

# ÜBER DIE AUS DEN SINGULÄREN STELLEN EINER ANALYTISCHEN FUNKTION MEHRERER VERÄNDERLICHEN BESTEHENDEN GEBILDE.

VON

F. HARTOGS

IN MÜNCHEN.

Über die allgemeinen Eigenschaften derjenigen Gebilde, welche aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehen, ist zur Zeit noch sehr wenig bekannt.<sup>1</sup> Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen den Zweck, die Beschränkungen festzustellen, denen diese Gebilde in den einfachsten und nächstliegenden (als Analoga zum Falle der *isolierten* singulären Stelle bei den Funktionen *einer* Veränderlichen aufzufassenden) Fällen unterworfen sind. Das Ergebnis lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass in diesen Fällen die Gebilde stets *analytische* sein müssen.<sup>2</sup> Ausführlicher sei hierüber, sowie insbesondere über die Gesichtspunkte, welche bei der genaueren Charakterisierung der zu untersuchenden Fälle massgebend waren, folgendes vorausgeschickt.

Für die Funktion  $f(x, x', x'', \dots, y)$  der unabhängigen Veränderlichen  $x, x', x'', \dots$  und  $y$  sei die Stelle  $x = x' = x'' = \dots = y = 0$  eine singuläre. Ist dieselbe zunächst eine *ausserwesentlich* singuläre, — d. h. existieren zwei für die Umgebung dieser Stelle reguläre Funktionen  $P(x, x', \dots, y)$  und  $Q(x, x', \dots, y)$ , welche so beschaffen sind, dass in allen Punkten der Umgebung, in denen  $Q(x, x', \dots, y)$  nicht verschwindet, die Relation

---

<sup>1</sup> Vgl. hierüber meinen Vortrag »Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen« (Jahresber. d. Deutschen Mathem. Vereinigung 16 (1907), p. 223), in welchem ich eines der Resultate der vorliegenden Arbeit bereits kurz angedeutet habe.

<sup>2</sup> Genauer: »aus monogenen analytischen Gebilden ( $n - 1$ )ter Stufe (WEIERSTRASS, Werke III, p. 101) zusammengesetzt sein müssen«, wobei  $n$  die Anzahl der unabhängigen komplexen Veränderlichen bedeutet.

$$f(x, x', \dots, y) = \frac{P(x, x', \dots, y)}{Q(x, x', \dots, y)}$$

besteht, — so ist man über die Gesetze, nach welchen die in der Umgebung dieser Stelle gelegenen weiteren singulären Stellen verteilt sind, genau orientiert. Nimmt man nämlich in diesem Falle noch weiterhin an, dass die Funktionen  $P(x, x', \dots, y)$  und  $Q(x, x', \dots, y)$  — was sich durch geeignete Wahl derselben stets ermöglichen lässt — nicht beide durch eine und dieselbe, in der Umgebung des Punktes  $(0, 0, \dots, 0)$  reguläre und in diesem Punkte selbst verschwindende Funktion teilbar seien, so werden *die sämtlichen in einer gewissen Umgebung jenes Punktes gelegenen singulären Stellen von  $f(x, x', \dots, y)$  durch das Verschwinden der Funktion  $Q(x, x', \dots, y)$  gekennzeichnet*. Hieraus ergibt sich dann (wenn man von einem speziellen, durch lineare Transformation der Veränderlichen zu beseitigenden Ausnahmefalle absieht) durch Anwendung des WEIERSTRASSschen »Vorbereitungssatzes«<sup>1</sup> des weiteren die Existenz einer positiven ganzen Zahl  $r$  von der Beschaffenheit, dass in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle zu *jedem Wertsystem  $x = \xi, x' = \xi', \dots$  genau  $r$  im allgemeinen von einander verschiedene singuläre Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta_1), \dots, (\xi, \xi', \dots, \eta_r)$  jener Funktion gehören*.

Hiernach liegt es nun nahe, auch bei Singularitäten beliebiger Art als einfachsten Fall denjenigen anzusehen, in welchem in einer gewissen Umgebung der betrachteten singulären Stelle zu jedem Wertsysteme  $x = \xi, x' = \xi', \dots$  genau *ine* (ev. *höchstens* eine) singuläre Stelle  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$  vorhanden ist. Dieser Fall ist im folgenden als erster behandelt und es ergibt sich dabei das (bei ausserwesentlichen singulären Stellen unmittelbar aus dem Obigen hervorgehende) Resultat, dass  $\eta$  *stets eine für  $\xi = 0, \xi' = 0, \dots$  reguläre analytische Funktion von  $\xi, \xi', \dots$  sein müsse*.

Geht man von diesem Falle, welcher dem Werte  $r=1$  entspricht, zu dem allgemeineren über, in welchem  $r$  einer beliebigen positiven ganzen Zahl gleich ist, so zeigt sich auch hier noch eine vollständige Analogie mit den Verhältnissen bei den ausserwesentlichen singulären Stellen: Die Gesamtheit der in der Umgebung gelegenen singulären Stellen wird nämlich stets durch das Verschwinden einer im Nullpunkte regulären Funktion gekennzeichnet. Das Ergebnis lässt sich hier etwas ausführlicher in der folgenden Weise darstellen:

Wenn überhaupt die Gesamtheit der in der Umgebung des Nullpunktes gelegenen singulären Stellen durch das Verschwinden einer im Nullpunkte

<sup>1</sup> Vgl. über diesen sowie über die im Vorstehenden berührten Dinge des Näheren WEIERSTRASS, »Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze« (Abhandl. a. d. Funktionenlehre p. 107 = Werke II, p. 135) §§ 1—3. (Doch wird von diesen Untersuchungen im folgenden nirgends Gebrauch gemacht).

regulären Funktion charakterisiert wird (wie es bei den ausserwesentlichen singulären Stellen nach Obigem stets der Fall ist), so folgt — nötigenfalls nach Vornahme einer linearen Transformation der Veränderlichen — aus dem WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatze die Existenz einer positiven Zahl  $r$  von der folgenden Beschaffenheit: In einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle gehören zu jedem Wertsystem  $x = \xi, x' = \xi', \dots$  höchstens  $r$  singuläre Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta_1), \dots, (\xi, \xi', \dots, \eta_r)$  der betrachteten Funktion; unter den Wertsystemen  $\xi, \xi', \xi'', \dots$  gibt es jedoch, sobald  $\xi', \xi'', \dots$  festgehalten werden, nur eine *endliche* Anzahl, für welche die Anzahl der zugehörigen singulären Stellen *kleiner* als  $r$  ausfällt; analog bei Festhalten von  $\xi, \xi'', \xi''', \dots$  usf. Das Resultat der nachfolgenden Untersuchungen ist nun, dass auch das *Umgekehrte* richtig ist; d. h. wenn man nur weiss, dass in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle zu jedem Wertsystem  $\xi, \xi', \dots$  höchstens  $r$  singuläre Stellen der betrachteten Funktion gehören, und dass die Wertsysteme, für welche diese Anzahl kleiner als  $r$  ausfällt, in der angegebenen Weise beschränkt sind, *so wird diese Gesamtheit von singulären Stellen notwendig durch das Verschwinden einer im Nullpunkt regulären Funktion charakterisiert.*<sup>1</sup>

Über das Verhalten der Funktion für die Umgebung der betrachteten singulären Stellen wird bei diesen Untersuchungen keinerlei Annahme irgendwelcher Art gemacht; insbesondere darf auch eine Verzweigung der Funktion an jenen Stellen stattfinden.

Von den erwähnten Sätzen braucht nur derjenige direkt bewiesen zu werden, welcher sich auf den Fall  $r = 1$  bei den Funktionen *zweier* Veränderlichen  $x$  und  $y$  bezieht, während alle übrigen sich dann ohne grössere Schwierigkeit als Folgerungen ergeben. Der Beweis jenes ersten Satzes stützt sich auf eine allgemeine Eigenschaft der Reihen von der Form

$$S(x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} f_v(x) y^v,$$

welche ich im 62. Bande der Math. Ann. hergeleitet habe; es war wünschenswert, über diesen Gegenstand in § 1 einige Bemerkungen vorzuschicken. In § 2 wird sodann auf Grund dieses Hilfsmittels jener erste Satz zunächst unter etwas engeren Voraussetzungen bewiesen. Es folgt in § 3 der Beweis eines Hilfssatzes, durch welchen es ermöglicht wird (§ 4), den Ausgangssatz von jeglicher einschränkenden Voraussetzung zu befreien. § 5 enthält sodann die Erweiterung auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen und § 6 endlich auf den Fall, in welchem die Zahl  $r$  einen beliebigen Wert besitzt.

---

<sup>1</sup> Selbstredend bleibt letzteres auch dann noch richtig, wenn die Voraussetzungen nicht für die Variablen  $x, x', \dots, y$  selbst, sondern für irgend welche, durch eine homogene lineare Transformation aus ihnen hervorgehende Variable zutreffen.

## § 1.

Es liege eine Reihe

$$S(x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} f_v(x) y^v$$

vor, wobei  $x$  und  $y$  zwei unabhängige komplexe Veränderliche und  $f_v(x)$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) analytische Funktionen von  $x$  bedeuten, die für das in Betracht kommende Gebiet  $T$  der  $x$ -Ebene sämtlich eindeutig definiert und regulär seien.

