Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

In questo lavoro, che si propone di continuare lo studio della teoria delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica, al quale ho dedicato due Note comparse nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*), espongo dapprima una semplice interpretazione geometrica delle p^2 relazioni a cui soddisfano gli interi caratteristici di una corrispondenza nella classica rappresentazione di Hurwitz, mostrando che ad ogni corrispondenza, e a tutte quelle che da essa dipendono, si può associare una omografia *razionale* di un iperspazio S_{2p-1} reale, trasformante in sè un certo S_{p-1} immaginario.

Mi occupo poi delle corrispondenze (che chiamo *speciali*) nelle quali è nullo il determinante degli interi caratteristici: esse sono rappresentate da omografie singolari, e ad ognuna di esse vengono associati due sistemi regolari di integrali di 1.ª specie riducibili. Se inversamente la curva possiede sistemi siffatti, su di essa esistono corrispondenze speciali.

Nelle Note su ricordate ho visto che se due corrispondenze T e T^{-1}, l'una inversa dell'altra, sono dipendenti, esse devono essere o *equivalenti* o *residue*, cioè la differenza o la somma dei gruppi G e G^{-1} omologhi per la T e T^{-1} di un punto variabile sulla curva, deve variare in una serie lineare; ed ho inoltre provato che il numero base μ della totalità delle corrispondenze algebriche è uguale alla somma dei numeri base μ_1 e μ_2 delle corrispondenze della prima e della seconda specie.

(*) Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXII (1913).

Chiamerò le prime corrispondenze *simmetriche* (con lieve estensione del significato della parola), le seconde *emisimmetriche.* È poi chiaro che il numero μ_1 è effettivamente il numero base delle corrispondenze simmetriche (coincidenti con le loro inverse) perchè, se T è equivalente a T^{-1}, la corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$, essendo dipendente da T, può sostituire T nella costruzione della base.

Caratterizzo allora le omografie che rappresentano corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche: esse nascono moltiplicando per un sistema nullo fisso (sistema nullo *fondamentale*) i sistemi nulli e le polarità razionali trasformanti in sè l'S_{p-1}. Le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, esistenti sulla curva, sono quindi tante quanti i complessi lineari razionali e le quadriche razionali indipendenti che contengono l'S_{p-1}; dal che segue subito che i valori di μ_1 e di μ_2 non possono oltrepassare p^2.

Considero poi le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche speciali, le quali nascono da sistemi nulli e da polarità degeneri.

Nella 2.ª parte applico queste considerazioni al caso $p = 2$. In esso, ricorrendo alla notissima rappresentazione di Klein dello spazio rigato sopra una quadrica di S_5, ed applicando alcune proprietà sopra gli spazi fondamentali delle omografie involutorie razionali, determino i valori di μ_1 e di μ_2 in tutti i casi possibili (*).

Per la dimostrazione della effettiva esistenza di curve cui si riferiscono i valori trovati di μ_1 e di μ_2, utilizzo una elegante interpretazione geometrica, dovuta al prof. Scorza, della disuguaglianza riemanniana fra i periodi degli integrali normali della curva.

(*) Il numero μ_1 coincide col numero base della totalità delle curve tracciate sulla superficie di Jacobi relativa alla curva. Cfr., a questo proposito, la importante Memoria dei sigg. Bagnera e De Franchis: *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques, etc.* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, Tomo XXX, 1910).

PARTE PRIMA

§ 1. SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE RELAZIONI DI HURWITZ.

1. Data una curva C di genere p, si indichino con $u_1 u_2 \dots u_p$ i p integrali normali di prima specie ad essa relativi, e sia

$$\left.\begin{array}{cccccc} 1 & 0 \dots & 0 & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1p} \\ 0 & 1 \dots & 0 & a_{21} & a_{22} \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 & a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pp} \end{array} \quad (a_{rs} = a_{sr}) \right\} \tag{1}$$

la tabella dei loro periodi alle retrosezioni $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{2p}$.

Se T è una corrispondenza algebrica fra i punti di C, che faccia passare da un punto generico x al gruppo degli omologhi $y' \dots y^{\alpha}$, si hanno le notissime relazioni di HURWITZ (*),

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p). \tag{2}$$

In esse le π_k sono costanti che dipendono dall'origine delle integrazioni, ed i numeri π_{ki} soddisfano alle $2p^2$ condizioni

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki} \end{array} \quad (k, l = 1, 2, \dots, p), \right\} \tag{3}$$

nelle quali i numeri h, g, H, G sono interi (interi *caratteristici* della corri-

(*) HURWITZ, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*. Math. Annalen, Bd. 28 (1886).

spondenza). L'eliminazione delle π_{kl} dalle (3) conduce poi alle p^2 relazioni

$$\left.\begin{array}{c}\sum_i h_{ki}\,a_{il}+\sum_{im} g_{mi}\,a_{km}\,a_{il}=H_{kl}+\sum_i G_{il}\,a_{ki}\\ (k,\ l=1,\ 2,\ldots,\ p),\end{array}\right\} \qquad (4)$$

che legano i periodi a_{rs} agli interi h, g, H, G.

Il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$, di ordine $2p$, si dirà *determinante* della corrispondenza.

Volendo dare una interpretazione geometrica alle formole di Hurwitz, ricorreremo ad una rappresentazione che abbiamo altra volta utilizzato. Si consideri cioè entro un S_{2p-1} l'S_{p-1}, che diremo α, intersezione degli iper piani $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_p$ le cui coordinate sono le orizzontali della tabella (1), e si faccia corrispondere ad ogni ciclo di C il punto razionale di S_{2p-1} che ha per coordinate omogenee gli interi che legano il ciclo alle retrosezioni, e ad ogni integrale di 1.ª specie l'iperpiano della stella (α) le cui coordinate sono i periodi normali dell'integrale stesso. Sappiamo allora che l'appartenenza di un punto razionale di S_{2p-1} ad un iperpiano della stella (α) significa che l'integrale corrispondente all'iperpiano ha il periodo nullo lungo il ciclo che ha per immagine il punto (*).

Si osservi ora che, facendo descrivere ad x un ciclo σ sulla curva C, i punti $y'\,y''\ldots y^{\alpha}$ si permutano fra loro e nasce quindi un ciclo σ', che diremo *omologo* di σ, il quale è la somma dei cicli a cui equivalgono le sostituzioni circolari in cui si decompone la sostituzione prodotta sui punti suddetti.

Preso inoltre un integrale di 1.ª specie qualsiasi $u(x)$, la somma dei valori che esso ha nei punti $y'\,y''\ldots y^{\alpha}$ omologhi di x, considerata come funzione di x, darà un nuovo integrale di 1.ª specie $U(x)$, che diremo pure omologo di $u(x)$ per la corrispondenza T.

La T produce dunque una trasformazione sui cicli ed una sugli integrali, e le due trasformazioni hanno questo legame: se il ciclo σ e l'integrale $u(x)$ hanno per omologhi il ciclo σ' e l'integrale $U(x)$, il periodo di $U(x)$ lungo σ è uguale al periodo di $u(x)$ lungo σ'.

(*) Rosati, *Sugli integrali abeliani riducibili*. Atti della R. Accademia di Torino, Vol. L (1915). La rappresentazione cui alludiamo è, in certo modo, duale dell'altra, cui è ricorso il prof. Scorza nella Nota: *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rend.ti della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXIV, 1915).

Consideriamo dapprima la trasformazione sui cicli. Si osservi perciò che il significato dei numeri h, g, H, G è che, detti $\sigma'_1 \sigma'_2 \ldots \sigma'_{2p}$ i cicli omologhi delle retrosezioni, si hanno le omologie

$$\sigma'_i \sim h_{1i}\,\sigma_1 + h_{2i}\,\sigma_2 + \cdots + h_{pi}\,\sigma_p + g_{1i}\,\sigma_{p+1} + g_{2i}\,\sigma_{p+2} + \cdots + g_{pi}\,\sigma_{2p}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$
$$\sigma'_{p+i} \sim H_{1i}\,\sigma_1 + H_{2i}\,\sigma_2 + \cdots + H_{pi}\,\sigma_p + G_{1i}\,\sigma_{p+1} + G_{2i}\,\sigma_{p+2} + \cdots + G_{pi}\,\sigma_{2p}\,;$$

da queste discende che la trasformazione sui cicli prodotta dalla T si rispecchia in S_{2p-1} nella omografia razionale (*) Ω definita dalle formule

$$\rho\, x'_i = h_{i1}\, x_1 + h_{i2}\, x_2 + \cdots + h_{ip}\, x_p + H_{i1}\, x_{p+1} + H_{i2}\, x_{p+2} + \cdots + H_{ip}\, x_{2p}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$
$$\rho\, x'_{p+i} = g_{i1}\, x_1 + g_{i2}\, x_2 + \cdots + g_{ip}\, x_p + G_{i1}\, x_{p+1} + G_{i2}\, x_{p+2} + \cdots + G_{ip}\, x_{2p}\,.$$

Questa omografia si dirà *immagine* della corrispondenza T.

Anche la trasformazione che la T produce sugli integrali si traduce nella stella (α) in una omografia Π, la quale, quando si prendano nella stella medesima gli iperpiani $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ come iperpiani di riferimento, vien rappresentata dalle formule

$$\begin{aligned}
\sigma\, \xi'_1 &= \pi_{11}\, \xi_1 + \pi_{21}\, \xi_2 + \cdots + \pi_{p1}\, \xi_p \\
\sigma\, \xi'_2 &= \pi_{12}\, \xi_1 + \pi_{22}\, \xi_2 + \cdots + \pi_{p2}\, \xi_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma\, \xi'_p &= \pi_{1p}\, \xi_1 + \pi_{2p}\, \xi_2 + \cdots + \pi_{pp}\, \xi_p\,.
\end{aligned}$$

Dalla rappresentazione suddetta scaturisce allora in modo semplice il significato geometrico delle relazioni di Hurwitz.

(*) Una proiettività (omografia o reciprocità) fra due spazi distinti o sovrapposti si dice *razionale* quando ad ogni elemento razionale (di coordinate razionali) fa corrispondere un elemento razionale. Ciò esige che i coefficienti della sostituzione lineare omogenea che fa passare da un elemento all'omologo si possano ridurre interi, quando vengano moltiplicati per un conveniente fattore. Se i due spazi sono sovrapposti, in uno spazio *razionale* unito di una omografia razionale viene subordinata una omografia razionale.

