  und  $\partial \psi / \partial r = -\partial \psi / \partial r_1 = -\frac{1}{2} \cdot \partial \psi / \partial \eta$ . Nach Vollzug einiger Rechnungsoperationen folgt:

$$N = 2 \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \cdot \frac{e}{\sqrt{(a^2 - \eta^2)(a^2 - e^2)}}.$$

Für die ungeradzahligen Schwingungen ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu}{2} \sin \mu \eta \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta),$$

für die geradzahligen  $-\frac{\mu}{2} \cos \mu \eta \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta)$  einzusetzen.

Für die Grundschiwingung ist  $\mu = 2\pi/4e$ , die Normalkraft  $N$  wächst von  $\eta = 0$ , wo sie Null ist bis  $\eta = e$ , dem Ende des Vibrators, wo sie ihr Maximum erreicht. Links und rechts haben die Kräfte  $N$  entgegengesetztes Vorzeichen an symmetrisch gelegenen Punkten. Eine graphische Darstellung der Vibratorellipse mit der Reihe der senkrecht aufstehenden confocalen Hyperbeln ergibt ein anschauliches Bild der Kräftevertheilung. Sie entspricht angenähert, aber nicht genau den Excursionen eines in der Mitte eingeklemmten Stabes, oder einer beiderseits offenen Pfeife. Die Kräftevertheilung für die Partialschwingungen ergibt sich in gleich einfacher Weise.

Nebst dem Vibratorellipsoid gibt es noch andere confocale Ellipsoidflächen, für welche die electricische Tangentialkraft Null ist. Ihre Lage ist bestimmt durch  $\sin \mu (\xi - a) = 0$ , oder  $\xi = a + K\pi/\mu$ . Man kann dieselben metallisch machen. Die Entstehung reiner stehender Schwingungen ist an die Existenz einer solchen Fläche gebunden. Es besteht hier eine gewisse Analogie mit den stehenden Schwingungen in Kundt'schen Röhren. Dem schwingenden Stabende entspricht die Vibratoroberfläche, der regulirbaren Querwand das confocale Ellipsoid erwähnter Beschaffenheit. Für die Oberschwingungen existiren noch Hyperboloide, die metallisch gemacht werden können. Ihr Durchschnitt mit dem Vibrator erfolgt in den Knoten electricischer Kraft.

Für solche  $z$ , gegen welche  $e$  verschwindend klein ist, gilt laut (7) . . (8)  $R\varphi + Zz = 0$ ; die Wellen sind transversal. Gleiches gilt für die Aequatorialebene, wo wegen  $r = r_1$   $\eta = 0$ ,  $R = 0$  bleibt. Die zum Vibrator parallel gerichtete electricische Kraft  $Z$  ist hier mit  $\sin \mu (r - a)/r$  proportional.

Knoten derselben liegen in folgenden Abständen von der Vibratormitte:

$$\varrho = 0, \quad \frac{l}{2} \sqrt{2}, \quad 2 \cdot \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad 3 \cdot \frac{l}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} \dots$$

Einfachheitshalber ist für  $a$   $e$  gesetzt worden. Man sieht, dass erst für grosse Entfernungen die Knotendistanz gleich wird der normalen halben Wellenlänge  $l/2$ . Aehnliches gilt von der magnetischen Kraft.