Es sei nun  $x = x_0$  ein beliebiger innerer Punkt des Gebietes  $T$  und die Kreisfläche  $|x - x_0| \leq \rho_0$  gehöre dem Gebiete  $T$  noch vollständig an. Gibt es alsdann einen von null verschiedenen Wert  $y = y_0$  von der Beschaffenheit, dass die Reihe  $S(x, y_0)$  im Kreise  $|x - x_0| \leq \rho_0$  gleichmässig konvergiert, so konvergiert  $S(x, y)$  auch für jeden beliebigen, der Bedingung  $|y| < |y_0|$  genügenden Wert von  $y$  im genannten Kreise gleichmässig.<sup>1</sup>

Daraus folgt aber unmittelbar: Fasst man die Gesamtheit aller derjenigen Werte  $y = y_0$  ins Auge, zu welchen sich je eine (wenn auch noch so kleine) positive Grösse  $\rho$  von der Eigenschaft nachweisen lässt, dass die Reihe  $S(x, y_0)$  im Gebiete  $|x - x_0| \leq \rho$  gleichmässig konvergiert,<sup>2</sup> und bezeichnet<sup>3</sup> die obere Grenze der absoluten Beträge aller dieser Werte von  $y$  mit  $R'_x$ , so gehört sicher jeder der Bedingung  $|y| < R'_x$  genügende (hingegen kein der Bedingung  $|y| > R'_x$  genügender) Wert von  $y$  jener Gesamtheit an.

Auf diese Weise wird also jedem inneren Punkt  $x = x_0$  des Gebietes  $T$  eine wohlbestimmte reelle Grösse  $R'_x$  zugeordnet, welche null, positiv oder unendlich gross sein kann. Über diese von  $x$  abhängige Grösse  $R'_x$  gilt nun der folgende allgemeine Satz, dessen vollständiger Beweis sich auf Seite 46—47 meiner oben zitierten Abhandlung befindet:

(I). *Es bedeute  $B$  einen beliebigen, im Innern des obigen Gebietes  $T$  gelegenen Bereich der  $x$ -Ebene mit Einschluss seiner Begrenzungspunkte. Es sei ferner  $p_x$  eine für jedes  $x$  des Bereiches  $B$  eindeutig definierte positive Grösse, deren (reeller) Loga-*

<sup>1</sup> Denn nach Vorgabe einer beliebigen positiven Grösse  $\epsilon$  gibt es eine Zahl  $N$  derart, dass für alle  $n > N$ :  $|\sum_{v=n}^{\infty} f_v(x) y^v| < \frac{1}{2} \epsilon$  und somit  $|f_n(x) y^n| < \epsilon$ , welchen Wert  $x$  innerhalb jener Kreisfläche auch haben möge. Daraus folgt aber, sobald  $|y| < |y_0|$ :

$$|f_n(x) y^n| < \epsilon \left| \frac{y}{y_0} \right|^n \quad (n > N)$$

und somit auch das Behauptete.

<sup>2</sup> Offenbar gehört  $y = 0$  dieser Gesamtheit stets an.

<sup>3</sup> Vgl. Math. Ann. 62 (1906), insb. p. 3, p. 24 und p. 25 (erste Fussnote).

Über die a. d. singul. Stellen einer analyt. Funktion mehrerer Veränderlichen bestehend. Gebilde. 61  
*rithmus im Bereiche B stetig ist und für jeden inneren Punkt von B stetige, der Bedingung*

$$\frac{\partial^2 \log p_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial v^2} = 0 \quad (x = u + iv)$$

*genügende partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v besitzt. Gilt alsdann  $R'_x \geq p_x$  für jeden Begrenzungspunkt x des Bereiches B, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B. (Ist also speziell  $R'_x = p_x$  längs der Begrenzung, so gilt im ganzen Innern  $R'_x \geq p_x$ .)*

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Grösse  $R'_x$  ist, dass falls  $x = x_0$  einen beliebigen inneren Punkt von T bedeutet, nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse  $\varepsilon$  stets eine zweite,  $\delta$ , von der Beschaffenheit vorhanden sein muss, dass  $R'_x \geq R'_{x_0} - \varepsilon$  verbleibt, solange nur  $|x - x_0| < \delta$  ist. Unter Anwendung dieser Eigenschaft der Grösse  $R'_x$ , welche in der erwähnten Abhandlung zur Abkürzung als »einseitige Stetigkeit« bezeichnet ist, ergibt sich aus vorstehendem Satze durch eine einfache Überlegung folgendes Korollar:<sup>1</sup>

(Ia). *Sind die Voraussetzungen des Satzes (I) sämtlich erfüllt, und gilt auch nur für einen einzigen inneren Punkt  $x = x_0$  des Bereiches B:*<sup>2</sup>

$$R'_x = p_x,$$

*so besteht diese Gleichung auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B.*

Endlich ist hier noch der folgende Satz anzuführen, welcher die singulären Stellen des durch  $S(x, y)$  dargestellten Funktionszweiges betrifft:<sup>3</sup>

(II). *Es bedeute  $x = x_0$  wiederum irgend einen inneren Punkt des Gebietes T und es sei  $R'_{x_0} > 0$ . Als dann sind die Stellen  $(x_0, y)$  ( $|y| < R'_{x_0}$ ) für  $S(x, y)$  sämtlich reguläre; hingegen gibt es für den durch  $S(x, y)$  dargestellten Funktionszweig mindestens eine singuläre Stelle  $(x_0, y_0)$ , für welche  $|y_0| = R'_{x_0}$  ist.*

*Beweis.* Ist  $y = b$  irgend ein der Bedingung  $|b| < R'_{x_0}$  genügender Wert und wählt man  $\varrho'$  der Bedingung  $|b| < \varrho' < R'_{x_0}$  entsprechend, so gibt es ein noch im Innern von T liegendes Gebiet  $|x - x_0| \leq \varrho$ , in welchem  $S(x, \varrho')$  gleichmässig konvergiert. Entwickelt man daher die sämtlichen Funktionen  $f_v(x)$  nach Potenzen von  $x - x_0$ , so geht aus  $S(x, y)$  eine nach Potenzen von  $x - x_0$  und  $y$  fortschreitende Doppelreihe  $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$  hervor, welche im Gebiete  $|x - x_0| < \varrho, |y| < \varrho'$

<sup>1</sup> Vgl. a. a. O. p. 47—48. (Die Anwendung dieses Korollars kann bei den nachfolgenden Untersuchungen auch umgangen werden, vgl. p. 65, Fussnote <sup>1</sup>).

<sup>2</sup> Während beim Satze (I) über den Bereich B nichts weiter vorausgesetzt zu werden braucht, als dass er eine abgeschlossene Punktmenge darstelle, so muss beim Satze (Ia) der Bereich B auch ein zusammenhängender sein. (Genaueres siehe a. a. O. p. 8, Fussnote.) In der vorliegenden Abhandlung finden beide Sätze nur für den Fall einer Kreisfläche Anwendung.

<sup>3</sup> Vgl. a. a. O., p. 28.

absolut konvergiert<sup>1</sup> und dem Werte nach mit  $S(x, y)$  übereinstimmt;  $S(x, y)$  stellt somit eine im Gebiete  $|x - x_0| < \varrho$ ,  $|y| < \varrho'$ , speziell also in der Umgebung des Punktes  $(x_0, b)$  reguläre analytische Funktion  $f(x, y)$  von  $x$  und  $y$  dar.

Verhielte sich nun andererseits die soeben definierte (u. a. im Gebiete  $|x - x_0| < \varrho$ ,  $|y| < \varrho'$  reguläre) Funktion  $f(x, y)$  auch noch im Gebiete  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y| < R'_{x_0} + \varepsilon$  durchweg regulär, wobei  $\varepsilon$  eine gewisse positive Zahl bezeichnet, so müsste  $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$  auch in diesem Gebiete noch *absolut* und  $S(x, y)$  infolgedessen für jeden der Bedingung  $|y| < R'_{x_0} + \varepsilon$  genügenden Wert  $y$  im Bereiche  $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 < \varepsilon$ ) *gleichmässig* konvergieren, welches letzteres aber der Definition von  $R'_{x_0}$  direkt widerspräche. Mithin besitzt  $f(x, y)$  notwendig mindestens eine singuläre Stelle  $(x_1, y_1)$ , welche der Bedingung  $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y_1| < R'_{x_0} + \varepsilon$  genügt. Mit Rücksicht darauf, dass  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden konnte, dass ferner jede Häufungsstelle von singulären Stellen wieder eine ebensolche ist, endlich, dass eine singuläre Stelle  $(x_0, y_0)$ , für welche geradezu  $|y_0| < R'_{x_0}$  wäre, nach Obigem ausgeschlossen ist, folgt daraus ohne weiteres die Behauptung.

## § 2.

Der erste der herzuleitenden Sätze möge zunächst in der folgenden engeren Fassung ausgesprochen und bewiesen werden:

*Es sei  $x = 0$ ,  $y = 0$  eine singuläre Stelle für einen gewissen, im Gebiete  $|x| < \varrho$ ,  $|y| < \varrho'$  eindeutigen Zweig  $f(x, y)$  einer analytischen Funktion von  $x$  und  $y$ . Zu jedem der Bedingung  $|\xi| < \varrho$  genügenden Werte  $\xi$  möge für  $f(x, y)$  eine und nur eine singuläre Stelle  $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$  existieren, deren  $y$ -Koordinate  $\eta = \varphi(\xi)$  dem absoluten Betrage nach unterhalb  $\varrho'$  liegt, und es möge ferner  $\eta = \varphi(\xi)$  für  $|\xi| < \varrho$  einen mit  $\xi$  stetig sich ändernden Wert besitzen. Alsdann stellt  $\eta = \varphi(\xi)$  notwendig eine für  $\xi = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\xi$  dar.*

*Beweis.* Infolge der Stetigkeit der (für  $\xi = 0$  verschwindenden) Funktion  $\eta = \varphi(\xi)$  lässt sich eine positive, unterhalb  $\varrho$  gelegene Zahl  $2h$  angeben, derart, dass  $|\varphi(\xi)| < \frac{1}{5}\varrho'$  bleibt, solange nur  $|\xi| < 2h$  ist. Im Gebiete  $|x| < 2h$ ,

---

<sup>1</sup> Gemäss folgendem Satze: Konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0)\rho^{\nu}$ , wo  $\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}(x-x_0)^{\mu}$ , im Bereiche  $|x-x_0| \leq \rho$  gleichmässig, so konvergiert die Doppelreihe  $\mathfrak{P}(x-x_0, y) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}(x-x_0)^{\mu}y^{\nu}$  für  $|x-x_0| < \rho$ ,  $|y| < \rho'$  absolut. Denn setzt man  $\text{Max}_{|x-x_0| \leq \rho} |\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0)| = g_{\nu}$ , so ist nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse  $h$  für hinreichend grosse Werte von  $\nu$ :  $g_{\nu}\rho^{\nu} < h$  und somit  $|a_{\mu\nu}|\rho^{\mu}\rho^{\nu} < h$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ), woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

$\frac{1}{5}\varrho' < |y| < \varrho'$  befindet sich alsdann überhaupt keine singuläre Stelle der Funktion  $f(x, y)$ .