In seguito dovremo considerare proiettività su forme elementari (conica, schiera rigata, ecc.). Un elemento di una tal forma si dirà razionale quando le sue coordinate *nello spazio ambiente* sono razionali; se la forma contiene infiniti elementi razionali, una proiettività sulla forma che ad ogni elemento razionale fa corrispondere un elemento siffatto, si dice *razionale*.

Si supponga infatti nelle formule (3) di fissare il valore dell'indice k e di dare ad l i valori $1, 2, \ldots, p$: i primi membri delle $2p$ relazioni, che così si ottengono, sono le coordinate in S_{2p-1} dell'iperpiano della stella (α) che corrisponde ad α_k nella omografia Π, mentre i secondi membri sono le coordinate dell'iperpiano omologo di α_k nell'omografia Ω^{-1}.

Facendo allora percorrere a k i valori $1, 2, \ldots, p$, si vede che, in forza delle $2p^2$ relazioni (3), gli iperpiani $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ hanno gli stessi omologhi nell'omografia Ω^{-1} dello spazio S_{2p-1} e nell'omografia Π della stella (α), cioè la Ω^{-1} subordina nella stella (α) l'omografia Π.

Le relazioni (4) esprimono dunque che la omografia Ω, immagine della corrispondenza, trasforma in sè lo spazio α.

Reciprocamente, data in S_{2p-1} un'omografia razionale Ω soddisfacente alla condizione suddetta, saranno determinati infiniti gruppi di valori, fra loro due a due proporzionali, degli interi h, g, H, G; e ciascun gruppo di valori soddisferà alle relazioni (3), e quindi alle (4) che ne conseguono, perchè le (3) esprimono appunto che il corrispondente nella Ω^{-1} dell'iperpiano α_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) della stella (α) appartiene alla stella medesima.

Allora, come è noto (*), si possono costruire sulla curva infinite corrispondenze due a due equivalenti che hanno i numeri di ciascun gruppo come interi caratteristici; variando il gruppo, si ottengono infinite corrispondenze, due a due dipendenti, che hanno tutte per immagine l'omografia Ω.

Il significato geometrico delle relazioni di Hurwitz è quindi contenuto nel risultato:

Ogni corrispondenza fra i punti della curva C ha per immagine un'omografia razionale dello spazio S_{2p-1} che trasforma in sè lo spazio α (e quindi il suo coniugato α_0); e, reciprocamente, ogni omografia razionale soddisfacente alla condizione suddetta, è immagine di infinite corrispondenze, fra loro due a due dipendenti.

Il numero base μ della totalità delle corrispondenze sulla curva C coincide dunque col numero delle omografie razionali indipendenti dello spazio S_{2p-1} che trasformano in sè lo spazio α. Si vede poi subito che l'omografia immagine dell'identità e di ogni corrispondenza a valenza è l'omografia identica.

(*) Hurwitz, loc. cit., § 11.

§ 2. Corrispondenze speciali.

2. Diremo *speciale* una corrispondenza quando ha per immagine un'omografia singolare. Vedremo ora che tali corrispondenze esistono quando e soltanto quando la curva possegga sistemi regolari di integrali riducibili. Sarà utile perciò premettere il

Lemma. *Ogni spazio S_{p-1+q} condotto per α non può contenere più di $2q$ punti razionali linearmente indipendenti.*

Si supponga infatti che in un S_{p-1+q} condotto per α siano contenuti $2q+1$ punti razionali indipendenti, e siano $c_1 c_2 \dots c_{2q+1}$ dei cicli sulla curva che abbiano i suddetti punti per immagini. Presi allora altri $2(p-q)-1$ cicli $c'_1 c'_2 \dots c'_{2(p-q)-1}$, indipendenti fra loro e dai primi, in guisa da formare con essi un sistema completo di $2p$ cicli indipendenti, si conducano per l'S_{p-1+q} $p-q$ iperpiani indipendenti, cui corrispondano sulla curva gli integrali $U_1 U_2 \dots U_{p-q}$. Se

$$\omega_{kl} = \omega'_{kl} + i\,\omega''_{kl} \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, p-q \\ l = 1, 2, \dots, 2(p-q)-1 \end{pmatrix}$$

indica il periodo dell'integrale U_k lungo il ciclo c'_l, sarà possibile determinare $2(p-q)$ valori *reali* non tutti nulli $\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, \dots, \lambda_{p-q} \mu_{p-q}$ soddisfacenti alle $2(p-q)-1$ equazioni lineari

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \omega'_{1l} + \mu_1 \omega''_{1l} + \lambda_2 \omega'_{2l} + \mu_2 \omega''_{2l} + \dots + \lambda_{p-q} \omega'_{p-q,l} + \mu_{p-q} \omega''_{p-q,l} = 0 \\ (l = 1, 2, \dots, 2(p-q)-1); \end{matrix}\right\} \quad (5)$$

ma allora l'integrale

$$(\mu_1 + i\lambda_1) U_1 + (\mu_2 + i\lambda_2) U_2 + \dots + (\mu_{p-q} + i\lambda_{p-q}) U_{p-q}$$

avrebbe i periodi nulli lungo i cicli $c_1 c_2 \dots c_{2q+1}$ e, in forza delle relazioni (5), periodi reali lungo i cicli $c'_1 c'_2 \dots c'_{2(p-q)-1}$. Sarebbe perciò una costante, il che contradice all'ipotesi che gli integrali $U_1 U_2 \dots U_{p-q}$ siano indipendenti (*).

(*) Questo ragionamento è analogo ad uno di Severi, riprodotto alla pag. 339 delle sue *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi (1908)).

3. Possiamo ora dimostrare il

Teorema I. *Il determinante* $\begin{vmatrix} h & g \\ H & G \end{vmatrix}$ *di una corrispondenza* T *ha sempre per caratteristica un numero pari* $2q$. *Quando è* $0 < q < p$, *la somma dei valori che un integrale generico della curva ha nei punti del gruppo omologo di un punto variabile* x *genera, al variare dell'integrale, un sistema regolare riducibile* ∞^{q-1}; *la curva possiede poi un secondo sistema regolare riducibile* ∞^{p-q-1}, *i cui integrali dànno somma costante nei punti del gruppo suddetto.*

Siano q ed r ($0 \leq q \leq p$, $0 \leq r \leq 2p$) le caratteristiche dei determinanti delle omografie Π ed Ω.

Quando è $q = 0$, cioè quando tutti i coefficienti π_{rs} sono nulli, la corrispondenza T è a valenza zero ed avrà quindi nulli tutti gli interi caratteristici, onde è $r = 0$.

Supposto poi che la omografia Π non sia singolare, dico che anche Ω non può essere singolare. Facciamo infatti descrivere a un iperpiano ξ la stella (α): l'iperpiano ξ', corrispondente di ξ nell'omografia non singolare Π, è sempre determinato e descrive tutta la stella (α). E siccome ξ' è anche omologo di ξ nella Ω^{-1}, se la Ω fosse singolare, ξ' dovrebbe passare costantemente per lo spazio ρ' luogo dei punti che in Ω hanno l'omologo indeterminato. Ne segue che ρ' dovrebbe esser contenuto in α, il che non può avvenire perchè ρ' è uno spazio razionale, ed è noto che α non può contenere alcun punto reale. Abbiamo dunque che se è $q = p$, deve essere $r = 2p$.

Supponiamo ora che sia $0 < q < p$. La omografia Π è in tal caso singolare di specie $p - q$, ed ammetterà come *primo* e *secondo* spazio singolari (*) due stelle Σ_{p-q-1} e Σ_{q-1} i cui sostegni, che diremo α' ed α'', saranno rispettivamente un S_{p-1+q} ed un S_{2p-1-q} uscenti dallo spazio α. Anche la omografia Ω fra i punti di S_{2p-1} è singolare e di specie $2p - r$; essa ammetterà quindi come primo e secondo spazio singolari due spazi delle dimensioni rispettive $2p - r - 1$ ed $r - 1$, che indicheremo con ρ' e ρ''. Ora è noto che le stelle di centri ρ'' e ρ' costituiscono il primo ed il secondo spazio singolari

(*) Un'omografia singolare di specie h fra i punti di un S_r possiede due spazi singolari S_{h-1} ed S_{r-h}, il primo dei quali è il luogo dei punti che hanno l'omologo indeterminato ed il secondo contiene l'omologo di ogni altro punto dello spazio (Cfr. Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi, etc.*, pag. 58, Pisa, Spoerri, 1907). Chiameremo brevemente questi spazi *primo* e *secondo* spazio singolari dell'omografia. Allorchè l'omografia singolare opera su iperpiani anzichè su punti, esisteranno due stelle singolari di iperpiani, che continueremo a chiamare *primo* e *secondo* spazio singolari dell'omografia.

dell'omografia Ω^{-1} fra gli iperpiani di S_{2p-1}; quindi, dovendo la Ω^{-1} subordinare entro la stella (α) l'omografia Π, si deduce che ρ'' è contenuto in α' e ρ' in α''. E poichè gli spazi ρ' e ρ'' sono razionali, in virtù del lemma precedente dovrà essere

$$r \leq 2q, \qquad 2p - r \leq 2(p-q);$$

da cui segue $r = 2q$.

Le stelle Σ_{p-q-1} e Σ_{q-1}, i cui centri α' ed α'' contengono rispettivamente due spazi razionali di dimensioni $2q-1$ e $2(p-q-1)$ sono dunque (*) immagini di due sistemi regolari ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1} di integrali riducibili. Se ora ricordiamo il significato all'omografia Π, vediamo che i sistemi suddetti sono quelli appunto di cui è parola nell'enunciato del teorema.