Die vollständige Lösung des Problems erhält man durch Summirung der, den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Werthe des  $\psi$ . Jeder Summand enthält neben einer multiplicativen Constante  $A_k$  noch eine Phasenconstante  $\vartheta_k$  [in  $\sin 2\pi/\tau_k (t + \vartheta_k)$ ]. Dieselben hat man einer zur Zeit  $t = 0$  bestehenden Vertheilung der electrischen und magnetischen Kräfte, also einem gegebenen  $\psi$  und  $\partial\psi/\partial t$  anzupassen. Hiermit ergibt sich, wenn die Schwingungen stehende bleiben, ein Gesetz für die Stärke der Partialschwingungen, andernfalls der genaue Ausdruck für die Beschaffenheit der fortschreitenden Welle. Bestimmte Aussagen über die der Funkenbildung unmittelbar vorausgehenden Zustände lassen sich nicht machen. Man kann sich hiervon etwa folgende Vorstellung machen: Die Vertheilung der Kräfte ist zuerst eine statische, die magnetische Kraft, und mit ihr  $\partial\psi/\partial t$  überall gleich Null, was für  $\vartheta_k$  den Werth  $\pi/2$  fordert. Die electrostatischen Kräfte stehen überall auf dem Leiter senkrecht. Eine Gruppe statischer Kraftlinien wird als Funke plötzlich zu einem, wie wir hier voraussetzen, sehr guten Leiter, wodurch mit den Bedingungen des Systems unverträgliche Zustände geschaffen werden, indem Kraftlinien in die Fläche des Leiters (Funkens) fallen. Diese Störung pflanzt sich als Welle electromagnetischer Energie in den Aussenraum fort, und zwar auf Kosten des früheren, beschränkten Vorrathes statischer Energie. Das Vorhandensein solcher Tangentialkräfte an der Vibratoroberfläche ist nach dem Satze von Poynting sogar wesentliche Bedingung dafür, dass electromagnetische Energie sich von da aus dauernd in den Aussenraum fortpflanzt. Ihre Vertheilung und Grösse ist jedoch keine willkürliche, vielmehr ist sie so zu treffen, dass die Werthe der tangentialen Kräfte beider Art

an der Stirnfläche der fortschreitenden Welle continuirlich in die Werthe übergehen, welche hier beim Eintreffen der Welle eben bestanden haben.

Für Vibratoren unserer Art ist anzunehmen, dass der feine Schlitz nahezu ausschliesslicher Sitz der electrostatischen Energie gewesen ist. Bis zu der Zeit, wo ein Raumpunkt von der Wellenfront getroffen wurde, waren hier alle Kräfte Null.

Unsere, sogleich näher zu besprechende fortschreitende Welle<sup>1)</sup>:

$$\psi = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

erfüllt in der That die Bedingung, dass für  $t = (\xi - a)/V$  der Werth von  $\partial \psi / \partial \xi$  und  $\partial \psi / \partial t$  an der ellipsoidischen Wellenfront Null wird.

Der für die stehenden Schwingungen aufgestellte Werth des  $\psi = \sin 2\pi/\tau \cdot (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \cos \mu \eta$  zerfällt in zwei Summanden. Der erste<sup>2)</sup>:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

entspricht Wellen, die von kleineren zu grösseren  $\xi$ , also in den Raum hinauslaufen. Der zweite:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t + \frac{\pi}{2} + \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

entspricht rückkehrenden Wellen, die an einem metallischen confocalen Ellipsoid von der Halbaxe  $\bar{\xi} = a + K\pi/\mu$  reflectirt worden sind. In der That lässt sich die zweite Welle auch in der Form:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left[ t + \frac{\pi}{2} - \frac{2(\bar{\xi} - a) - (\xi - a)}{V} \right] \cos \mu \eta$$

schreiben. Ist  $\bar{\xi}$  unendlich gross, d. h. die reflectirende Fläche sehr weit, so wird in endlichen Zeiten, vor Eintritt der stehenden Schwingung nur die erste Welle:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - e}{V} \right) \cos \mu \eta$$

bestehen. Wir setzten  $e = a$ , um die weitere Rechnung für den, ohnehin gestreckten Vibrator, bequemer durchzuführen

1) Wir beschränken uns auf die Grundschwingung.