Es werde nun eine positive Zahl  $k$  der Bedingung  $\frac{1}{5}\varrho' < k < \frac{2}{5}\varrho'$  entsprechend beliebig gewählt und es sei  $y = y_0$  ein beliebiger Wert mit dem absoluten Betrage  $k$ . Im Gebiete  $|x| < 2h$ ,  $|y - y_0| < k - \frac{1}{5}\varrho'$  ist  $f(x, y)$  alsdann eindeutig und regulär und somit durch eine absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven Potenzen von  $x$  und  $y - y_0$  fortschreitende Doppelreihe darstellbar. Indem man sich diese letztere nach Potenzen von  $y - y_0$  geordnet denkt, erhält man für  $f(x, y)$  eine im genannten Gebiete gültige Darstellung der folgenden Art:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(x)(y - y_0)^{\nu} = S(x, y - y_0),$$

wobei die  $f_{\nu}(x)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) für  $|x| < 2h$  eindeutige und reguläre Funktionen von  $x$  bedeuten.

Legt man  $x$  irgend einen speziellen, der Bedingung  $|x| < 2h$  genügenden Wert bei, so ist die Stelle  $(x, \varphi(x))$  für die Funktion  $f(x, y)$  eine singuläre, während alle Stellen  $(x, y)$ , für welche  $|y - y_0| < |\varphi(x) - y_0|$ , sicher reguläre sind. Daraus folgt aber sofort gemäss Satz (II), dass die durch die Reihe  $S(x, y - y_0)$  definierte Grösse  $R'_x$  für jeden der erwähnten Werte von  $x$  gleich  $|\varphi(x) - y_0|$  ausfallen muss:

$$R'_x = |\varphi(x) - y_0| \quad (|x| < 2h).$$

Da  $\varphi(x)$  und somit auch  $R'_x$  für  $|x| < 2h$  stetig ist,  $R'_x$  in diesem Gebiete überdies beständig oberhalb der positiven Zahl  $k - \frac{1}{5}\varrho'$  verbleibt, so ist auch der (reelle) Logarithmus von  $R'_x$  für  $|x| < 2h$ , speziell also für  $|x| = h$  stetig und es existiert somit eine von  $x$  abhängige positive Grösse  $p_x$ , welche für  $|x| = h$  mit  $R'_x$  übereinstimmt, und deren reeller Logarithmus im Bereiche  $|x| \leq h$  stetig ist sowie für  $|x| < h$  stetig, der Bedingung

$$\Delta \log p_x = \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial v^2} = 0 \quad (x = u + iv)$$

genügende partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $u$  und  $v$  besitzt.

Nach dem Satze (I) gilt alsdann für alle  $|x| < h$  die Beziehung

$$R'_x \geq p_x,$$

welche speziell für  $x = 0$  (nach Logarithmierung)

$$(1) \quad \log k \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(he^{i\vartheta}) - y_0| d\vartheta$$

liefert.

In dieser letzteren Ungleichung darf der Grösse  $y_0$  jeder Wert beigelegt werden, dessen absoluter Betrag gleich  $k$  ist; setzt man also  $y_0 = k \cdot e^{i\vartheta'}$ , so gilt die Beziehung (1) für jeden beliebigen reellen Wert von  $\vartheta'$ , und somit auch noch dann, wenn man auf der rechten Seite in Bezug auf die zwischen 0 und  $2\pi$  gelegenen Werte von  $\vartheta'$  zum arithmetischen Mittel übergeht. So ergibt sich

$$(2) \quad \log k \geq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(he^{i\vartheta}) - ke^{i\vartheta'}| d\vartheta d\vartheta'.$$

Da nämlich der unter dem doppelten Integralzeichen stehende Ausdruck eine stetige Funktion der beiden Integrationsveränderlichen  $\vartheta$  und  $\vartheta'$  ist, so existiert das Doppelintegral und kann nach Belieben durch irgend eines der beiden zugehörigen iterierten Integrale ersetzt werden.

Beachtet man nun, dass (aus dem nämlichen Grunde) die rechte Seite der Beziehung (1) eine stetige Funktion von  $\vartheta'$  ist,<sup>1</sup> so ist ersichtlich, dass, wenn in (1) auch nur für einen einzigen Wert von  $\vartheta'$  das *Ungleichheitszeichen* gelten sollte, auch in (2) notwendig das *Ungleichheitszeichen* in Kraft treten müsste. Tatsächlich gilt aber in (2) das *Gleichheitszeichen*; denn da für einen beliebigen reellen Wert von  $\vartheta$ :

$$|\varphi(he^{i\vartheta})| < \frac{1}{5} \varrho'$$

ist, also  $y = \varphi(he^{i\vartheta})$  einen inneren Punkt des Kreises  $|y| = k$  darstellt, so gilt bekanntlich:<sup>2</sup>

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(he^{i\vartheta}) - ke^{i\vartheta'}| d\vartheta' = \log k \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$$

und somit auch das Behauptete.

Demnach steht in (1) notwendig das Gleichheitszeichen, m. a. W. es ist in Bezug auf die oben betrachtete Reihe  $S(x, y - y_0)$ :

<sup>1</sup> Vgl. z. B. JORDAN, Cours d'analyse I (1893), p. 72.

<sup>2</sup> In der Sprache der Potentialtheorie: »Das logarithmische Potential der (homogen mit Masse belegt gedachten) Kreisperipherie  $|y| = k$  ist im Innern dieses Kreises konstant.«



$$R'_x = p_x$$

für  $x = 0$  und somit nach dem Satze (Ia) auch für alle  $x$ , welche der Bedingung  $|x| \leq h$  genügen.<sup>1</sup>

Es besitzt mithin  $\log R'_x$  (da mit  $\log p_x$  identisch) für  $|x| < h$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $u$  und  $v$ , und ferner genügt  $\log R'_x$  (und daher auch  $\log R''_x$ ), für  $w$  eingesetzt, der Differentialgleichung

$$\mathcal{A}w = 0,$$

$R''_x$  selbst also der Differentialgleichung

$$(3) \quad w \mathcal{A}w = \left( \frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial v} \right)^2,$$

solange nur  $x = u + iv$  dem Absoluten Betrage nach unterhalb  $h$  bleibt.

Setzt man also

$$\varphi(x) = U + iV, \quad y_0 = \alpha + i\beta$$

sodass

$$R''_x = |\varphi(x) - y_0|^2 = (U - \alpha)^2 + (V - \beta)^2,$$

und beachtet, dass  $y_0 = \alpha + i\beta$  lediglich der Beschränkung  $\frac{1}{5}\varrho' < |y_0| < \frac{2}{5}\varrho'$  unterworfen war, sodass  $\alpha$  und  $\beta$  innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von einander willkürlich gewählt werden konnten, so ist zunächst ersichtlich, dass auch  $U$  und  $V$  für  $|x| < h$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $u$  und  $v$  besitzen müssen,<sup>2</sup> und es ergibt sich sodann aus (3) die für  $|x| < h$  gültige Beziehung:

$$\begin{aligned} [(U - \alpha)^2 + (V - \beta)^2] \cdot \left[ (U - \alpha) \mathcal{A}U + (V - \beta) \mathcal{A}V + \left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right] \\ = 2(U - \alpha)^2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 \right] + 2(V - \beta)^2 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right] \\ + 4(U - \alpha)(V - \beta) \left[ \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Die Anwendung des Satzes (Ia) kann vermieden werden, indem man die im Texte nur für den Mittelpunkt  $x = 0$  des Kreises  $|x| \leq h$  angestellte Betrachtung mit Hilfe des Poisson'schen Integrals in ähnlicher Weise für einen beliebigen inneren Punkt dieses Kreises durchführt.

<sup>2</sup> Da nämlich  $\log R''_x$  stetige Ableitungen der genannten Art besitzt, so gilt das Gleiche auch für  $R''_x = (U - \alpha)^2 + (V - \beta)^2$ , ebenso aber, indem man  $\alpha$  und  $\beta$  durch ein anderes zulässiges Wertsystem  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ersetzt, auch für  $(U - \alpha')^2 + (V - \beta')^2$  und mithin (wie durch Bildung der Differenz beider Ausdrücke ersichtlich) auch für  $(\alpha - \alpha')U + (\beta - \beta')V$ . Durch zwei passend gewählte Ausdrücke dieser letzteren Art lassen sich aber  $U$  und  $V$  selbst homogen und linear darstellen.

oder, zusammengezogen

$$\begin{aligned} & [(U-\alpha)^2 + (V-\beta)^2] \cdot [(U-\alpha) \mathcal{A} U + (V-\beta) \mathcal{A} V] = \\ = & [(U-\alpha)^2 - (V-\beta)^2] \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right] + 4(U-\alpha)(V-\beta) \left[ \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right] \end{aligned}$$

Beide Seiten sind in Bezug auf  $\alpha$  und  $\beta$  ganze rationale Funktionen; nach dem soeben über  $\alpha$  und  $\beta$  bemerkten kann also die Gleichung nur dann für alle zulässigen Wertsysteme  $\alpha$ ,  $\beta$  erfüllt sein, wenn die Koeffizienten der nämlichen Potenzprodukte von  $\alpha$  und  $\beta$  auf beiden Seiten der Gleichung einzeln übereinstimmen.