Una corrispondenza T, col determinante di caratteristica $2q$ $(0 < q < p)$ si dirà *speciale, di specie* $p-q$. Essa definisce dunque, nel modo anzidetto, due sistemi regolari riducibili ∞^{p-q-1} ∞^{q-1}, che diremo *associati alla corrispondenza.*

Osservazione. I due sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale T e quindi i due spazi singolari $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1} dell'omografia Ω, immagine di T, non sono necessariamente indipendenti (**). In generale avverrà che i due spazi suddetti avranno comune un R_{2l_1-1} appoggiato ad α lungo un s_{l-1} (***). In tal caso la Ω subordina nel suo 2° spazio singolare R_{2q-1} un'omografia singolare ω_1 di cui R_{2l_1-1} è il 1° spazio singolare; il 2° spazio singolare di ω_1 è un $R_{2(q-l_1)-1}$ luogo degli omologhi nella ω_1 di tutti i punti di R_{2q-1} e quindi di tutti i punti di R_{2p-1} nella omografia Ω^2, quadrato della Ω. E poichè la Ω^2 è l'omografia immagine della corrispondenza T^2 (****), l'$R_{2(q-l_1)-1}$ dovrà essere lo spazio razionale corrispondente ad un sistema regolare riducibile ∞^{p-q+l_1-1} i cui integrali dànno somma costante nei punti del

---

(*) ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, loc. cit.

(**) Nella mia Nota dei *Rendiconti dei Lincei* (Vol. XXIV, agosto 1915), in cui sono esposti i risultati di questo lavoro, vanno soppresse nel primo enunciato del n.° 2 le parole *tra loro indipendenti.*

(***) Perchè il sistema congiungente due sistemi regolari riducibili è, per una osservazione di SEVERI, regolare. (Cfr. SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, Rend.ti della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXIII, 1914, e la Nota già citata di SCORZA).

(****) Per la regola, che invocheremo anche al n.° 7, con cui si ottengono gli interi caratteristici di una corrispondenza prodotto di altre (HURWITZ, loc. cit., § 10).

gruppo omologo di un punto variabile x per la corrispondenza T^2; lo spazio stesso dovrà quindi appoggiarsi ad α lungo un s_{q-l_1-1}.

Analogamente, se i due spazi R_{2l_1-1} ed $R_{2(q-l_1)-1}$ s'intersecano in un R_{2l_2-1}, la ω_1 subordina in $R_{2(q-l_1)-1}$ un'omografia singolare ω_2 che avrà R_{2l_2-1} come 1° spazio singolare e come 2° spazio un $R_{2(q-l_1-l_2)-1}$, il quale, per essere il luogo dell'omologo di un qualsiasi punto di R_{2p-1} per la Ω^3, immagine di T^3, dovrà appoggiarsi ad α lungo un $s_{q-l_1-l_2-1}$ ed essere lo spazio razionale corrispondente ad un sistema regolare riducibile $\infty^{p-q+l_1+l_2-1}$ i cui integrali dànno somma costante nei punti del gruppo omologo di x per la T^3. Possiamo così proseguire finchè si giungerà ad una omografia ω_i di un $R_{2(q-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1})-1}$ in cui uno dei due spazi singolari R_{2l_i-1} $R_{2(q-l_1-l_2-\cdots-l_i)-1}$ sparisce, cioè acquista la dimensione -1. Sarà un R_{-1} il 1° spazio sing. di ω_i (e quindi $l_i=0$, cioè ω_i è non singolare) se nell'omografia precedente ω_{i-1} il 2.° spazio singolare $R_{2(q-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1})-1}$ è indipendente dal 1° $R_{2l_{i-1}-1}$; sarà invece un R_{-1} il 2° spazio singolare di ω_i (e quindi $l_i=q-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1}$) se nella ω_{i-1} il 2° spazio sing. è contenuto nel 1° o coincidente con esso. Nel 1° caso le omografie $\Omega^{i+1}, \Omega^{i+2},\ldots$ hanno costantemente come 2° spazio sing. lo stesso $R_{2(q-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1})-1}$ che spetta ad Ω^i; nel 2° caso le $\Omega^{i+1}, \Omega^{i+2},\ldots$ hanno come 2° spazio sing. un R_{-1}, cioè sono tali che ogni punto di R_{2p-1} ha per esse l'omologo indeterminato.

Il significato dei numeri $l_1\, l_2 \ldots l_{i-1}\, l_i$ è dunque espresso dal fatto che *esistono rispettivamente* $p-q$, $p-q+l_1,\ldots$, $p-q+l_1+\cdots+l_{i-1}$ *integrali indipendenti che dànno somma costante nei punti del gruppo omologo di* x *per le corrispondenze* T, $T^2,\ldots$, T^i; *e che il numero degli integrali indipendenti che dànno somma costante nei punti del gruppo omologo di* x *per le* T^{i+1}, $T^{i+2},\ldots$ *è costantemente* $p-q+l_1+\cdots+l_{i-1}+l_i$, *in cui è* $l_i=0$ *ovvero* $l_i=q-l_1-\cdots-l_{i-1}$ *secondochè si dà il 1° o il 2° dei casi suaccennati. In questo secondo caso le* T^{i+1}, $T^{i+2},\ldots$ *sono dunque corrispondenze a valenza zero.*

Il ragionamento fatto prova pure che *fra i numeri* $l_1\, l_2 \ldots l_i$ *sussistono le disuguaglianze* $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_i$.

Gli spazi singolari di Ω sono adunque indipendenti quando non esistono integrali che dànno somma costante nel gruppo omologo di x per la T^2 senza che diano somma costante nel gruppo omologo di x per la T.

Nell'ipotesi che i due sistemi regolari riducibili siano indipendenti, il teorema precedente è facilmente invertibile. Vale cioè il seguente

4. Teorema II. *Dati due sistemi regolari riducibili complementari* ∞^{p-q-1} *e* ∞^{q-1}, *esistono delle corrispondenze speciali, di specie* $p-q$, *alle quali i sistemi medesimi sono associati.*

I due sistemi sono infatti rappresentati da due stelle d'iperpiani i cui centri α' α'' sono un S_{p-1+q} ed un S_{2p-1-q} intersecantisi in α e contenenti rispettivamente due spazi razionali R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ indipendenti, appoggiati ad α lungo un s_{q-1} ed un s_{p-q-1}. Si indichi ora con ω un'omografia razionale dello spazio R_{2q-1} trasformante in sè l's_{q-1}; di omografie soddisfacenti a questa condizione ne esiste almeno una: l'omografia identica. Possiamo allora costruire entro l'S_{2p-1} un'omografia razionale Ω, singolare di specie $p-q$, che ammetta come primo e secondo spazio singolari l'$R_{2(p-q)-1}$ e l'R_{2q-1} e che subordini in questo secondo spazio la ω. Poichè la Ω^{-1} fra gli iperpiani di S_{2p-1} induce manifestamente nella stella (α) un'omografia singolare di cui le stelle di centri α' e α'' costituiscono il primo e il secondo spazio singolari, la Ω sarà immagine di infinite corrispondenze speciali, di specie $p-q$, fra loro due a due dipendenti, a cui sono associati i sistemi dati di integrali riducibili.

Osservazione I. Le corrispondenze speciali di specie $p-q$, indipendenti, associate ai dati sistemi riducibili, sono dunque tante quante le omografie razionali ω indipendenti dello spazio R_{2q-1} trasformanti in sè lo spazio s_{q-1} (e quindi il suo coniugato $s^{(0)}_{q-1}$). Poichè le omografie di R_{2q-1} che trasformano in sè questi spazi formano un sistema lineare ∞^{2q^2-1}, si deduce:

Il numero delle corrispondenze speciali di specie $p-q$ indipendenti, a cui sono associati due dati sistemi riducibili complementari ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1}, non può oltrepassare $2\,q^2$.

Osservazione II. Scambiando l'ufficio dei due spazi $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1}, si ottengono omografie singolari immagini di corrispondenze speciali di specie q. A due dati sistemi regolari riducibili complementari vengono dunque associati due sistemi di corrispondenze speciali, uno di specie $p-q$ e l'altro di specie q. Ed è chiaro che le corrispondenze di un sistema sono indipendenti da quelle dell'altro.

Osservazione III. Le considerazioni fatte nella Osserv. I del n.° prec. possono estendersi al prodotto di due o più corrispondenze speciali.

Siano T_1 e T_2 due corrispondenze speciali di specie $p-q_1$ e $p-q_2$, $R_{2(p-q_1)-1}$ ed R_{2q_1-1} gli spazi singolari dell'omografia Ω_1 immagine di T_1, $R_{2(p-q_2)-1}$ R_{2q_2-1} quelli dell'omografia Ω_2 immagine di T_2. Supposto che il 2° spazio sing. di Ω_1 ed il 1° di Ω_2 s'intersechino in un R_{2l-1}, ed appartengano quindi ad un $R_{2(p-q_2+q_1-l)-1}$, l'R_{2l-1} è il luogo degli omologhi per la Ω_1 di tutti i punti contenuti in un $R_{2(p-q_1+l)-1}$ uscente dal 1° spazio sing. di Ω_1, mentre gli omologhi per la Ω_2 dei punti di $R_{2(p-q_2+q_1-l)-1}$ descrivono un $R_{2(q_1-l)-1}$ contenuto nel 2° spazio sing. di Ω_2; gli spazi $R_{2(p-q_1+l)-1}$ ed $R_{2(q_1-l)-1}$

saranno manifestamente il 1° e 2° spazio singolari dell'omografia $\Omega_1 \Omega_2$ immagine della corrispondenza $T_1\, T_2$. Questa corrispondenza è dunque speciale di specie $p - q_1 + l$ e dei due sistemi regolari riducibili ad essa associati il 1° è contenuto nell'analogo di T_1 mentre il 2° contiene l'analogo di T_2.

Nel caso particolare $l = q_1$, quando cioè il 2° spazio sing. di Ω_1 è contenuto nel 1° di Ω_2 (o coincide con esso), la corrispondenza $T_1\, T_2$ è a valenza zero.

La circostanza precedente si verifica per due corrispondenze T_1 e T_2 speciali di specie $p - q$ e di specie q, cui sono associati gli stessi sistemi d'integrali riducibili (V. Osserv. prec.). Dunque: *I due sistemi di corrispondenze speciali cui sono associati gli stessi sistemi complementari di integrali riducibili sono tali che il prodotto di una corrispondenza di un sistema per una dell'altro, dà origine ad una corrispondenza a valenza zero.*

§ 3. Corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche. Reciprocità involutorie che le rappresentano.

5. Gli interi caratteristici delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche, cioè delle corrispondenze che sono rispettivamente equivalenti o residue delle loro inverse, sono legati da certe relazioni che è facile determinare.