2)  $\vartheta$  ist dem Obigen zufolge  $= \pi/2$  gesetzt.

zu können. Für Punkte der Aequatorialebene ( $\eta = 0$ ) kann  $e$  durch  $\varrho \cotg \varphi$ , und  $\xi$  durch  $\varrho / \sin \varphi$  ersetzt werden. Dabei ist  $\varrho$  die Entfernung von der Vibratormitte, und  $\varphi$  der Winkel, den eine vom Brennpunkte zu ihm gezogene Richtung mit der Rotationsaxe einschliesst. Der durch  $\partial \psi / \partial t (1/\varrho V)$  definirte Werth der magnetischen Kraft, gleichwie die der Vibratoraxe parallele Componente electrischer Art  $Z$  erweisen sich proportional mit dem Ausdrücke:

$$\sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\varrho}{V \cotg \frac{\varphi}{2}} \right).$$

Die Kräfte beiderlei Art pflanzen sich demnach in der Aequatorialebene mit einer variablen, für  $\varphi = 0$  unendlich grossen Geschwindigkeit fort, die erst bei  $\varphi = 90^\circ$ , somit für weite Entfernungen von der Vibratormitte den normalen Werth  $3 \cdot 10^{10}$  cm annimmt.

In seinen allerersten, diesen Gegenstand betreffenden Versuchen unterwarf Hertz einen secundären Kreis der gleichzeitigen Einwirkung von Draht- und directen Wellen. Die hier auftretenden Erscheinungen lassen sich mit unserer Theorie auch für den Fall in Einklang bringen, wenn die Drahtwellen, conform mit der Maxwell'schen Theorie, sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

IV. Die Bedingungsgleichung für die Continuität der Tangentialcomponente der magnetischen Kraft an der Oberfläche des Leiters gestattet den Genauigkeitsgrad zu prüfen, mit welchem unsere Voraussetzung richtig ist, dass die gewöhnlichen guten Leiter als unendlich gut leitend anzusehen sind. Wir ersetzen in dem mathematischen Ausdrücke obiger Bedingung  $\partial \psi_e / \partial t = 4\pi \lambda \psi_i$ ,  $\lambda$  durch  $V^2 \cdot \sigma : 10^5$ , wo  $V = 3 \cdot 10^{10}$ , und  $\sigma$  die auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitungsfähigkeit des Vibratormetalls bedeutet.  $(\partial \psi_e / \partial t)$  [in Luft] ist als periodische Grösse von derselben Grössenordnung, wie  $\psi_e \cdot 2\pi / \tau$ . Damit ergibt sich  $\psi_i / \psi_e$  als Grösse von der Ordnung  $1:2.3 \cdot \sigma (\tau V) 10^5$ . Für Kupfer ( $\sigma = 50$ ) und Wellenlängen  $\tau V = 100$  cm ist  $\psi_i$  im Innern des Leiters der  $3 \cdot 10^9$ te Theil seines Werthes in Luft. Wir setzten,  $\lambda = \infty$  annehmend,  $\psi_i$  gleich Null, und sehen, dass

dies bei wirklichen Leitern sehr genau eintrifft. In ähnlichem Sinne wird es gestattet sein, den Funken als unendlich gut leitend anzunehmen, sei auch seine Leitungsfähigkeit mehrere tausende Mal schlechter, als jene des Kupfers. Verfolgen wir die entgegengesetzte Annahme, und sprechen dem Funken jede Leitfähigkeit ab. Unser Problem in Abschnitt II ist dann so zu formuliren: Es ist  $\psi$  so zu bestimmen, dass  $\partial\psi/\partial n$  für  $\eta = \pm \eta$  und  $\xi = a$  verschwindet. Damit ist wohl  $H(\eta)$  eindeutig bestimmt, nicht aber  $\Omega$ . Wir nehmen deshalb noch an, dass der Funke, welcher in der Richtung der (stärksten) Kraftlinie entstand, diese Eigenschaft während seiner Existenz beibehält. Dann muss die normale Componente  $\partial\psi/\partial\eta$  längs der Funkenoberfläche für jedes  $\eta$  verschwinden, was nur für  $\Omega = 0$  möglich ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass daselbst die magnetische Kraft den Werth Null annimmt. Dieser Forderung entsprechen nur die geradzahligen Partialschwingungen. Die thatsächlich beobachtete ungeradzahlige Grundschwingung wird theoretisch unmöglich, und damit ist der Beweis geliefert, dass der Funke die Rolle eines Leiters spielt.

Brünn, im März 1891.