Der Vergleich der Koeffizienten von  $\alpha^3$  und von  $\beta^3$  lehrt zunächst, dass

$$\mathcal{A} U = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{A} V = 0$$

sein muss, sodass beide Seiten der obigen Gleichung einzeln verschwinden. Die Nullsetzung der Koeffizienten von  $\alpha^2$  und von  $\alpha\beta$  auf der rechten Seite liefert sodann die Gleichungen:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 = 0$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} = 0,$$

welche durch Kombination

$$\left( \frac{\partial U}{\partial u} + i \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial v} + i \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 = 0$$

ergeben. Hieraus folgt

$$\frac{\partial U}{\partial u} + i \frac{\partial V}{\partial u} = \mp i \left( \frac{\partial U}{\partial v} + i \frac{\partial V}{\partial v} \right),$$

sodass für einen beliebigen, der Bedingung  $|x| < h$  genügenden Wert von  $x$  das Gleichungspaar

$$(4) \quad \frac{\partial U}{\partial u} = \pm \frac{\partial V}{\partial v}, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = \mp \frac{\partial U}{\partial v}$$

entweder mit den beiden oberen oder mit den beiden unteren Vorzeichen erfüllt sein muss.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> In beiden Fällen zeigen sich in der Tat die für  $R'_x$  geltenden Bedingungen befriedigt; die hier noch verbleibende Unbestimmtheit ist also keineswegs auf eine unvollständige Ausnutzung jener Bedingungen zurückzuführen.

Es soll nun der Nachweis geführt werden, dass für jeden der betrachteten Werte von  $x$  oder, worauf es hier nur ankommt, wenigstens für alle Werte  $x$  von hinlänglich kleinem absoluten Betrage die *oberen* Vorzeichen gelten müssen. Zu diesem Zwecke werde  $f(x, y)$  für einen Augenblick als Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $z = x + y$  angesehen, und als solche mit  $\bar{f}(x, z)$  bezeichnet. Wird alsdann eine positive Zahl  $\sigma$  kleiner als jede der beiden Zahlen  $\varrho$  und  $\varrho'$  gewählt und setzt man ferner  $\sigma' = \varrho' - \sigma$ , so ist, da die Ungleichungen  $|x| < \sigma$ ,  $|z| < \sigma'$  das Bestehen der Ungleichungen  $|x| < \varrho$ ,  $|y| < \varrho'$  zur Folge haben,  $\bar{f}(x, z)$  im Gebiete  $|x| < \sigma$ ,  $|z| < \sigma'$  eindeutig und es sind nur diejenigen Stellen dieses Gebietes für  $\bar{f}(x, z)$  singuläre, zwischen deren Koordinaten  $x$  und  $z$  die Relation  $z = x + \varphi(x)$  besteht. Da die Funktion  $x + \varphi(x)$  für  $|x| < \sigma$  stetig ist und sich für  $x = 0$  auf null reduziert, so kann man überdies eine positive Zahl  $\sigma_0$  unterhalb  $\sigma$  derart angeben, dass  $|x + \varphi(x)| < \sigma'$ , solange  $|x| < \sigma_0$ .

Für die Funktion  $\bar{f}(x, z)$  sind alsdann im Gebiete  $|x| < \sigma_0$ ,  $|z| < \sigma'$  die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sämtlich erfüllt, und zwar werden die in diesem Gebiete gelegenen singulären Stellen dargestellt durch die Beziehung

$$z = x + \varphi(x) = u + U + i(v + V).$$

Nach dem bisher Bewiesenen muss daher für einen beliebigen Wert von  $x$ , dessen absoluter Betrag unterhalb einer gewissen Grösse  $h_0$  liegt (die wir sogleich kleiner als  $h$  annehmen wollen), das Gleichungspaar

$$(5) \quad \frac{\partial(u+U)}{\partial u} = \pm \frac{\partial(v+V)}{\partial v}, \quad \frac{\partial(v+V)}{\partial u} = \mp \frac{\partial(u+U)}{\partial v}$$

entweder mit den oberen oder mit den unteren Vorzeichen erfüllt sein.

Im ersteren Falle hat man für den betrachteten Wert von  $x$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v}, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial U}{\partial v},$$

wie es behauptet wurde.

Im zweiten Falle zeigt die sich ergebende Gleichung

$$2 + \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial v}$$

unmittelbar die Unmöglichkeit der Beziehung  $\frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial v}$ , sodass auch in diesem Falle die Gleichungen (4) notwendig mit den oberen Vorzeichen gelten müssen.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Dieser zweite Fall kann, wie sich dann unmittelbar ergibt, überhaupt nur für solche  $x$  eintreten, für welche die in den Gleichungen (5) auftretenden partiellen Ableitungen sämtlich null sind.

Demnach gelten für alle der Bedingung  $|x| < h_0$  genügenden Werte von  $x$  die Gleichungen (4) mit den oberen Vorzeichen; da überdies die in diesen Gleichungen vorkommenden partiellen Ableitungen für  $|x| < h$  sämtlich stetig sind, so ist  $\varphi(x) = U + iV$  eine für  $|x| < h_0$  reguläre analytische Funktion von  $x$ .

### § 3.

Für den Fortgang der Untersuchungen erweist sich der folgende Hilfssatz<sup>1</sup> von Bedeutung.

Für einen gewissen Zweig<sup>2</sup>  $f(x, y)$  einer analytischen Funktion von  $x$  und  $y$  sei die Stelle  $x=0, y=0$  eine singuläre; hingegen seien in einer gewissen Nachbarschaft derselben alle übrigen Stellen, deren  $x$ -Koordinaten null sind, für jede Bestimmung von  $f(x, y)$  reguläre. Bedeutet alsdann  $f_0(x, y)$  irgend eine dieser Bestimmungen, so lässt sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  stets eine zweite,  $\delta$ , angeben, so beschaffen, dass zu jedem Punkte  $x=x_0$  des Kreises  $|x| < \delta$  mindestens eine singuläre Stelle  $(x_0, y_0)$  von  $f_0(x, y)$  gehört, welche der Bedingung  $|y_0| < \varepsilon$  genügt.

*Beweis.* Nach Voraussetzung verhält sich  $f_0(x, y)$  sicher in der Umgebung jeder Stelle  $(0, y)$  regulär, für welche  $y$  einem gewissen Gebiete  $0 < |y| < \bar{k}$  angehört. Eine positive Grösse  $2k$  möge nun kleiner als  $\bar{k}$  wie auch kleiner als die vorgeschriebene Zahl  $\varepsilon$  gewählt werden. Wir lassen alsdann, während der reelle Parameter  $\vartheta$  sich stetig von 0 bis  $2\pi$  bewegt, das Argumentenpaar  $(x, y)$  die Wertsysteme  $(0, ke^{i\vartheta})$  durchlaufen und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem  $f_0(x, y)$  bei einer analytischen Fortsetzung längs dieses Weges in das ursprüngliche Funktionenelement zurückkehrt oder nicht.

Im ersten Falle ist  $f_0(x, y)$  im ganzen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus den Umgebungen aller Stellen  $(0, y)$  ( $|y| = k$ ) besteht, und es existiert mithin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Denselben habe ich für den Fall *eindeutiger* Funktionszweige in etwas allgemeinerer Form bereits in der Abhandlung »Einige Folgerungen aus der CAUCHY'schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen« (Münch. Sitz.-Ber. 36 (1906) p. 223) veröffentlicht.

<sup>2</sup> Diese Ausdrucksweise soll (wie übrigens auch aus dem weiteren Wortlaute hervorgeht) keineswegs besagen, dass der betrachtete Funktionszweig sich in der Umgebung der Stelle  $x=0, y=0$  eindeutig verhalten müsse. Ist der Funktionszweig in der Umgebung von  $x=0, y=0$  nicht eindeutig (wobei auch Verzweigungen unendlich hoher Ordnung zugelassen werden sollen), so werden als demselben angehörig alle diejenigen (eindeutigen und regulären) Bestimmungen der Funktion angesehen, deren Gültigkeitsgebiet in jede beliebige Nähe des Punktes  $x=0, y=0$  vordringt, und zu welchen man von einer derselben aus durch analytische Fortsetzung längs eines dem Gebiete  $|x| < r, |y| < r$  angehörigen Weges gelangen kann, wie klein auch  $r$  gewählt werde.

<sup>3</sup> Die gegenteilige Annahme führt, wie leicht zu sehen, auf einen Widerspruch. (Ein direkter Nachweis dafür ergibt sich ganz unmittelbar durch Anwendung des sog. HEINE-BOREL'schen Theorems, Jahresber. d. D. Mathem.-Ver. II Erg. — Bd. 1908, p. 77).

eine (unterhalb  $k$  gelegene) positive Grösse  $\delta$  von der Art, dass  $f_0(x, y)$  im Gebiete  $|x| < \delta$ ,  $k - \delta < |y| < k + \delta$  ebenfalls noch durchweg eindeutig und regulär ist.  $f_0(x, y)$  gestattet infolgedessen eine im letztgenannten Gebiete gültige Darstellung durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von  $x$  und nach positiven und negativen Potenzen von  $y$  fortschreitende Doppelreihe, welche wir uns nach Potenzen von  $y$  geordnet denken wollen:

$$(1) \quad f_0(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu \quad (|x| < \delta, \quad k - \delta < |y| < k + \delta),$$

wobei die  $\mathfrak{P}_\nu(x)$  ( $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) Reihen bedeuten, welche nach positiven Potenzen von  $x$  fortschreiten. Diejenigen unter diesen Potenzreihen, deren Index  $\nu$  negativ ist, können nicht alle identisch verschwinden, da unter dieser Annahme  $f_0(x, y)$  im vollen Gebiete  $|x| < \delta$ ,  $|y| < k + \delta$  eindeutig und regulär wäre, also dem betrachteten Funktionszweig  $f(x, y)$  überhaupt nicht angehören könnte.