Sia T una corrispondenza cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$. È noto (*) che fra gli interi caratteristici di T e quelli $h'_{ik}\, g'_{ik}\, H'_{ik}\, G'_{ik}$ della corrispondenza inversa T^{-1} sussistono le relazioni

$$h'_{ik} = G_{ki}\,, \quad g'_{ik} = -g_{ki}\,, \quad H'_{ik} = -H_{ki}\,, \quad G'_{ik} = h_{ki}\,, \tag{6}$$

sicchè il determinante della T^{-1} sarà $\begin{vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{vmatrix}$.

Se ora supponiamo che la corrispondenza T sia simmetrica, ovvero emisimmetrica, soddisfacente cioè o alla condizione $T - T^{-1} \equiv 0$, ovvero all'altra $T + T^{-1} \equiv 0$, i suoi interi caratteristici dovranno avere valori rispettivamente

(*) Cfr. la Nota al § 10 della Memoria di Hurwitz già citata.

uguali o contrari dei corrispondenti della T^{-1}; e reciprocamente se l'una o l'altra di queste circostanze si verifica, la corrispondenza T sarà rispettivamente equivalente o residua della sua inversa T^{-1}.

Abbiamo dunque il risultato:

Gli interi caratteristici di una corrispondenza simmetrica sono legati dalle relazioni

$$h_{ik} = G_{ki}\,, \quad g_{ik} = -g_{ki}\,, \quad H_{ik} = -H_{ki}\,; \tag{7}$$

e quelli di una corrispondenza emisimmetrica dalle altre

$$h_{ik} = -G_{ki}\,, \quad g_{ik} = g_{ki}\,, \quad H_{ik} = H_{ki}\,. \tag{8}$$

6. Vogliamo ora caratterizzare le omografie immagini delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche.

Sia T una corrispondenza cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$ ed Ω l'omografia immagine di T, la quale. come abbiamo visto, è rappresentata dalle formule

$$\begin{gathered} \rho x'_i = h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + \cdots + h_{ip} x_p + H_{i1} x_{p+1} + \cdots + H_{ip} x_{2p} \\ \rho x'_{p+i} = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + \cdots + g_{ip} x_p + G_{i1} x_{p+1} + \cdots + G_{ip} x_{2p} \\ (i = 1, 2, \ldots, p). \end{gathered}$$

Indicando con $r_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ le coordinate di retta nello spazio S_{2p-1}, si consideri il complesso lineare

$$r_{1,p+1} + r_{2,p+2} + \cdots + r_{p,2p} = 0$$

ed il sistema nullo non singolare $\mathit{\Delta}$ determinato da questo complesso, e che è definito dalle formule

$$\xi_i = -x_{p+i}\,, \quad \xi_{p+i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Sappiamo (*) che lo spazio $S_{p-1} = \alpha$, e quindi il suo coniugato α_0, sono spazi totali nel detto complesso, sono cioè trasformati in sè dal sistema nullo $\mathit{\Delta}$.

Si moltiplichi ora la omografia Ω per il sistema nullo $\mathit{\Delta}$: nasce la reci-

(*) Rosati, *Sugli integrali abeliani riducibili*, loc. cit.

procità razionale $R = \Omega A$, definita dalle formule

$$\xi'_i \equiv -g_{i1} x_1 - g_{i2} x_2 - \cdots - g_{ip} x_p - G_{i1} x_{p+1} - \cdots - G_{ip} x_{2p}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$
$$\xi'_{p+i} \equiv \quad h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + \cdots + h_{ip} x_p + H_{i1} x_{p+1} + \cdots + H_{ip} x_{2p},$$

la quale manifestamente trasforma in sè gli spazi α ed α_0.

Da ora innanzi associeremo alla corrispondenza T, insieme alla omografia Ω, anche la reciprocità R che nasce da Ω nel modo che abbiamo detto. Tale reciprocità R si dirà pure *immagine* della corrispondenza T.

È chiaro che due corrispondenze dipendenti hanno per immagine la stessa reciprocità, e che, inversamente, data una reciprocità razionale R trasformante in sè gli spazi α ed α_0, poichè la omografia $\Omega = RA$ gode della stessa proprietà, la R è immagine di infinite corrispondenze, due a due fra loro dipendenti.

Facciamo ora l'ipotesi che la T sia una corrispondenza simmetrica ovvero emisimmetrica. L'esame delle relazioni (7) e (8) che legano nei due casi gli interi caratteristici della T, mostra che il determinante della reciprocità R è rispettivamente emisimmetrico e simmetrico. Si giunge quindi al risultato:

La reciprocità razionale immagine di una corrispondenza simmetrica è un sistema nullo e quella immagine di una corrispondenza emisimmetrica è una polarità.

In particolare l'identità e le corrispondenze a valenza (che sono, com'è noto, equivalenti alle inverse) hanno per immagine il sistema nullo fondamentale A.

Con ciò restano dunque caratterizzate anche le omografie che sono immagini di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche; esse si ottengono moltiplicando per il sistema nullo fondamentale A rispettivamente i sistemi nulli razionali e le polarità razionali che trasformano in sè lo spazio α (e quindi il coniugato α_0).

Vediamo allora che i numeri μ_1 e μ_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti uguagliano rispettivamente il numero dei complessi lineari razionali indipendenti che ammettono α ed α_0 come spazi totali e quello delle quadriche razionali indipendenti che contengono i medesimi spazi; ciò conduce subito alla conseguenza:

I numeri base μ_1 e μ_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sopra una curva di genere p non possono oltrepassare p^2.

7. Le relazioni (6) che legano gli interi caratteristici delle corrispondenze T e T^{-1} dicono che le reciprocità immagini di T e di T^{-1} sono inverse l'una dell'altra.

Ricordando poi la regola (*) con cui, noti gli interi caratteristici di due corrispondenze T e T', si ottengono quelli della corrispondenza prodotto $T\,T'$, si vede che l'omografia immagine di $T\,T'$ è il prodotto delle omografie immagini di T e di T'. Se allora T e T' sono tali che il loro prodotto è una corrispondenza a valenza, le omografie immagini di T e di T' sono inverse l'una dell'altra. Chiamando *complementari* due corrispondenze soddisfacenti alla condizione suddetta, abbiamo il risultato:

Una corrispondenza e la sua inversa hanno per immagini due reciprocità inverse; due corrispondenze complementari hanno per immagini due omografie inverse.

In particolare:

Le omografie involutorie sono immagini di corrispondenze che hanno il quadrato dotato di valenza.

Si supponga ora che una corrispondenza T e la sua inversa T^{-1} siano complementari, che cioè i prodotti $T\,T^{-1}$ e $T^{-1}\,T$ siano dotati di valenza. La T e la T^{-1} hanno allora per immagini due omografie Ω ed Ω^{-1} l'una inversa dell'altra; ma poichè anche le reciprocità immagini di T e di T^{-1} sono inverse l'una dell'altra, $\Omega\,\mathcal{A}$ dovrà essere l'inversa di $\Omega^{-1}\,\mathcal{A}$, cioè $\Omega\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\Omega$, e quindi la Ω è permutabile col sistema nullo fondamentale $\mathcal{A}$; reciprocamente, se l'omografia Ω, immagine di T, è permutabile con $\mathcal{A}$, la T e la T^{-1} sono complementari. D'altra parte, detti α e β gli indici di T, si consideri la corrispondenza simmetrica S che si ottiene assumendo come omologhi due punti, quando appartengono allo stesso gruppo G_β omologo di un punto x per la T, e la corrispondenza S' dedotta in modo analogo da T^{-1}. Si avranno allora le equivalenze

$$T^{-1}\,T \equiv \alpha\,I + S \qquad T\,T^{-1} \equiv \beta\,I + S'$$

nelle quali con I si è indicata l'identità; da queste risulta che le corrispondenze T e T^{-1} sono complementari quando e soltanto quando le corrispondenze S ed S' sono dotate di valenza. Se S ed S' si dicono le corrispondenze *laterali* della T, si può dunque enunciare:

(*) Hurwitz, loc. cit., § 10.

Le omografie permutabili col sistema nullo fondamentale A sono immagini di corrispondenze che hanno le loro laterali dotate di valenza.

8. Passiamo ora ad occuparci delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche speciali.

Sia T una corrispondenza speciale di specie $p-q$: la omografia Ω, immagine di T, sarà dunque singolare ed avrà come primo e secondo spazio singolari due spazi razionali $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1}. Se poi la T è simmetrica o emisimmetrica, il prodotto ΩA darà origine o ad un sistema nullo S, ovvero ad una polarità P. Ma allora è chiaro che il complesso lineare relativo ad S o la quadrica che individua la polarità P dovranno essere specializzati ed avere lo spazio $R_{2(p-q)-1}$ come spazio singolare, e che inoltre l'R_{2q-1} è polare di quello nel sistema nullo fondamentale A.

Vediamo dunque che i sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simmetrica o emisimmetrica T sono indipendenti e tali che l'uno di essi individua l'altro (*).

Noi diremo che la T *appartiene* al sistema regolare riducibile ∞^{q-1} rappresentato dalla stella d'iperpiani il cui centro contiene l'$R_{2(p-q)-1}$. Come abbiam visto, questo sistema riducibile è generato dalla somma dei valori che un integrale variabile della curva possiede nei punti del gruppo omologo per la T di un punto variabile x.

Dato, inversamente, un sistema regolare riducibile ∞^{q-1}, esistono corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche appartenenti ad esso?

