

## XXII. Ueber die Zusammendrückung einer Kugel; von Hrn. Poisson.

(*Ann. de chim. et de phys. T. XXXVIII. p. 330.*)

Es sey eine hohle, homogene und überall gleich dicke Kugel von innen und außen gegebenen Pressungen ausgesetzt; man verlangt zu bestimmen, welche Aenderung der äußere und innere Radius erleidet.

Vor dieser Aenderung seyen  $a$  und  $a'$  die respectiven Größen dieser Radien, und  $r$  der Abstand irgend eines Punktes in dem vollen Theile von dem Mittelpunkte der Kugel. Man nehme an, daß, nach der Veränderung, dieser Abstand werde  $r + \phi r$ . Man nenne  $h$  und  $h'$  den äußern und innern Druck, bezogen auf die Flächeneinheit. Zufolge der Gleichungen für das Gleichgewicht der elastischen Körper, hat man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d\phi}{dr} &= 0 \\ k \left( 3r \frac{d\phi}{dr} + 5\phi \right) + h &= 0 \\ k \left( 3r \frac{d\phi}{dr} + 5\phi \right) + h' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Der Coëfficient  $k$  ist eine Constante, die nur von der Materie und der Temperatur der Kugel abhängt. Die erste dieser drei Gleichungen findet für alle Werthe von  $r$  statt, die zweite für  $r=a$ , und die dritte für  $r=a'$ . Integriert man die erste, und bezeichnet mit  $b$  und  $c$  die beiden willkürlichen Constanten, so kommt:

$$\phi = c + \frac{b}{r^3};$$

und substituirt man diesen Werth von  $\phi$  in den beiden andern, so ergibt sich:

$$c = \frac{h' a'^3 - h a^3}{5k(a^3 - a'^3)}; \quad b = \frac{(h' - h) a^3 a'^3}{4k(a^3 - a'^3)}$$

folglich wird der Werth von  $\varphi$  seyn:

$$\varphi = \frac{1}{5k(a^3 - a'^3)} \left\{ h'a^3 - ha^3 + \frac{5(h-h')a^3a'}{4kr^3} \right\}$$

Bezeichnet man nun, nach der Zummandrückung, mit  $A$  und  $A'$  den äußern und innern Radius der Kugel, oder die Werthe von  $r+r\varphi$ , welche  $r=a$  und  $r=a'$  entsprechen, so hat man:

$$A = a - \frac{(ha^3 - h'a'^3)a}{5k(a^3 - a'^3)} - \frac{(h-h')aa'^3}{4k(a^3 - a'^3)}$$

$$A' = a' - \frac{(ha^3 - h'a'^3)a'}{5k(a^3 - a'^3)} - \frac{(h-h')a^3a'}{4k(a^3 - a'^3)}$$

für die vollständige Lösung des aufgegebenen Problems.

Im Falle, daß  $h=h'$  ist, reduciren sich diese Werthe von  $A$  und  $A'$  auf:

$$A = a - \frac{ha}{5k}, \quad A' = a' - \frac{ha'}{5k}$$

Der von  $A$  bleibt noch der nämliche, wenn man  $a'=0$  setzt; dies zeigt, daß eine hohle Kugel, welche von außen und innen gleich stark gedrückt wird, dieselbe Verkürzung  $\frac{ha}{5k}$  des Radius erleidet, als wenn die Kugel ganz massiv wäre.

Ist die Dicke  $a-a'$  sehr klein, und bezeichnet man sie mit  $\alpha$ , so wie mit  $\beta$  den mittleren Radius  $\frac{1}{2}(a+a')$ , so hat man, sehr nahe:

$$\frac{1}{2}(A+A') = \beta - \frac{3(h-h')\beta^2}{20k\alpha} - \frac{(h+h')\beta}{10k}$$

$$A - A' = \alpha + \frac{(h-h')\beta}{10k}$$

für den mittleren Radius und die Dicke nach der Zusammendrückung.

Um sich dieser Formeln bedienen zu können, muß man den Werth von  $k$  in Bezug auf die Substanz und die Temperatur der Kugel kennen. Man leitet ihn ab aus der beobachteten Verlängerung eines verticalen Fadens von gleicher Natur, der an einem Ende an einen

festen Punkt gehängt, und am untern Ende mit einem gegebenen Gewichte belastet ist. Es sey  $\gamma$  diese Verlängerung,  $l$  die ursprüngliche Länge des Fadens;  $\omega$  der Querschnitt senkrecht gegen seine Axe,  $p$  das Gewicht, womit er belastet ist, und  $p'$  sein eignes Gewicht; nach den Gleichgewichtsbedingungen für die elastischen Körper hat man dann:

$$k = \frac{2l}{5\gamma\omega} \cdot (p + \frac{1}{2}p') \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man nehme nun an, die innere Kugel, deren Radius  $a'$  ist, sey erfüllt mit einer Flüssigkeit oder einer andern homogenen Substanz, die von der äußern Schicht, deren Dicke  $\alpha$ , verschieden ist. Man nenne  $k'$  die Constante, welche  $k$  analog ist und der Substanz dieser Kugel zukommt. Es sey  $\phi'$  das, was  $\phi$  für die verschiedenen Punkte derselben wird, d. h. für die Werthe von  $r$  kleiner als  $a'$ . Die erste Gleichung (1) findet ihre Anwendung auf beide Theile des Körpers, welchen wir betrachten; man hat also zunächst:

$$\phi = c + \frac{b}{r^3}; \quad \phi' = c' + \frac{b'}{r^3}$$

worin  $b, c, b', c'$  willkürliche Constanten sind. Allein damit die Gröfse  $\phi'$  für den Mittelpunkt dieses Körpers nicht unendlich werde, muß man  $b' = 0$  haben; überdies muß an der Gränze beider Theile, welche  $r = a'$  entspricht, seyn  $\phi = \phi'$ , und daraus schließt man:

$$c' = c + \frac{b}{a'^3}.$$

Die zweite der Gleichungen (1), in Bezug auf die äußere Fläche, findet immer statt, und es folgt daraus:

$$h + k \left( 5c - \frac{4b}{a^3} \right) = 0.$$

Die Dritte wird hier durch die folgende ersetzt:

$$k \left( 3r \frac{d\phi}{dr} + 5\phi \right) = k' \left( 3r \frac{d\phi'}{dr} + 5\phi' \right)$$

welche für  $r = a'$  stattfindet, und giebt:

$$k\left(5c - \frac{4b}{a^3}\right) = 5k\left(c + \frac{b}{a'^3}\right).$$

Aus diesen Gleichungen zieht man:

$$b = \frac{h(k' - k)a^3 a'^3}{kD}; \quad c = -\frac{h(4k + 5k')a^3}{5kD}$$

wenn man zur Abkürzung macht:

$$k'(5a^3 + 4a'^3) + 4k(a^3 - a'^3) = D.$$

Wir haben folglich:

$$\varphi = -\frac{h(4k + 5k')a^3}{5kD} + \frac{h(k' - k)a^3 a'^3}{kDr^3}$$

$$\varphi' = -\frac{9ha^3}{5D}$$

und die beiden Radien  $A$  und  $A'$  der äufsern Schicht werden, nach der Zusammensetzung, seyn:

$$A = a - \frac{h(4k + 5k')a^4}{5kD} + \frac{h(k' - k)a a'^3}{kD}$$

$$A' = a' - \frac{9ha^3 a'}{5D}$$

Wenn der Druck  $h$  unmittelbar auf die Oberfläche der innern Kugel ausgeübt würde, wäre die Verkürzung ihres Radius  $\frac{ha'}{5k'}$ , statt  $\frac{9ha^3 a'}{5D}$ . Die Einschließung in eine solide homogene und überall gleich dicke Hülle verändert also die Compression dieser Kugel in dem Verhältnifs von  $9k'a^3$  zu  $D$ ; und aus dem Werthe von  $D$  ist leicht zu ersehen, dafs diese Zusammendrückung gröfser oder kleiner wird, je nachdem man hat  $k' >$  oder  $< k$ , d. h. je nachdem die Substanz der, soliden oder liquiden, Kugel weniger oder mehr compressibel ist als die der soliden Hülle. Der Effect hängt übrigens von der Dicke der Hülle ab, und wird unmerklich, wenn diese Dicke hinlänglich klein in Bezug auf den Radius  $a'$  ist. Er ist am gröfsten, wenn  $a'$  sehr klein gegen  $a$ , und  $k'$  sehr grofs gegen  $k$  ist; und alsdann wird die Compression der innern Kugel, durch die Hinzufügung der äufsern Hülle, fast um vier Fünftel vermehrt.

Die Gleichungen (1) und (2), welche ich in dieser Notiz angewandt habe, sind aus der Abhandlung über das Gleichgewicht der elastischen Körper ausgezogen, von der ich einen Bericht in den *Ann. de chim. et de phys.* T. XXXVII. p. 337. \*) gegeben habe.

Ich werde noch den folgenden, gleichfalls in jener Abhandlung bewiesenen Satz hinzufügen.

Wenn auf die ganze Oberfläche eines homogenen Körpers von beliebiger Form ein Druck ausgeübt wird, und dieser eine, durch den Bruch  $\delta$  bezeichnete, lineare Contraction hervorbringt, so bewirkt derselbe Druck, wenn er auf die Enden eines Stabes von gleicher Substanz, dessen Radius sehr klein und dessen Seitenfläche gänzlich frei ist, ausgeübt wird, eine doppelte oder  $2\delta$  gleiche Contraction im Sinne der Länge. Es folgt daraus, daß die Capacitätsverringerung einer bleiernen Flasche, die nach der Contraction einer Stange desselben Metalles berechnet worden, nur die Hälfte von der ist, die Hr. Oersted in dem obigen Aufsatz \*\*) angeführt hat.

### XXIII. Ueber das Magnium.

Zufolge einer vorläufigen, in dem *Journ. de chim. med.* Ann. IV. p. 456. mitgetheilten Nachricht, ist es Herrn Bussy gelungen, das Magnium, das Radical der Talkerde, isolirt darzustellen, und zwar dadurch, daß er Kaliumdämpfe über das in einem Porcellanrohre glühende Chlormagnium hinwegstreichen ließ. Das durch Auswaschen abgesonderte Magnium zeigte sich in Gestalt von braunen Flitterchen, die, in einen Agathmörser zusam-

\*) Dies. Ann. Bd. 89. S. 383.

\*\*) Es ist der in dies. Ann. Bd. 88. S. 513., welcher auch überhaupt die Veranlassung zu dieser Notiz des Hrn. Poisson gegeben hat.