Von der soeben bestimmten Grösse  $\delta$  lässt sich nun leicht einsehen, dass sie zugleich die in der Behauptung ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Genügt nämlich  $x_0$  der Bedingung  $|x_0| < \delta$  und wäre entgegen der Behauptung  $f_0(x, y)$  auch noch in der Umgebung jedes Punktes  $(x_0, y)$  ( $|y| < \epsilon$ ), speziell also jedes Punktes  $(x_0, y)$  ( $|y| \leq 2k$ ) regulär, so müsste<sup>1</sup>  $f_0(x, y)$  auch in einem gewissen Gebiete  $|x - x_0| < \varrho_0$ ,  $|y| < 2k$  eindeutig und regulär und daher durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von  $x - x_0$  und  $y$  fortschreitende Doppelreihe darstellbar sein. Wird diese letztere ebenfalls nach Potenzen von  $y$  geordnet:

$$(2) \quad f_0(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_\nu(x - x_0) y^\nu \quad (|x - x_0| < \varrho_0, \quad |y| < 2k)$$

so ergibt der Vergleich der beiden Darstellungen (1) und (2), dass alsdann für alle  $x$ , welche den beiden Kreisflächen  $|x| < \delta$ ,  $|x - x_0| < \varrho_0$  gemein sind,

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \bar{\mathfrak{P}}_\nu(x - x_0) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

sowie

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = 0 \quad (\nu = -1, -2, \dots)$$

gelten müsste, welches letzteres jedoch mit dem oben Festgestellten im Widerspruch steht.

Im zweiten Falle existiert,<sup>1</sup> da  $f_0(x, y)$  bei der Fortsetzung längs des oben betrachteten Weges für eine gewisse Umgebung  $|x| < \varrho_\vartheta$ ,  $|y - ke^{i\vartheta}| < \varrho'_\vartheta$  jedes einzelnen Punktes  $(0, ke^{i\vartheta})$  ( $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ) desselben regulär ist (wenn auch die beiden für  $\vartheta = 0$  und für  $\vartheta = 2\pi$  gültigen Funktionenelemente hier von einander verschie-

<sup>1</sup> Wie p. 68 Fussnote 3.

den sind), ebenfalls eine positive Grösse  $\delta$  von der Eigenschaft, dass die sämtlichen Zahlen  $\varrho_\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ) grösser als  $\delta$  angenommen werden können. Die so bestimmte Grösse  $\delta$  besitzt dann wiederum die in der Behauptung ausgesprochene Eigenschaft. Es bezeichne nämlich  $\mathfrak{P}(x, y - k)$  das zu  $\vartheta = 0$ ,  $\bar{\mathfrak{P}}(x, y - k)$  das zu  $\vartheta = 2\pi$  gehörige Funktionenelement, und  $x_0$  wieder einen der Bedingung  $|x_0| < \delta$  genügenden Wert. Wäre nun entgegen der Behauptung  $f_0(x, y)$  in einem gewissen Gebiete  $|x - x_0| < \varrho_0$ ,  $|y| < 2k$  regulär (vgl. oben), also in diesem Gebiete durch eine nach positiven Potenzen von  $x - x_0$  und  $y$  fortschreitende Doppelreihe  $\mathfrak{P}_0(x - x_0, y)$  darstellbar, so müsste das zu einem beliebigen (der Bedingung  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  genügenden) Werte von  $\vartheta$  gehörige Funktionenelement mit  $\mathfrak{P}_0(x - x_0, y)$  im gemeinsamen Gültigkeitsgebiete<sup>1</sup> dem Werte nach übereinstimmen. Speziell müsste dies also sowohl von  $\mathfrak{P}(x, y - k)$  als auch von  $\bar{\mathfrak{P}}(x, y - k)$  gelten, welche demnach entgegen der gemachten Annahme mit einander identisch sein müssten.

Der vorstehende Satz behält seine Gültigkeit unverändert bei, wenn an Stelle der Veränderlichen  $x$  beliebig viele Veränderliche  $x, x', \dots$  treten. Von dieser Verallgemeinerung des Satzes wird im § 6 Gebrauch gemacht werden.

#### § 4.

Der soeben bewiesene Hilfssatz kann dazu dienen, dem Satze des § 2 eine beträchtlich allgemeinere Fassung zu geben; er gestattet es nämlich, die Voraussetzungen desselben nach drei verschiedenen Richtungen zu erweitern: Erstens erweist sich die bezüglich der *Eindeutigkeit* des betrachteten Funktionszweiges  $f(x, y)$  gemachte Voraussetzung als überflüssig; zweitens reicht es bereits hin, wenn zu jedem dem Gebiete  $|\xi| < \varrho$  angehörigen Werte  $\xi$  die Existenz *höchstens* einer (statt genau einer) singulären Stelle  $(\xi, \eta)$  ( $|\eta| < \varrho'$ ) vorausgesetzt wird und drittens endlich kann auf die Voraussetzung betreffend die *Stetigkeit der Funktion*  $\varphi(\xi)$  verzichtet werden. Infolgedessen lässt sich jener Satz nunmehr in der folgenden Weise formulieren.

*Es sei  $x = 0$ ,  $y = 0$  eine singuläre Stelle für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen<sup>2</sup>) Zweig  $f(x, y)$  einer analytischen Funktion von  $x$  und  $y$ , und die Gesamtheit aller in einer gewissen Umgebung  $|x| < \varrho$ ,  $|y| < \varrho'$  derselben gelegenen singulären Stellen  $(\xi, \eta)$  von  $f(x, y)$  sei so beschaffen, dass zu jedem Werte  $\xi$  höchstens eine dieser Gesamtheit angehörende singuläre Stelle  $(\xi, \eta)$  existiere. Alsdann gibt es zu jedem in der Umgebung von  $x = 0$  gelegenen Werte  $x = \xi$  eine Stelle  $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$*

<sup>1</sup> Dasselbe enthält jedesmal zum mindesten eine gewisse Umgebung des Punktes  $(x_0, k e^{i\vartheta})$ .

<sup>2</sup> Vgl. p. 68 Fussnote <sup>1</sup>.

jener Gesamtheit, und es stellt  $\eta = \varphi(\xi)$  eine für  $\xi = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\xi$  dar.

*Beweis.* Es bedeute (ähnlich wie im vorigen Paragraphen)  $f_0(x, y)$  eine beliebige Bestimmung des in der Umgebung der Stelle  $x = 0, y = 0$  betrachteten Funktionszweiges  $f(x, y)$ . Da für diesen letzteren die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind, so lässt sich alsdann zunächst eine positive Grösse  $\varrho_0$  angeben, so beschaffen, dass zu jedem Punkte  $x = \xi$  des Kreises  $|x| < \varrho_0$  *mindestens eine* singuläre Stelle  $(\xi, \bar{\eta})$  von  $f_0(x, y)$  gehört, welche der Bedingung  $|\bar{\eta}| < \varrho'$  genügt. Wird dabei, wie wir annehmen wollen,  $\varrho_0$  zugleich kleiner als  $\varrho$  gewählt, so gibt es andererseits nach Voraussetzung zu jedem derartigen Werte von  $\xi$  *höchstens eine* singuläre Stelle  $(\xi, \eta)$  der eben bezeichneten Art. Daraus geht hervor, dass für  $f_0(x, y)$  zu jedem der Bedingung  $|\xi| < \varrho_0$  genügenden Werte von  $\xi$  *eine und nur eine* singuläre Stelle  $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$  jener Art existiert.<sup>1</sup>

Wird nun ferner eine beliebig kleine positive Zahl  $\varepsilon$  vorgeschrieben — die wir uns jedoch von vornherein kleiner als  $\varrho'$  gewählt denken —, so gibt es nach dem Hilfssatze eine zweite,  $\delta$ , so beschaffen, dass zu jedem Punkte  $x = x_0$  des Kreises  $|x| < \delta$  *mindestens eine* singuläre Stelle  $(x_0, y_0)$  von  $f_0(x, y)$  gehört, welche der Bedingung  $|y_0| < \varepsilon$  genügt; denkt man sich dabei  $\delta$  zugleich kleiner als  $\varrho_0$  fixiert, so besagt dies, dass  $|\varphi(\xi)| < \varepsilon$  ist, solange nur  $|\xi| < \delta$  bleibt, und es ist demnach die Funktion  $\varphi(\xi)$  für  $\xi = 0$  stetig.

Bedeutet ferner  $\xi = \xi_0$  einen beliebigen, der Bedingung  $|\xi_0| < \varrho_0$  genügenden Wert, und setzt man  $\varphi(\xi_0) = \eta_0$ , so sind für die singuläre Stelle  $(\xi_0, \eta_0)$  des Funktionszweiges  $f(x, y)$  ganz analoge Voraussetzungen erfüllt, wie sie unser Satz bezüglich der Stelle  $(0, 0)$  ausspricht. Nach dem soeben bewiesenen muss demnach die Funktion  $\varphi(\xi)$  auch für  $\xi = \xi_0$ , allgemein also im Gebiete  $|\xi| < \varrho_0$  stetig sein.

Hieran knüpft sich nun schliesslich der Nachweis, dass  $\eta = \varphi(\xi)$  eine für  $\xi = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\xi$  sein müsse. Dieser Nachweis ist mit dem in § 2 geführten Beweise völlig übereinstimmend; man hat in diesem letzteren lediglich  $\varrho$  durchweg durch  $\varrho_0$ , sowie  $f(x, y)$  durch  $f_0(x, y)$  zu ersetzen und am Schlusse eine sehr geringfügige Abänderung des Wortlautes vorzunehmen.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Da es nach Voraussetzung für den Funktionszweig  $f(x, y)$  im Gebiete  $|x| < \varrho_0, |y| < \varrho'$  überhaupt keine weiteren singulären Stellen geben kann, die soeben für die Bestimmung  $f_0(x, y)$  angestellte Betrachtung jedoch in gleicher Weise auch auf jede der übrigen Bestimmungen von  $f(x, y)$  anwendbar ist, so ist zugleich ersichtlich, dass die sämtlichen Bestimmungen von  $f(x, y)$  in der Umgebung des Punktes  $x = 0, y = 0$  genau die nämlichen singulären Stellen  $(\xi, \varphi(\xi))$  besitzen müssen.