Si consideri lo spazio razionale $R_{2(p-q)-1}$ contenuto nel centro della stella

---

(*) Cfr. il n.° 4 della mia Nota citata « *Sugli integrali abeliani riducibili* ». Colgo l'occasione per avvertire che la dimostrazione ivi contenuta si può ulteriormente semplificare osservando *che una retta reale appoggiata allo spazio α, e quindi al coniugato α_0, non può appartenere al complesso A.* Se infatti $\alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k - i\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$ sono le coordinate di due punti $P P_0$ immaginari coniugati appartenenti agli spazi $\alpha\alpha_0$, l'ipotesi che la congiungente $P P_0$ sia del complesso A conduce all'uguaglianza

$$(\alpha_1\beta_{p+1} - \alpha_{p+1}\beta_1) + (\alpha_2\beta_{p+2} - \alpha_{p+2}\beta_2) + \ldots + (\alpha_p\beta_{2p} - \alpha_{2p}\beta_p) = 0. \qquad (1)$$

Ma l'integrale di 1.ª specie, che ha per immagine l'iperpiano polare di P nel sistema nullo A, ha i periodi normali uguali a

$$\alpha_{p+1} + i\beta_{p+1}, \ldots, \alpha_{2p} + i\beta_{2p}, \ -(\alpha_1 + i\beta_1), \ldots, \ -(\alpha_p + i\beta_p);$$

la (1) contradice dunque alla disuguaglianza fondamentale di Riemann, dal che segue la verità dell'asserto.

d'iperpiani che rappresenta il sistema riducibile dato, e sia R_{2q-1} il suo polare nel sistema nullo fondamentale A. Segando A con R_{2q-1} si ottiene in questo spazio un sistema nullo non singolare λ, trasformante in sè l's_{q-1} lungo il quale R_{2q-1} si appoggia ad $\varkappa$. Se ora ω è un'omografia di R_{2q-1} che nasce moltiplicando per λ un sistema nullo razionale σ ovvero una polarità razionale π trasformanti in sè l's_{q-1}, la omografia singolare Ω di specie q dello spazio S_{2p-1} che ha come primo e secondo spazio singolari l'$R_{2(p-q)-1}$ e l'R_{2q-1} e che subordina in quest'ultimo spazio la ω, è immagine di infinite corrispondenze, due a due dipendenti, rispettivamente simmetriche od emisimmetriche, appartenenti al sistema riducibile dato. E poichè di omografie ω soddisfacenti alla prima condizione ne esiste almeno una ed è l'identità, si deduce che *ad un dato sistema riducibile ∞^{q-1} appartengono sempre corrispondenze speciali di specie $p-q$ simmetriche.*

In ogni caso vediamo che le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti appartenenti al dato sistema riducibile sono tante quanti i sistemi nulli σ e le polarità π indipendenti di R_{2q-1} che trasformano in sè l's_{q-1}. Donde si trae che:

I numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, speciali di specie $p-q$, appartenenti ad un dato sistema riducibile ∞^{q-1}, non possono oltrepassare q^2.

Osservazione I. Poichè i sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simmetrica o emisimmetrica sono indipendenti, per l'Osservazione del n.° 3 si ha la proprietà: *Se T è una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica, ogni integrale che dia somma costante nei punti del gruppo omologo di un punto variabile x per la corrispondenza T^i $(i=2, 3,\ldots)$ deve dare somma costante nei punti del gruppo omologo di x per la T.*

Osservazione II. Siano Ω e Ω' le omografie immagini di due corrispondenze T e T^{-1} inverse l'una dell'altra. Poichè le reciprocità ΩA e $\Omega' A$ sono l'una inversa dell'altra (n.° 7), dovrà essere $\Omega' = A\Omega^{-1}A$, in cui Ω^{-1} indica la omografia inversa di Ω fra gli iperpiani di S_{2p-1}. Se dunque Ω è singolare, la Ω' è pure singolare della stessa specie di Ω ed i suoi spazi singolari (1° e 2°) sono polari di quelli di Ω (2° e 1°) nel sistema nullo A. Si ha dunque il risultato: *Se le corrispondenze T, T^2, $T^3,\ldots$ sono speciali di specie $p-q$, $p-q+l_1$, $p-q+l_2,\ldots$, anche le corrispondenze inverse T^{-1}, T^{-2}, $T^{-3},\ldots$ sono speciali della stessa specie $p-q$, $p+q+l_1$, $p-q+l_2,\ldots$*

PARTE SECONDA

§ 4. La coppia di rette corrispondente ai periodi di una curva di genere due.

9. Vogliamo ora applicare le considerazioni precedenti alla ricerca dei numeri base μ_1 e ν_2 per le curve di genere due.

Sia

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (a_{12} = a_{21}) \quad \right\} \tag{9}$$

la tabella dei periodi normali dei due integrali di 1ª specie di una curva C di genere due. I due spazi $\alpha\ \alpha_0$, di cui abbiamo parlato nei numeri precedenti, sono ora due rette immaginarie coniugate di seconda specie di un S_3 reale ω, ed appartenenti al complesso lineare fondamentale $\varDelta$ di equazione

$$p_{13} + p_{24} = 0. \tag{10}$$

È noto che la condizione necessaria e sufficiente perchè la tabella (9) sia quella dei periodi normali di una curva di genere due, è espressa dalla disuguaglianza

$$a'_{11}\, a'_{22} - a'^2_{12} > 0, \tag{11}$$

nella quale $a'_{11}\, a'_{12}\, a'_{22}$ indicano i coefficienti dell'immaginario i in $a_{11}\, a_{12}\, a_{22}$.

Questa condizione è suscettibile di una elegante interpretazione geometrica, dovuta al prof. Scorza (*), la quale è utile qui ricordare, perchè ad essa dovremo ricorrere in seguito.

Se si stabilisce una relazione omografica *reale* fra il sistema lineare ∞^3 di complessi lineari contenenti le rette $\alpha\ \alpha_0$ ed uno spazio S_3, in guisa cioè che a complessi reali corrispondano punti reali di esso, i complessi speciali del sistema vengono rappresentati sui punti di una quadrica reale a punti

(*) Scorza, *Sulle funzioni iperellittiche singolari*. Rendiconti della R.ª Accademia dei Lincei, Vol. XXIII (1914).

ellittici. La (11) esprime allora, secondo il teorema di Scorza, che il complesso fondamentale (10) ha per immagine un punto ***interno*** alla detta quadrica.

Una coppia di rette immaginarie coniugate di 2^a specie, appartenenti al complesso (10) e soddisfacenti inoltre alla condizione del teorema di Scorza, definisce dunque una tabella di periodi normali (*); si dirà perciò *la coppia di rette corrispondente ai periodi della curva.*

10. Abbiamo visto che, in virtù della interpretazione geometrica delle formule di Hurwitz, per determinare i numeri μ_1 e μ_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, e quindi il numero base $\mu_1 + \mu_2$ della totalità delle corrispondenze, dobbiamo ricercare quanti sono i complessi lineari razionali e quante le quadriche razionali indipendenti che contengono la coppia $(\alpha\,\alpha_0)$. Si noti subito che, per essere queste rette immaginarie coniugate di 2^a specie, le dette quadriche, quando sono reali, dovranno essere a punti iperbolici.

Da ora innanzi la totalità delle corrispondenze che dipendono da k corrispondenze indipendenti, si dirà brevemente *un* S_{k-1} *di corrispondenze.*

Le corrispondenze speciali provengono dalla presenza sulla curva di integrali riducibili a ellittici (n.° 3).

Si consideri un integrale ellittico I e sia r la retta razionale, appoggiata alla coppia $(\alpha\,\alpha_0)$, ad esso corrispondente. Ad I appartiene sempre un S_0 di corrispondenze simmetriche speciali (n.° 8); sono quelle che hanno per immagine il sistema nullo singolare individuato dal complesso lineare speciale di asse r. Perchè ad I appartengano corrispondenze emisimmetriche, occorre che la polarità rispetto alla quadrica degenere nella coppia di piani $r\,\alpha$, $r\,\alpha_0$ sia razionale, cioè che i due piani medesimi siano gli elementi doppi di una involuzione razionale entro il fascio di asse r. Prendendo allora in questo fascio gli elementi di riferimento razionali, dovranno le due coordinate $\omega\,\omega'$, che il piano $r\,\alpha$ ha entro il fascio, soddisfare ad una equazione quadratica omogenea a coefficienti interi e a determinante negativo. E poichè ω ed ω' sono i periodi ridotti dell'integrale riducibile I, si deduce che l'integrale stesso è a moltiplicazione complessa. Abbiamo dunque il risultato:

Ad un integrale ellittico appartiene sempre un S_0 *di corrispondenze speciali simmetriche; quando l'integrale è a moltiplicazione complessa, ad esso appartiene pure un* S_0 *di corrispondenze speciali emisimmetriche.*

(*) Basta, per scrivere la tabella, considerare le coordinate dei piani che da una delle rette proiettano i vertici 2 ed 1 della piramide di riferimento.

§ 5. Digressione.

11. La ricerca, di cui si parla nel n.° precedente, viene facilitata ricorrendo alla notissima rappresentazione di Klein dello spazio rigato $\omega = (\alpha\ \alpha_0)$ sopra una quadrica V_4^2 di S_5. Ma, per procedere con chiarezza, dobbiamo premettere alcune osservazioni sulle quadriche di S_5 con S_2 reali, e sulle omografie involutorie razionali di un iperspazio.

Teorema III. *Data in S_5 una quadrica non specializzata V_4^2 contenente S_2 reali, un S_3 reale, non tangente ad essa, la sega in una V_2^2 (reale) a punti iperbolici od ellittici, secondochè l'S_1 polare dell'S_3 è secante o non secante della quadrica stessa; e due S_2 polari reali la segano in due coniche che sono insieme reali o immaginarie.*

In virtù del significato geometrico della legge d'inerzia di Sylwester (*), l'equazione della V_4^2 con S_2 reali si può infatti, mediante una trasformazione reale delle coordinate, ridurre alla forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Osservando allora le sezioni della V_4^2 con un S_1 ed un S_3 opposti, ovvero con due S_2 opposti della piramide di riferimento, l'asserto viene subito provato.

12. Sulle omografie razionali involutorie ci occorreranno in seguito i seguenti due teoremi:

Teorema IV. *In una omografia involutoria razionale di S_n, gli spazi fondamentali, quando hanno dimensioni diverse, sono razionali.*

Infatti, per l'ipotesi fatta, l'equazione di grado $n+1$ a coefficienti razionali, da cui dipende la ricerca degli spazi fondamentali dell'omografia, dovrà ammettere due sole radici, di diversa molteplicità. Ciascuna di esse appartiene dunque al campo di razionalità dei coefficienti, sarà cioè razionale. Di qui segue subito che sono razionali gli spazi fondamentali medesimi.

Corollario. *Le omografie involutorie razionali in uno spazio di dimensione pari hanno sempre gli spazi fondamentali razionali.*

(*) Vedasi, ad es., Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (loc. cit.), pag. 124.