<sup>2</sup> Um nämlich die Entscheidung über die Vorzeichen zu treffen, wird der ganze Funktionszweig  $f(x, y)$  als Funktion von  $x$  und  $z = x + y$  aufgefasst und als solcher mit  $\tilde{f}(x, z)$  bezeichnet.

## § 5.

Für den Fall beliebig vieler Veränderlichen  $x, x', x'', \dots, y$  gilt ein dem vorigen durchaus analoger Satz, nämlich:

*Es sei  $x = 0, x' = 0, \dots, y = 0$  eine singuläre Stelle für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig  $f(x, x', \dots, y)$  einer analytischen Funktion von  $x, x', \dots, y$  und die Gesamtheit aller in einer gewissen Umgebung  $|x| < \varrho, |x'| < \varrho, \dots, |y| < \sigma$  derselben gelegenen singulären Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$  von  $f(x, x', \dots, y)$  sei so beschaffen, dass zu jedem Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  höchstens eine dieser Gesamtheit angehörende singuläre Stelle  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$  existiere. Alsdann gibt es zu jedem in der Umgebung von  $x = x' = \dots = 0$  gelegenen Wertsysteme  $x = \xi, x' = \xi', \dots$  eine Stelle*

$$(\xi, \xi', \dots, \eta) = (\xi, \xi', \dots, \varphi(\xi, \xi', \dots))$$

*jener Gesamtheit und es stellt*

$$\eta = \varphi(\xi, \xi', \dots)$$

*eine für  $\xi = \xi' = \dots = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\xi, \xi', \dots$  dar.*

*Beweis.*<sup>1</sup> Es bedeute  $f_0(x, x', \dots, y)$  eine beliebige Bestimmung des in der Umgebung des Punktes  $x = x' = \dots = y = 0$  betrachteten Funktionszweiges  $f(x, x', \dots, y)$ . Nach Voraussetzung verhält sich alsdann  $f_0(x, x', \dots, y)$  sicher in der Umgebung jeder Stelle  $(0, 0, \dots, 0, y)$  regulär, für welche  $0 < |y| < \sigma$  ist. Wird nun die positive Grösse  $k$  der Bedingung  $0 < k < \sigma$  entsprechend beliebig gewählt, und lässt man die Variablen  $x, x', \dots, y$ , während der reelle Parameter  $\vartheta$  sich stetig von 0 bis  $2\pi$  bewegt, die Wertsysteme  $(0, 0, \dots, 0, ke^{i\vartheta})$  durchlaufen, so mögen (ähnlich wie in § 3) zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem

Werden alsdann  $\sigma$  und  $\sigma'$  wiederum so bestimmt, dass die Ungleichungen  $|x| < \sigma, |z| < \sigma'$  das Bestehen der Ungleichungen  $|x| < \rho_0, |y| < \rho'$  zur Folge haben (während die Bestimmung von  $\sigma_0$  hier unnötig ist), so sind für  $\bar{f}(x, z)$  im Gebiete  $|x| < \sigma, |z| < \sigma'$  die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sämtlich erfüllt usw.

<sup>1</sup> Der Gedankengang desselben ist — wenn man von der durch Hinzufügung des Wortes »höchstens« bedingten geringfügigen Komplizierung absieht — im wesentlichen folgender: Bedeutet  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$  irgend eine jener singulären Stellen, so betrachte man die Funktion  $f(x, \xi', \xi'', \dots, y)$  der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$ . Für diese braucht die Stelle  $x = \xi, y = \eta$  nicht unter allen Umständen eine singuläre zu sein. Nehmen wir aber zunächst an, dass dies im vorliegenden Falle allgemein zutrefte, so muss nach § 4  $\eta$  für jenes Wertsystem  $\xi', \xi'', \dots$  eine reguläre analytische Funktion von  $\xi$  sein, ebenso für ein beliebiges Wertsystem  $\xi, \xi'', \xi''', \dots$  eine reguläre analytische Funktion von  $\xi'$  usw., infolgedessen aber auch eine reguläre analytische Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen  $\xi, \xi', \dots$ . Ist aber die oben gemachte Annahme nicht zutreffend, so lässt sich ihre Gültigkeit doch stets erzwingen, indem man anstelle von  $x, x', \dots$  durch eine geeignete homogene lineare Substitution neue Veränderliche einführt.



$f_0(x, x', \dots, y)$  bei einer analytischen Fortsetzung längs dieses Weges in das ursprüngliche Funktionenelement zurückkehrt oder nicht.

Im *ersten Falle* ist  $f_0(x, x' \dots, y)$  in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus den Umgebungen aller Stellen  $(0, 0, \dots, 0, y)$  ( $|y| = k$ ) besteht und somit <sup>1</sup> auch im Gebiete

$$(1) \quad |x| < \delta, |x'| < \delta, \dots, k - \delta < |y| < k + \delta$$

wo  $\delta$  eine gewisse positive Zahl bedeutet, die wir uns jedoch von vornherein kleiner als  $\varrho$  gewählt denken.  $f_0(x, x', \dots, y)$  gestattet alsdann eine im letztgenannten Gebiete gültige Darstellung durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von  $x, x', \dots$  und nach positiven und negativen Potenzen von  $y$  fortschreitende Reihe, welche wir uns nach Potenzen von  $y$  geordnet denken wollen:

$$(2) \quad f_0(x, x', \dots, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x, x', \dots) y^\nu.$$

Diejenigen unter den Potenzreihen  $\mathfrak{P}_\nu(x, x', \dots)$ , deren Index  $\nu$  negativ ist, können dabei nicht sämtlich identisch verschwinden, da unter dieser Annahme  $f_0(x, x', \dots, y)$  im vollen Gebiete  $|x| < \delta, |x'| < \delta, \dots, |y| < k + \delta$  eindeutig und regulär wäre, also dem betrachteten Funktionszweige  $f(x, x', \dots, y)$  überhaupt nicht angehören könnte. Es möge also etwa  $\mathfrak{P}(x, x', \dots)$  irgend eine unter jenen Potenzreihen bezeichnen, welche nicht identisch verschwindet.

Es ist alsdann ein Leichtes, anstelle von  $x, x' \dots$  ebensoviele neue Veränderliche  $X, X', \dots$  einzuführen, welche mit jenen durch ein System homogener linearer Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= c_{00} X + c_{01} X' + \dots \\ x' &= c_{10} X + c_{11} X' + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

von nichtverschwindender Determinante  $|c_{\kappa\lambda}|$  verknüpft sind, derart dass, wenn man die aus  $\mathfrak{P}(x, x', \dots)$  vermöge dieser Substitution hervorgehende Reihe mit  $\bar{\mathfrak{P}}(X, X', \dots)$  bezeichnet, von den Funktionen

$$\bar{\mathfrak{P}}(X, 0, 0, \dots), \bar{\mathfrak{P}}(0, X', 0, \dots), \dots$$

ebenfalls keine identisch verschwindet. <sup>2</sup> Die aus  $f(x, x', \dots, y)$  bzw.  $f_0(x, x', \dots, y)$

<sup>1</sup> Vgl. p. 68, Fussn. <sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Vgl. WEIERSTRASS, Abhandl. a. d. Funktionenlehre, p. 113 = Werke II, p. 140. (Es wird dort allerdings nur für die Erfüllung der *ersten* jener Bedingungen gesorgt.) Sollte bereits die ursprüngliche Potenzreihe  $\mathfrak{P}(x, x', \dots)$  die hier geforderte Eigenschaft besitzen, was z. B. stets der Fall ist, wenn  $\mathfrak{P}(0, 0, \dots, 0) \neq 0$  ist, so erübrigt sich selbstredend die Vornahme einer linearen Substitution.

vermöge dieser Substitution hervorgehenden Ausdrücke mögen mit  $F(X, X', \dots, y)$  bzw.  $F_0(X, X', \dots, y)$  bezeichnet werden.

Es werde nun, was stets möglich ist, eine positive Grösse  $\bar{\delta}$  den beiden folgenden Bedingungen entsprechend gewählt: Erstens soll  $\bar{\mathfrak{P}}(X, X', \dots)$  niemals identisch verschwinden, wenn irgend *eine* der Veränderlichen  $X, X', \dots$  variabel gelassen und den übrigen irgend welche feste, dem absoluten Betrage nach unterhalb  $\bar{\delta}$  gelegene Werte beigelegt werden; und zweitens sollen, solange die absoluten Beträge von  $X, X', \dots$  kleiner als  $\bar{\delta}$  bleiben, die absoluten Beträge der zugehörigen Werte von  $x, x', \dots$  stets unterhalb  $\delta$  gelegen sein.

Allgemein geht alsdann aus jeder der Reihen  $\mathfrak{P}_\nu(x, x', \dots)$  durch die obige Substitution eine mindestens für  $|X| < \bar{\delta}$ ,  $|X'| < \bar{\delta}, \dots$  eindeutige und reguläre Funktion  $\bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots)$  hervor,<sup>1</sup> und aus der im Gebiete (1) gültigen Darstellung (2) ergibt sich daher unmittelbar die folgende:

$$(3) \quad F_0(X, X', \dots, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots) y^\nu$$

$$(|X| < \bar{\delta}, |X'| < \bar{\delta}, \dots, k - \delta < |y| < k + \delta).$$

Unter den Funktionen  $\bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots)$  mit negativem Index  $\nu$  befindet sich dabei eine, welche mit  $\bar{\mathfrak{P}}(X, X', \dots)$  identisch ist.

Es werde nun den Variablen  $X', X'', \dots$  ein System von Werten  $\Xi', \Xi'', \dots$  beigelegt, welche dem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als  $\bar{\delta}$  sind. Da alsdann  $\bar{\mathfrak{P}}(X, \Xi', \Xi'', \dots)$  nicht identisch verschwindet, so folgt aus der Darstellung (3) unmittelbar,<sup>2</sup> dass die Funktion  $F_0(X, \Xi', \Xi'', \dots, y)$  der beiden Veränderlichen  $X$  und  $y$  zu jedem Werte  $X = \Xi$  des Gebietes  $|X| < \bar{\delta}$  mindestens eine der Bedingung  $|\eta| \leq k - \delta$  (also auch der Bedingung  $|\eta| < \sigma$ ) genügende singuläre Stelle  $X = \Xi, y = \eta$  besitzen muss. Dann ist aber gleichzeitig die Stelle  $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$  für die Funktion  $F(X, X', \dots, y)$  eine singuläre.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dieselbe kann demnach auch wieder als eine für  $|X| < \bar{\delta}$ ,  $|X'| < \bar{\delta}, \dots$  absolut konvergierende, nach Potenzen von  $X, X', \dots$  fortschreitende Reihe aufgefasst werden, worauf es jedoch im folgenden nicht ankommt.

<sup>2</sup> Die betreffende Schlussweise findet man überdies auf p. 69 (Zeile 14 ff.) in extenso dargestellt.

<sup>3</sup> Nach Voraussetzung gibt es nämlich für  $F(X, X', \dots, y)$  höchstens *eine* der Bedingung  $|\eta| < \sigma$  genügende singuläre Stelle  $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$ . Man verbinde also irgend einen Punkt des Gebietes  $k - \delta < |y| < k + \delta$  mit dem Punkte  $\eta$  (des Textes) durch ein beliebiges Kurvenstück, welches ganz im Gebiete  $|y| < k + \delta$  verläuft und den Punkt  $\eta$ , falls ein solcher existiert, keinesfalls als Zwischenpunkt enthält.  $F_0(X, X', \dots, y)$  lässt sich dann längs des Weges, der sich ergibt, wenn  $X, X', \dots$  beständig gleich  $\Xi, \Xi', \dots$  bleiben, und  $y$  jenes Kurvenstück zurücklegt, sicherlich regulär fortsetzen, solange der Endpunkt  $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$  dieses Weges noch nicht erreicht ist, besitzt jedoch in diesem Endpunkte selbst eine singuläre Stelle, da längs des ganzen Weges  $F_0(X, X', \dots, y)$  bei der Spezialisierung  $X' = \Xi', X'' = \Xi'', \dots$  in den im Text betrachteten Funktionszweig  $F_0(X, \Xi', \Xi'', \dots, y)$  übergeht. Die Stelle  $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$  ist also für  $F_0(X, X', \dots, y)$  eine singuläre (und somit  $\eta = \eta$ ).

Es existiert demnach tatsächlich zu jedem System von Werten  $\Xi, \Xi', \dots$ , deren absolute Beträge unterhalb  $\bar{\delta}$  gelegen sind, eine (und zugleich nach Voraussetzung *nur* eine) der Bedingung  $|\eta| < \sigma$  genügende singuläre Stelle  $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$  der Funktion  $F(X, X', \dots, y)$ . Die so definierte eindeutige Funktion  $\eta$  von  $\Xi, \Xi', \dots$  werde mit  $\eta = \Phi(\Xi, \Xi', \dots)$  bezeichnet. Da aber, wie die vorige Betrachtung ergab, die Stelle  $X = \Xi, y = \Phi(\Xi, \Xi', \dots)$  zugleich eine singuläre für die Funktion  $F(X, \Xi', \Xi'', \dots, y)$  der beiden Veränderlichen  $X$  und  $y$  ist, und zwar die einzige, welche den Bedingungen  $X = \Xi$  und  $|y| < \sigma$  genügt,<sup>1</sup> so stellt, jedesmal wenn den Grössen  $\Xi', \Xi'', \dots$  irgend welche bestimmte, dem absoluten Betrage nach unterhalb  $\bar{\delta}$  befindliche Werte beigelegt werden,  $\Phi(X, \Xi', \Xi'', \dots)$  nach § 4 eine für  $|X| < \bar{\delta}$  reguläre analytische Funktion von  $X$  dar. Das Analoge gilt natürlich auch inbezug auf irgend eine der übrigen Veränderlichen  $X', X'', \dots$  und da überdies der absolute Betrag der Funktion  $\Phi(X, X', \dots)$  im betrachteten Gebiete beständig unterhalb  $\sigma$  bleibt, so ist nach einem Satze des Herrn OSGOOD<sup>2</sup>  $\Phi(X, X', \dots)$  eine für  $|X| < \bar{\delta}, |X'| < \bar{\delta}, \dots$ , speziell also im Punkte  $X = X' = \dots = 0$  reguläre analytische Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen  $X, X', \dots$ . Ebenso ist infolgedessen die vermöge der obigen linearen Substitution aus  $\Phi(X, X', \dots)$  hervorgehende Funktion  $\varphi(x, x', \dots)$  eine im entsprechenden Punkte  $x = x' = \dots = 0$  reguläre analytische Funktion der Veränderlichen  $x, x', \dots$ .

Im *zweiten Falle* existiert, da  $f_0(x, x', \dots, y)$  bei der Fortsetzung längs des oben betrachteten Weges für eine gewisse Umgebung  $|x| < \varrho_\vartheta, |x'| < \varrho_\vartheta, \dots, |y - ke^{i\vartheta}| < \sigma_\vartheta$  jedes einzelnen Punktes  $(0, 0, \dots, 0, ke^{i\vartheta})$  ( $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ) desselben regulär ist, eine positive Grösse  $\delta$  von der Eigenschaft, dass sämtliche Zahlen  $\varrho_\vartheta$  und  $\sigma_\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ) grösser als  $\delta$  angenommen werden können. Bezeichnet man nun mit  $\mathfrak{P}_1(x, x', \dots, y - k)$  das zu  $\vartheta = 0$ , mit  $\mathfrak{P}_2(x, x', \dots, y - k)$  das zu  $\vartheta = 2\pi$  gehörige Funktionenelement und mit

$$\mathfrak{P}_0(x, x', \dots, y - k) = \sum_{v=0}^{\infty} \mathfrak{P}_v(x, x', \dots) (y - k)^v \quad (|x| < \delta, |x'| < \delta, \dots, |y - k| < \delta)$$

die (nach Annahme nicht identisch verschwindende) Differenz beider, so muss es unter den Potenzreihen  $\mathfrak{P}_v(x, x', \dots)$  mindestens eine,  $\mathfrak{P}(x, x', \dots)$ , geben, welche nicht identisch verschwindet. Verfährt man alsdann mit dieser letzteren ganz analog wie im ersten Falle mit der ebenso bezeichneten Potenzreihe, so gelangt man in leicht zu übersehender Weise<sup>3</sup> zu dem nämlichen Ergebnisse.

<sup>1</sup> Wäre  $X = \Xi, y = \bar{\eta}$  eine weitere solche, so besässe  $F(X, X', \dots, y)$  entgegen der Voraussetzung noch die weitere singuläre Stelle  $(\Xi, \Xi', \dots, \bar{\eta})$ .

<sup>2</sup> »Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen.« Math. Ann. 52 (1899), p. 462.

<sup>3</sup> Vgl. a. den zweiten Fall im Beweise des § 3.

## § 6.

Wir kehren zunächst wieder zum Falle zweier Veränderlichen  $x$  und  $y$  zurück, nehmen aber nunmehr an, dass in der Umgebung der betrachteten Stelle zu jedem Werte von  $x$  nicht *eine*, sondern *mehrere* singuläre Stellen existieren. Es gilt alsdann der folgende Satz:

*Es seien  $\varrho$  und  $\sigma$  zwei positive Zahlen. Für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig  $f(x, y)$  einer analytischen Funktion von  $x$  und  $y$  mögen zu jedem der Bedingung  $0 < |x| < \varrho$  genügenden Werte  $x = \xi$  genau  $r$  singuläre Stellen  $(\xi, r_1)$ ,  $(\xi, r_2), \dots, (\xi, r_r)$  existieren, deren  $y$ -Koordinaten der Kreisfläche  $|y| < \sigma$  angehören. Alsdann sind die  $r$  elementaren symmetrischen Funktionen von  $r_1, r_2, \dots, r_r$  analytische, für  $|\xi| < \varrho$  reguläre Funktionen von  $\xi$ .*

*Ist des weiteren die Stelle  $x = 0, y = 0$  selbst eine singuläre für jenen Funktionszweig, und zwar die einzige, deren  $x$ -Koordinate gleich null und deren  $y$ -Koordinate dem absoluten Betrage nach kleiner als  $\sigma$  ist, so reduzieren sich jene symmetrischen Funktionen für  $\xi = 0$  sämtlich auf null.*<sup>1</sup>