TEOREMA V. *In uno spazio S_{2m+1} di dimensione dispari sia data un'omografia involutoria razionale con gli spazi fondamentali S_m S'_m di ugual dimensione. Se uno di questi, S_m, è contenuto in uno spazio razionale, ovvero contiene uno spazio razionale, S_m ed S'_m sono razionali.*

Se infatti S_l $(l > m)$ è uno spazio razionale passante per S_m, entro S_l, che è unito nell'omografia data, questa subordina un'omografia involutoria razionale la quale ha gli spazi fondamentali di dimensione diversa: uno di questi è S_m, l'altro l'intersezione di S_l con S'_m. Per il teorema precedente, lo spazio S_m dovrà dunque essere razionale, dal che segue subito che è razionale anche S'_m.

Supposto poi che S_l $(l < m)$ sia uno spazio razionale contenuto in S_m, facendo il ragionamento duale, considerando cioè l'omografia involutoria razionale subordinata nella stella di centro S_l, si giunge alla dimostrazione della seconda parte del teorema.

§ 6. RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO RIGATO $\omega = (\alpha\, \alpha_0)$ SOPRA UNA QUADRICA DI S_5.

13. Assumendo come immagine di una retta di ω il punto di S_5 che ha per coordinate omogenee le coordinate plückeriane della retta, lo spazio rigato $\omega = (\alpha\, \alpha_0)$ viene rappresentato sulla quadrica Φ di S_5 la cui equazione è

$$(p\, p) = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0\,;$$

ai punti e ai piani di ω vengono a corrispondere gli S_2 dei due sistemi della quadrica Φ, che diremo *primo* e *secondo* sistema.

Qui importa notare che, in siffatta rappresentazione, quando un ente di ω (punto, retta, piano) è reale o, in particolare, razionale, l'ente omologo di Φ è pure reale o razionale.

Un sistema nullo di ω ha per immagine un'omologia armonica di S_5 i cui spazi fondamentali sono un S_0 e un S_4 polari rispetto a Φ. Se il sistema nullo è razionale, l'omologia suddetta è razionale ed ha quindi (teor. IV) gli spazi fondamentali razionali.

Una polarità di ω ha per immagine un'omografia involutoria di S_5 i cui spazi fondamentali sono due S_2 polari rispetto a Φ. Se la polarità è razionale, l'omografia è pure razionale; sui suoi spazi fondamentali possiamo soltanto affermare che sono reali, quando si sappia che la quadrica a coefficienti razionali, fondamentale della polarità, è reale a punti iperbolici, ovvero immaginaria (*).

Gli ∞^3 complessi lineari dello spazio ω contenenti le rette α ed α_0, vengono rappresentati dagli ∞^3 iperpiani passanti per una retta reale a non secante la Φ; fra questi è l'iperpiano *razionale* π, immagine del complesso fondamentale A. La polarità rispetto a Φ trasforma questi iperpiani nei punti dell'$S_3 = \tau$, polare di a, e fornisce quindi la rappresentazione *reale* dei complessi lineari stessi sui punti di un S_3, a cui si riferisce il teorema del professore Scorza. I complessi speciali sono rappresentati dai punti della quadrica φ a punti ellittici (teor. III) sezione di Φ con τ, ed il complesso fondamentale A da un punto *razionale* P, che, per il teorema suddetto, dovrà essere interno a φ.

Inversamente è chiaro che una retta reale a, non secante la Φ, il cui S_3 polare contenga un punto *razionale* P interno alla quadrica reale φ a punti ellittici in cui il detto S_3 sega la Φ, determina una coppia $(\alpha\,\alpha_0)$ di rette corrispondente ai periodi di una curva di genere due (**).

(*) Scritta l'equazione della quadrica sotto la forma canonica

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0, \qquad (1)$$

in cui i coefficienti a_i sono numeri interi positivi o negativi, fra le coordinate plückeriane $p_{ik}\, p'_{ik}$ di due rette polari rispetto ad essa, sussistono, com'è facile vedere, le relazioni

$$\left.\begin{array}{ll} \rho\, p'_{12} = a_3 a_4 p_{34} & \rho\, p'_{34} = a_1 a_2 p_{12} \\ \rho\, p'_{13} = a_4 a_2 p_{42} & \rho\, p'_{42} = a_1 a_3 p_{13} \\ \rho\, p'_{14} = a_2 a_3 p_{23} & \rho\, p'_{23} = a_1 a_4 p_{14}\,; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

queste sono poi le formule della omografia razionale involutoria di S_5 che rappresenta la polarità. Poichè l'equazione da cui dipende la ricerca degli spazi fondamentali di detta omografia ammette le due radici triple

$$\rho = \pm \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}\,,$$

si deduce che i due S_2 fondamentali dell'omografia stessa sono reali, quando la quadrica (1) è a punti iperbolici ovvero immaginaria; sono immaginari coniugati, quando la quadrica suddetta è a punti ellittici.

I due S_2 saranno poi razionali soltanto nel caso in cui il prodotto $a_1 a_2 a_3 a_4$ sia un quadrato.

(**) Con una omografia razionale che non muti la Φ, si può infatti condurre l'iperpiano polare di P nell'iperpiano $p_{13} + p_{24} = 0$.

14. Un punto razionale di τ è dunque immagine di un S_0 di corrispondenze simmetriche della curva C; in particolare P è immagine dell'S_0 costituito dalle corrispondenze a valenza. Quando il punto giace sulla quadrica φ, l'S_0 è di corrispondenze speciali; il punto si assume anche come immagine dell'integrale ellittico cui appartiene il detto S_0 di corrispondenze.

Un S_1 ed un S_2 di corrispondenze simmetriche sono rappresentati da una retta e da un piano razionali dello spazio τ. Poichè la quadrica φ non contiene rette reali, si deduce che non possono esistere sulla curva degli S_1 di corrispondenze simmetriche tutte speciali.

Un piano reale di τ, non tangente a φ, che, insieme al suo polare rispetto a Φ, definisca un'omografia involutoria razionale, è immagine di un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali. Nelle condizioni dette si trova certo ogni piano razionale di τ non tangente a φ.

Caratterizziamo ora i piani rappresentanti gli S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali. Sia perciò M un punto razionale di φ immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa, e indichiamo con μ il piano ivi tangente alla φ. Il piano $\mu' = Ma$ sarà polare di μ rispetto a Φ, cioè rispetto alla V_3^2 specializzata in cui l'iperpiano ξ, tangente in M a Φ, sega la Φ. Nella stella dell'iperpiano ξ, che ha il centro in M, si consideri l'omografia involutoria i cui spazi fondamentali sono μ e μ'; essa subordina nelle due schiere di S_2 del primo e del secondo sistema appartenenti alla V_3^2, ciascuna delle quali contiene infiniti S_2 razionali, due involuzioni I_1 e I_2. La condizione perchè M sia immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa, e quindi il piano μ rappresenti un S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali, è che la *seconda* involuzione I_2 sia razionale.

È chiaro che se il piano μ (e quindi anche μ') è razionale, le involuzioni I_1 e I_2 sono entrambe razionali. Dunque un piano razionale di τ tangente a φ (*) è certo immagine di un S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali.

Se una corrispondenza emisimmetrica descrive un S_1 o un S_2, il piano di τ che la rappresenta varia in un fascio o in una stella. Si vede dunque che non possono esistere sulla curva degli S_1 di corrispondenze emisimmetriche tutte speciali.

(*) Quando un piano razionale di τ tocca φ, il punto di contatto è pure razionale. Questo punto è infatti quello che il piano ha comune col suo polare rispetto a Φ.

§ 7. Determinazione dei valori di μ_1 e di μ_2.

15. Per quanto abbiamo visto al n.° 6, i valori possibili per il numero base μ_1 delle corrispondenze simmetriche sulla curva C sono 1, 2, 3, 4.

Esaminiamo il

1.° Caso: $\mu_1 = 1$. Lo spazio τ contiene allora l'unico punto razionale P, immagine dell'S_0 delle corrispondenze a valenza. Proveremo ora che non esistono sulla C corrispondenze emisimmetriche, onde è $\mu_2 = 0$.

La curva intanto non possiede corrispondenze speciali, non contenendo la quadrica φ alcun punto razionale.

Si supponga che esista su C una corrispondenza emisimmetrica non speciale; essa sarà rappresentata da un piano reale λ dello spazio τ, non tangente a φ, che insieme al suo polare λ' rispetto alla quadrica Φ individua un'omografia involutoria razionale. Questa omografia subordina in τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, che è polo di λ rispetto alla quadrica φ. Il punto P non può giacere nel piano λ nè coincidere col punto L, chè altrimenti uno dei piani $\lambda\,\lambda'$ verrebbe a contenere un punto razionale, e dovrebbero perciò entrambi essere razionali (n.° 12, Teor. V), contro l'ipotesi $\mu_1 = 1$. Ma allora l'omologo di P nell'omologia (L, λ) sarà un punto razionale distinto da P, e ciò contradice pure all'ipotesi.

Vediamo dunque che l'S_0 delle corrispondenze a valenza esaurisce la totalità delle corrispondenze; si ha cioè il notevole risultato:

Se una curva di genere due non possiede corrispondenze singolari simmetriche, ogni corrispondenza su di essa è dotata di valenza.

16. *2.° Caso*: $\mu_1 = 2$. La curva possiede un S_1 di corrispondenze simmetriche, rappresentato nello spazio τ da una retta razionale r_1 contenente il punto P e secante la φ in due punti reali $L_1\,L_2$.

Facciamo l'ipotesi che esista su C una corrispondenza emisimmetrica T e sia λ il piano dello spazio τ che ad essa corrisponde. Se la T è speciale, il piano λ è tangente a φ in uno dei punti $L_1\,L_2$ (che dovrà perciò essere razionale), e passa quindi per la retta s, polare di r_1 rispetto a φ.

Se poi T è non speciale, il piano λ non tocca la quadrica φ, e, insieme al suo polare λ', individua un'omografia involutoria razionale, la quale subordina nello spazio τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, polo di λ rispetto a φ.