*Beweis.* Es sei  $\xi_0$  irgend ein der Bedingung  $0 < |\xi_0| < \varrho$  genügender Wert, und  $(\xi_0, r_1^0), \dots, (\xi_0, r_r^0)$  seien die  $r$  zugehörigen singulären Stellen. Eine positive Zahl  $\epsilon$  möge kleiner als jede der Grössen  $\frac{1}{2} |r_\alpha^0 - r_\beta^0|$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r; \alpha \leq \beta$ ) und zugleich kleiner als jede der Grössen  $\sigma - |r_\alpha^0|$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, r$ ) gewählt werden. Nach § 3 gibt es alsdann eine positive Zahl  $\delta$ , welche wir uns von vornherein kleiner als  $|\xi_0|$  und als  $\varrho - |\xi_0|$  gewählt denken, und welche so beschaffen ist, dass zu jedem der Bedingung  $|\bar{\xi} - \xi_0| < \delta$  genügenden Werte  $\bar{\xi}$  mindestens eine singuläre Stelle  $(\bar{\xi}, \bar{r})$  des Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung  $|\bar{r} - r_1^0| < \epsilon$  genügt, des weiteren mindestens eine, welche der Bedingung  $|\bar{r} - r_2^0| < \epsilon$  genügt, usf. Es kann aber auch nicht mehr als jedesmal *eine* solche singuläre Stelle vorhanden sein, da andernfalls die Gesamtzahl der singulären Stellen, deren  $x$ -Koordinate gleich  $\bar{\xi}$  und deren  $y$ -Koordinate dem absoluten Betrage nach kleiner als  $\sigma$  ist, entgegen der Voraussetzung grösser als  $r$  ausfallen würde. Jede der  $r$  singulären Stellen  $(\xi_0, r_1^0), \dots, (\xi_0, r_r^0)$  genügt somit den Voraussetzungen des im § 4 bewiesenen Satzes und es sind daher  $r_1, r_2, \dots, r_r$  sämtlich Funktionen von  $\xi$ , welche für  $\xi = \xi_0$  regulär sind. Jede elementare symmetrische Funktion  $S(r_1, r_2, \dots, r_r)$  von  $r_1, r_2, \dots, r_r$  ist daher eine Funktion von  $\xi$ , welche für  $0 < |\xi| < \varrho$  eindeutig definiert und regulär ist; da überdies beständig  $|r_\alpha| < \sigma$

<sup>1</sup> Anstelle der Kreisfläche  $|y| < \sigma$  kann auch ein völlig beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet der  $y$ -Ebene treten (welches jedoch, wenn der Schlusspassus des Satzes in entsprechender Weise gültig bleiben soll, selbstredend den Punkt  $y = 0$  enthalten muss).

für  $0 < |\xi| < \varrho$ , so bleibt auch  $|S(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)|$  für  $0 < |\xi| < \varrho$  unterhalb einer endlichen Schranke, sodass  $S(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$  auch für  $\xi = 0$  selbst noch regulär sein muss.

Um sich endlich von der Richtigkeit des Schlusspassus der Behauptung zu überzeugen, bezeichne man die elementaren symmetrischen Funktionen von  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  der Reihe nach mit

$$S_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) = T_1(\xi), \dots, S_r(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) = T_r(\xi).$$

Für jedes der Bedingung  $0 < |\xi| < \varrho$  genügende  $\xi$  liefern alsdann die  $r$  Wurzeln  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  der algebraischen Gleichung

$$\eta^r - T_1(\xi)\eta^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r(\xi) = 0,$$

deren Koeffizienten  $T_1(\xi), T_2(\xi), \dots$  sämtlich für  $|\xi| < \varrho$  regulär sind, die  $r$  zugehörigen singulären Stellen  $(\xi, \eta_1), \dots, (\xi, \eta_r)$ . Da aber Häufungsstellen von singulären Stellen stets selbst wieder singuläre Stellen sind, so muss auch noch für  $\xi = 0$  jede Wurzel  $\eta$  der Gleichung eine singuläre Stelle  $(0, \eta)$  anzeigen, und zwar jedesmal eine solche, für welche  $|\eta| < \sigma$  ist. Soll also  $(0, 0)$  die einzige singuläre Stelle dieser Art sein, so muss für  $\xi = 0$  jene algebraische Gleichung die  $r$ -fache Wurzel  $\eta = 0$  besitzen, d. h. es muss  $T_1(0) = T_2(0) = \dots = 0$  sein.

Der vorstehende Satz lässt sich in folgender Weise auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen:

*Es seien  $\varrho$  und  $\sigma$  zwei positive Zahlen. Für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig  $f(x, x', \dots, y)$  einer analytischen Funktion von  $x, x', \dots, y$  mögen zu jedem der Bedingung  $|\xi| < \varrho, |\xi'| < \varrho, \dots$  genügenden Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  höchstens  $r$  singuläre Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta_1), \dots, (\xi, \xi', \dots, \eta_r)$  existieren, deren  $y$ -Koordinaten  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  der Kreisfläche  $|y| < \sigma$  angehören. Unter den Wertsystemen  $\xi, \xi', \dots$ , welche der angegebenen Bedingung genügen, möge jedoch, sobald  $\xi', \xi'', \xi''', \dots$  spezielle Werte beigelegt werden, nur eine endliche Anzahl vorhanden sein, für welche die Anzahl der zugehörigen singulären Stellen kleiner als  $r$  ausfällt; analog falls  $\xi, \xi'', \xi''', \dots$  spezielle Werte beigelegt werden, usf. Als dann sind die  $r$  elementaren symmetrischen Funktionen*

$$S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) = T_\alpha(\xi, \xi', \dots) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r)$$

*von  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  analytische, für  $|\xi| < \varrho, |\xi'| < \varrho, \dots$  reguläre Funktionen von  $\xi, \xi', \dots$ , und die sämtlichen im Gebiete  $|x| < \varrho, |x'| < \varrho, \dots, |y| < \sigma$  gelegenen singulären Stellen von  $f(x, x', \dots, y)$  werden genau dargestellt durch diejenigen Wertsysteme  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$ , welche den Bedingungen:*

$$\eta^r - T_1(\xi, \xi', \dots) \eta^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r(\xi, \xi', \dots) = 0$$

$$|\xi| < \varrho, |\xi'| < \varrho, \dots$$

genügen.<sup>1</sup>

*Beweis.* Es sei  $|\xi_0| < \varrho, |\xi'_0| < \varrho, \dots$ , und zwar werde  $\xi_0$  so gewählt, dass zum Wertsysteme  $\xi_0, \xi'_0, \dots$  genau  $r$  singuläre Stellen  $(\xi_0, \xi'_0, \dots, \eta_1^0), \dots, (\xi_0, \xi'_0, \dots, \eta_r^0)$  der betrachteten Art gehören. Wird alsdann eine positive Zahl  $\varepsilon$  genau wie beim vorigen Beweise bestimmt, so gibt es nach § 3 (Schlussbemerkung) eine positive Zahl  $\delta$ , die wir uns von vornherein kleiner als jede der Grössen  $\varrho - |\xi_0|, \varrho - |\xi'_0|, \dots$  gewählt denken, und welche so beschaffen ist, dass zu jedem der Bedingung  $|\bar{\xi} - \xi_0| < \delta, |\bar{\xi}' - \xi'_0| < \delta, \dots$  genügenden Wertsysteme  $\bar{\xi}, \bar{\xi}', \dots$  mindestens eine singuläre Stelle  $(\bar{\xi}, \bar{\xi}', \dots, \bar{\eta})$  jenes Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung  $|\bar{\eta} - \eta_1^0| < \varepsilon$  genügt, des weiteren mindestens eine, welche der Bedingung  $|\bar{\eta} - \eta_2^0| < \varepsilon$  genügt, usf. Als dann ist wieder unmittelbar ersichtlich, dass auch nicht mehr als jedesmal eine derartige singuläre Stelle vorhanden sein kann. Jede der  $r$  singulären Stellen  $(\xi_0, \xi'_0, \dots, \eta_1^0), \dots, (\xi_0, \xi'_0, \dots, \eta_r^0)$  genügt somit den Voraussetzungen des in § 5 bewiesenen Satzes. Infolgedessen sind  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  sämtlich Funktionen von  $\xi, \xi', \dots$ , welche an der Stelle  $\xi = \xi_0, \xi' = \xi'_0, \dots$  regulär sind, und das gleiche gilt auch von irgend einer elementaren symmetrischen Funktion  $S(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) = T(\xi, \xi', \dots)$  von  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ . Die Funktion  $T(\xi, \xi'_0, \xi''_0, \dots)$  ( $|\xi_0| < \varrho, |\xi''_0| < \varrho, \dots$ ) ist somit eine im Gebiete  $|\xi| < \varrho$  mit Ausschluss höchstens einer endlichen Anzahl von Stellen durchweg eindeutige und reguläre Funktion von  $\xi$ ; da ihr absoluter Betrag aber überdies unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, so muss sie auch im vollen Gebiete  $|\xi| < \varrho$  regulär sein. Ebenso ist  $T(\xi_0, \xi', \xi''_0, \dots)$  ( $|\xi_0| < \varrho, |\xi''_0| < \varrho, \dots$ ) eine für  $|\xi'| < \varrho$  reguläre Funktion von  $\xi'$  usf. Da endlich für alle betrachteten Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  der absolute Betrag von  $T(\xi, \xi', \dots)$  unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, so muss nach dem bereits erwähnten Satze des Herrn Osgood<sup>2</sup>  $T(\xi, \xi', \dots)$  eine für  $|\xi| < \varrho, |\xi'| < \varrho, \dots$  reguläre Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen  $\xi, \xi', \dots$  sein, w. z. b. w.

Der die Gesamtheit der singulären Stellen des Gebietes  $|x| < \varrho, |x'| < \varrho, \dots, |y| < \sigma$  betreffende Schlusspassus der Behauptung ist trivial, solange es sich dabei um Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  handelt, zu welchen genau  $r$  singuläre Stellen der betrachteten Art gehören. Für die übrigen Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  liefern, da Häufungsstellen von singulären Stellen stets selbst wieder singuläre Stellen sind,

<sup>1</sup> Anstelle der Kreisfläche  $|y| < \sigma$  kann auch hier ein beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet der  $y$ -Ebene treten.

<sup>2</sup> S. p. 75, Fussn. <sup>2</sup>.

Über die a. d. singul. Stellen einer analyt. Funktion mehrerer Veränderlichen bestehend. Gebilde. 79

die Wurzeln  $\eta$  der Gleichung sicher ebenfalls singuläre Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$ , und zwar stets solche, für welche  $|\eta| < \sigma$  ist; dass es aber zu einem derartigen Wertsysteme  $\xi, \xi', \dots$  nicht noch anderweitige singuläre Stellen  $(\xi, \xi', \dots, \eta)$  geben könne, welche der Bedingung  $|\eta| < \sigma$  genügen, folgt, da deren Anzahl nach Voraussetzung jedenfalls eine endliche sein müsste, unmittelbar aus § 3.

München, Oktober 1907.

---