Poichè τ non contiene punti razionali esterni ad r_1, la r_1 dovrà essere trasformata in sè da questa omologia, e, non potendo giacere in λ (n.° 12, Teor. V), dovrà passare per il punto L. Ne segue che λ dovrà contenere la retta s.

I piani dello spazio τ, che rappresentano corrispondenze emisimmetriche, vanno dunque ricercati nel fascio (s), donde segue che al massimo è $\mu_2 = 2$.

Si prenda ora su r_1 un punto razionale qualsiasi X e sia Ξ il suo iperpiano polare rispetto a Φ, il quale segherà τ nel piano ξ del fascio (s) che è polare di X rispetto a φ. Un piano λ del fascio (s), che sia immagine di una corrispondenza emisimmetrica *non speciale*, è trasformato dall'omologia armonica razionale (X, Ξ) di S_5, o, ciò che è lo stesso, dall'omologia armonica (X, ξ) di τ, in un piano che è pure immagine di una tale corrispondenza.

Così non può dirsi se λ rappresenta una corrispondenza emisimmetrica speciale, perchè l'omologia (X, Ξ) muta bensì l'uno nell'altro i punti $L_1 L_2$, ma trasforma gli S_2 di un sistema di Φ uscenti da L_1 negli S_2 dell'altro sistema uscenti da L_2, onde può avvenire che l'uno dei punti e non l'altro sia immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa (cfr. n.° 14).

Facendo poi variare il punto razionale X su r_1, si deduce che *se la curva contiene una corrispondenza emisimmetrica non speciale, contiene un S_1 di corrispondenze emisimmetriche.*

In questa ipotesi, possiamo dire di più che se i punti L_1 ed L_2 sono razionali, e quindi immagini di due integrali ellittici (*), questi devono essere a moltiplicazione complessa; cioè *se l'S_1 di corrispondenze simmetriche contiene due S_0 di corrispondenze speciali, anche l'S_1 delle emisimmetriche contiene due S_0 di corrispondenze speciali.*

Infatti, l'$S_3 = (a\, s)$, polare di r_1 rispetto a Φ, è razionale e sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici (n.° 11). Essa contiene poi nelle sue due schiere infinite generatrici razionali, traccie nel detto S_3 degli S_2 razionali dei due sistemi uscenti dal punto razionale L_1 (ovvero dal punto L_2). L'involuzione gobba che ha per assi le rette a ed s, essendo subordinata nel detto S_3 dalle omografie razionali involutorie $(\lambda\, \lambda')$ di S_5, immagini delle corrispondenze emisimmetriche, sarà razionale e subordinerà quindi a sua volta due involuzioni razionali nelle due schiere di generatrici della V_2^2. Ciò basta per af-

(*) Se l'uno è razionale, lo è anche l'altro, perchè ulteriore intersezione della quadrica razionale Φ con la retta razionale r_1 uscente da un suo punto razionale. Si ha così, per via geometrica, la conferma di un noto teorema di PICARD.

fermare che i due integrali ellittici aventi per immagini i punti razionali L_1 ed L_2 sono a moltiplicazione complessa.

Dal ragionamento fatto discende che, nel caso $\mu_1 = 2$, le sole ipotesi possibili sono le seguenti:

a) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$. *La curva possiede un S_1 di corrispondenze simmetriche e nessuna emisimmetrica.*

Questo caso si suddivide in due:

a′) *Le corrispondenze simmetriche sono tutte non speciali.*

a″) *Esistono nel detto S_1 due S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora due integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

b) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. *Sulla curva esiste un S_1 di corrispondenze simmetriche contenente due S_0 di corrispondenze speciali, e un S_0 di corrispondenze speciali emisimmetriche. La curva possiede due integrali ellittici, dei quali uno è a moltiplicazione complessa.*

c) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$. *Sulla curva esiste un S_1 di corrispondenze simmetriche ed un S_1 di emisimmetriche.* Questo caso si suddivide pure in due:

c′) *Non esistono sulla curva corrispondenze speciali.*

c″) *I due S_1 contengono entrambi due S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora due integrali ellittici, entrambi a moltiplicazione complessa.*

17. *3.° Caso*: $\mu_1 = 3$. Le corrispondenze simmetriche della curva formano un S_2 rappresentato entro lo spazio τ da un piano razionale r_2 passante per P e secante quindi la quadrica φ in una conica reale non degenere f.

Sulla curva esiste certo un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali rappresentato pure dal piano razionale r_2 (n.° 14); dico che, all'infuori di quelle esistenti nel detto S_0, la curva non possiede altre corrispondenze emisimmetriche.

Esista infatti una corrispondenza emisimmetrica non speciale indipendente da quelle: sia λ il piano dello spazio τ, diverso da r_2, che la rappresenta e λ' il suo polare rispetto a Φ.

La omografia razionale involutoria (λ, λ') di S_5 subordina nello spazio τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, polo di λ rispetto a φ. Poichè τ non contiene punti razionali esterni al piano r_2, il piano stesso sarà unito in quell'omologia e dovrà quindi passare per il centro L della medesima. In esso verrà poi subordinata un'omologia armonica razionale che ha L per centro e la retta $l = (\lambda\, r_2)$ per asse. Il punto L e la retta l dovranno quindi essere razionali (n.° 12, Teor. IV), e saranno quindi razionali i piani $\lambda\, \lambda'$ (n.° 12, Teor. V), contro l'ipotesi $\mu_1 = 3$.

Suppongasi ora che esista su C una corrispondenza emisimmetrica speciale, rappresentata dal piano ξ tangente a φ in un punto razionale X della conica f, la quale verrà perciò a contenere infiniti punti razionali. Indicato allora con Ξ l'iperpiano razionale tangente in X alla Φ, e con V_3^2 la quadrica specializzata in cui Ξ sega la Φ, nella stella dell'iperpiano Ξ che ha il centro in X, l'omografia involutoria, che ha per spazi fondamentali il piano ξ ed il piano $\xi' = X a$, subordina nella schiera degli S_2 del *secondo* sistema di V_3^2 una involuzione razionale I_2 (n.° 14).

Il piano razionale r'_2, polare di r_2 rispetto a Φ, è contenuto in Ξ e sega la V_3^2 in una conica f' con infiniti punti razionali (quelli che r'_2 ha comuni con gli S_2 razionali di V_3^2), e la involuzione I_2 determina su f' un'involuzione razionale. L'omologia armonica del piano r'_2, che subordina su f' quest'ultima involuzione, sarà dunque razionale; e poichè il centro di essa è il punto $(r'_2\, \xi)$, si deduce che lo spazio τ contiene un punto razionale esterno ad r'_2, contro l'ipotesi.

Si deduce dunque che quando è $\mu_1 = 3$, dovrà essere $\mu_2 = 1$, cioè:

Se le corrispondenze simmetriche della curva formano un S_2, la curva possiede un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali.

In tal caso può darsi che:

a) *L'S_2 delle corrispondenze simmetriche sia tutto di corrispondenze non speciali.*

b) *Nel detto S_2 siano contenuti infiniti S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

18. *4.° Caso*: $\mu_1 = 4$. Sulla curva esiste un S_3 di corrispondenze simmetriche rappresentate dall'intero spazio τ, che dovrà essere allora uno spazio razionale. La quadrica φ contiene infiniti punti razionali, quelli che τ ha comuni con gli S_2 razionali di Φ. Il piano tangente a φ in uno di questi punti, essendo l'intersezione dello spazio τ con l'iperpiano razionale tangente nel punto medesimo alla Φ, è razionale. Gli infiniti punti razionali di φ sono dunque immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa (n.° 14); ed i piani in essi tangenti alla φ rappresentano degli S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali.

Ogni piano razionale di τ, non tangente a φ, è immagine di un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali; inversamente, un piano che sia immagine di un tale S_0, per il fatto che è contenuto nello spazio razionale τ, è razionale. Segue dunque che quando è $\mu_1 = 4$, deve essere $\mu_2 = 4$, cioè:

Se la curva possiede un S_3 di corrispondenze simmetriche, possiede anche un S_3 di corrispondenze emisimmetriche. Tanto il primo come il secondo S_3 contengono infiniti S_0 di corrispondenze speciali, e sulla curva si hanno infiniti integrali ellittici tutti a moltiplicazione complessa.

Osservazione. Notevole è il fatto che quando esistono sulla curva integrali ellittici, la conoscenza del numero e della specie di questi conduce subito alla determinazione dei valori di μ_1 e di μ_2.

Così se la curva possiede due (soli) integrali ellittici, che non siano a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$.

Se dei due integrali *uno* è a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.

Se entrambi sonò a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

Se la curva possiede più di due integrali ellittici, ne possiede, come è noto, infiniti. Può darsi allora che nessuno di questi sia a moltiplicazione complessa, ovvero tutti siano a moltiplicazione complessa. Nel primo caso si ha $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, nel secondo $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 4$.

§ 8. Dimostrazione della effettiva esistenza di curve cui si riferiscono i valori trovati di μ_1 e di μ_2.

19. Sia P un punto razionale di S_5 e π il suo iperpiano polare rispetto a Φ. Poichè la V_3^2 in cui π sega Φ contiene S_1 reali, la sua equazione in π si può, mediante una trasformazione reale delle coordinate, ridurre alla forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0 ;$$

questa dice che in ogni quintupla reale polare di V_3^2 esiste un S_1 non secante il cui S_2 polare ha comune con V_3^2 una conica immaginaria. Chiamando a ed α l'S_1 e l'S_2 suddetti, l'$S_3 = P\alpha$, polare di a rispetto a Φ, sega Φ in una quadrica φ a punti ellittici (n.° 11); e poichè il piano α, polare di P rispetto a φ, sega φ in una conica immaginaria, il punto P sarà interno a φ. Variando la suddetta quintupla reale in modo continuo, l'$S_3 = P\alpha$ varia con continuità intorno a P. Ne segue che la retta a può essere scelta in modo che l'$S_3 = P\alpha$ non contenga, all'infuori di P, alcun punto razionale (*).

La retta a fornisce allora (n.° 13) una coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva di genere due che si trova nelle condizioni del 1.° Caso (n.° 15).

20. Sia r_1 una retta razionale secante la quadrica Φ in due punti reali $L_1\, L_2$. Nell'S_3 polare di r_1, il quale sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici (n.° 11), si consideri un tetraedro polare della V_2^2 stessa e siano $a\, a'$ i due spigoli opposti non secanti. L'$S_3 = r_1\, a'$, polare di a rispetto a Φ, sega Φ in una quadrica φ a punti ellittici che ha comuni con r_1 i punti $L_1\, L_2$. Variando con continuità il detto tetraedro, l'$S_3 = r_1\, a'$ varia con continuità intorno ad r_1; ne segue che a può esser scelta in modo che l'$S_3 = r_1\, a'$ non contenga alcun punto razionale esterno ad r_1, nè alcun piano fondamentale di una omografia razionale involutoria trasformante in sè la Φ (**).

Se allora i due punti $L_1\, L_2$ non sono razionali, la retta a fornisce la coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva che si trova nelle condizioni del 2.° Caso a') (n.° 16).

Facciamo ora l'ipotesi che L_1 ed L_2 siano razionali. Al variare continuo dell'$S_3 = r_1\, a'$, il piano λ_1 tangente in L_1 alla φ, cioè l'intersezione del detto S_3 con l'iperpiano A_1 tangente in L_1 a Φ, varia pure in modo continuo. Nei due sistemi di S_2 della V_3^2 sezione di A_1 con Φ, il piano λ_1 ed il suo polare λ'_1 subordinano dunque due involuzioni che variano pure in modo continuo. La retta a può quindi essere scelta in modo che nessuna delle due involuzioni sia razionale, ed allora fornisce una coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva che si trova nelle condizioni del 2.° Caso a'') (n.° 16).

21. Si mantenga l'ipotesi che i punti $L_1\, L_2$ in cui r_1 sega Φ siano razionali. La V_2^2 sezione di Φ con l'S_3 polare di r_1 è a punti iperbolici e contiene nelle sue due schiere infinite generatrici razionali, traccie nel detto S_3 degli infiniti S_2 razionali di Φ uscenti da L_1 e da L_2. Si fissi allora in una

(*) Qui applichiamo la proprietà: *Uno spazio reale S_k che si muove in un S_r* **in modo continuo,** *non può contenere uno spazio razionale variabile.* L'ipotesi opposta condurrebbe infatti all'assurdo che l'*insieme* costituito da una infinità di spazi razionali avrebbe la stessa potenza del continuo.

(**) Poichè un tal piano dipende da un gruppo d'interi (i coefficienti dell'omografia razionale), l'insieme costituito da una infinità di questi piani non può avere la potenza del continuo. Vale dunque per essi la considerazione fatta nella Nota precedente per gli spazi razionali.

schiera un'involuzione ellittica I_2 che mandi ogni generatrice razionale in una pure razionale (basta, per individuare I_2, prendere due coppie separantisi di generatrici razionali), e sia I_1 un'involuzione ellittica dell'altra schiera scelta in modo generico. Le due involuzioni I_1 e I_2 stabiliscono fra i punti della V_2^2 una corrispondenza biunivoca involutoria, la quale, com'è facile vedere, è omografica; e siccome manda in sè ciascuna delle due schiere, sarà contenuta in una involuzione gobba dello spazio S_3. Per il fatto che le involuzioni I_1 e I_2 sono ellittiche, gli assi a e a' di questa involuzione gobba sono reali e non secanti la V_2^2. L'$S_3 = (r_1 a')$ sega quindi la Φ in una quadrica φ a punti ellittici, che ha comuni con r_1 i punti $L_1 L_2$. Tenendo fissa l'involuzione razionale I_2 e variando con continuità I_1, si può fare in modo che l'$S_3 = r_1 a'$, il quale varia con continuità intorno ad r_1, non contenga punti razionali esterni ad r_1; ma poichè ora *uno* dei punti $L_1 L_2$ è immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa (quello cioè che proietta la schiera sostegno di I_2' mediante S_2 del 2.° sistema di Φ (n.° 14)), si deduce che la retta a fornisce una coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.° Caso b) (n.° 16).

22. Le involuzioni $I_1 I_2$ siano ora entrambe razionali, ma scelte del resto in modo affatto generico; i due punti $L_1 L_2$ sono allora immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa, e la retta a fornisce quindi la coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.° Caso c″) (n.° 16).

Osservazione. Poichè le involuzioni I_1 e I_2 devono ora essere razionali, non è più possibile farle variare in modo continuo. Sorge quindi il dubbio che non si possa evitare che lo spazio $S_3 = r_1 a'$ venga a contenere punti razionali esterni ad r_1.

Si osservi anzitutto che quando, per una determinata coppia di involuzioni razionali $I_1 I_2$, un punto razionale esterno ad r_1 viene a cadere in τ, τ dovrà divenire uno spazio razionale, non potrà cioè contenere un solo piano razionale passante per r_1. Questo piano segherebbe infatti la φ in una conica f con infiniti punti razionali, fra i quali L_1 ed L_2 sarebbero immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa, e ciò non può avvenire come abbiam visto al n.° 17.

Quando poi lo spazio τ diviene razionale, dovrà esser razionale la sua polare a rispetto a Φ, e quindi anche a'. Il dubbio cui sopra abbiamo accennato sarà quindi rimosso, quando si mostri che con una scelta generica delle involuzioni $I_1 I_2$ nel campo razionale le rette $a a'$ non sono razionali.

Si ripeta perciò per lo spazio rigato $(a\,a')$ la rappresentazione di KLEIN che abbiamo sopra applicato allo spazio $\omega = (\alpha\,\alpha_0)$. Le due schiere della quadrica V_2^2 contenuta in detto spazio son rappresentate da due coniche $f\,f'$, con infiniti punti razionali, sezioni di Φ con un S_2 ed un S'_2 polari; e le due involuzioni $I_1\,I_2$ da due involuzioni sulle coniche stesse aventi per centri due punti razionali $H\,H'$ di S_2 e di S'_2 interni ad f ed f'. Le intersezioni $A\,A'$ di Φ con la retta $H\,H'$ (le quali sono certamente reali perchè, com'è facile vedere, l'S_3 polare di $H\,H'$ sega Φ in una quadrica a punti iperbolici) sono poi le immagini delle rette $a\,a'$. E siccome ogni retta razionale secante la Φ può mettersi nelle condizioni della $H\,H'$ (*), si deduce che con una scelta generica delle I_1 e I_2 nel campo razionale le rette $a\,a'$ non sono razionali.

23. Per dimostrare l'esistenza di curve per le quali si verifica il 2.° Caso c') procederemo nel modo seguente.

Si consideri in S_5 un'omografia razionale involutoria trasformante in sè la Φ, i cui piani fondamentali $\lambda\,\lambda'$ siano reali ma non razionali, ed inoltre secanti la Φ in coniche immaginarie (**). Si indichi poi con r_1 la retta razionale congiungente due punti razionali omologhi nell'omografia $(\lambda\,\lambda')$. L'S_3 polare di r_1 sega Φ in una V_2^2 e i due piani $\lambda\,\lambda'$ in due rette $a\,a'$ polari rispetto a questa V_2^2. Poichè, per l'ipotesi fatta, a ed a' sono entrambe non secanti, la V_2^2 sarà a punti iperbolici e quindi r_1 segherà Φ in due punti reali $L_1\,L_2$. Essi non saranno poi razionali se i due punti razionali omologhi nella omografia $(\lambda\,\lambda')$, congiunti dalla r_1, sono scelti in modo generico (***).

(*) Giustifichiamo l'asserzione. Sia infatti r una retta razionale secante la Φ in due punti $A\,A'$ reali ma non razionali; il suo S_3 polare rispetto a Φ è razionale e sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici con infiniti punti razionali. Si costruisca un tetraedro razionale polare rispetto a questa quadrica e siano $r_1\,r_2$ i due spigoli opposti non secanti. L'$S_3 = (r\,r_1)$, polare di r_2, sega Φ in una quadrica $\overline{V}_2^2$ a punti ellittici, con infiniti punti razionali. Un piano λ condotto per r_1 e per un punto razionale di questa $\overline{V}_2^2$ sega Φ in una conica f con infiniti punti razionali e la r in un punto razionale H, che sarà interno ad f. Il piano λ', polare di λ, passa per r_2, sega Φ in una conica f' contenente infiniti punti razionali, e la r in un punto razionale H' interno ad f'. La retta r è dunque nelle condizioni richieste.

(**) Per la dimostrazione della possibilità della scelta dei piani $\lambda\,\lambda'$ soddisfacenti alle condizioni suddette, vedasi la nota al n.° 13.

(***) Supposto che l'omografia $(\lambda\,\lambda')$ sia rappresentata dalle formule (2) della nota al n.° 13, è facile provare con semplice calcolo che l'equazione di 2° grado da cui dipende la ricerca dei punti $L_1\,L_2$ ha il discriminante sempre positivo, se $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ sono positivi, ma non necessariamente un quadrato.

Lo spazio $\tau = (a' r_1)$, polare di a, segherà Φ in una quadrica φ a punti ellittici, avente comuni con r_1 i punti $L_1\, L_2$. Inoltre è facile vedere che in τ non esiste alcun punto razionale esterno ad r_1. Infatti l'ipotesi che τ sia razionale, ovvero contenga un piano razionale passante per r_1, contradice al fatto che τ contiene il piano λ', non razionale, fondamentale dell'omografia razionale involutoria $(\lambda\, \lambda')$ (vedansi i n.i 17, 18).

È chiaro allora che la retta a fornisce una coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.° Caso c') (n.° 16).

24. Siano r_2 ed r'_2 due piani razionali, polari rispetto a Φ e secanti la Φ in due coniche reali f ed f'. Si prenda in r'_2 una retta a, reale ma non razionale, non secante la f'. Il suo spazio polare τ segherà Φ in una quadrica φ a punti ellittici avente comune col piano razionale r_2 la conica reale f. Essendo a non razionale, lo spazio τ non contiene punti razionali esterni ad r_2; ne segue che a fornisce la coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 3.° Caso a) (n.° 17).

Se poi r_2 è il piano determinato da tre punti razionali di Φ, la f contiene infiniti punti razionali, ed otteniamo il 3.° Caso b) (n.° 17).

Infine ogni retta razionale non secante la Φ fornisce la coppia $(\alpha\, \alpha_0)$ relativa al 4.° Caso (n.° 18).

Pisa, luglio 1915.