19.

Ueber die Integration der Differential-Formel $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ϱ ganze Functionen sind.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

1.

Wenn man den Ausdruck

$$1)\quad z = \log\left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right)$$

wo p, q und R ganze Functionen einer veränderlichen Gröſse x sind, nach x differentiirt, so erhält man:

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p + q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p - q\sqrt{R}},$$

oder:

$$dz = \frac{(p - q\sqrt{R})\left(dp + d(q\sqrt{R})\right) - (p + q\sqrt{R})\left(dp - d(q\sqrt{R})\right)}{p^2 - q^2 . R},$$

das heiſst:

$$dz = \frac{2p . d(q\sqrt{R}) - 2\, dp\, q\sqrt{R}}{p^2 - q^2 . R}.$$

Nun ist

$$d(q\sqrt{R}) = dq . \sqrt{R} + \tfrac{1}{2} q . \frac{dR}{\sqrt{R}},$$

also, durch Substitution,

$$dz = \frac{pq . dR + 2(p\, dq - q\, dp) . R}{(p^2 - q^2 . R) . \sqrt{R}},$$

folglich, wenn man

$$2)\quad \begin{cases} pq . \frac{dR}{dx} + 2\left(p . \frac{dq}{dx} - q . \frac{dp}{dx}\right) . R = M \text{ und} \\ p^2 - q^2 . R = N \end{cases}$$

setzt:

$$3)\quad dz = \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}};$$

wo, wie leicht zu sehen, M und N ganze Functionen von x sind.

Da nun $z = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$, so ist, wenn man integrirt,

$$4)\quad \int \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right).$$

Daraus folgt, dafs sich in dem Differential $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, für die rationale Function ϱ unzählige Formen finden lassen, die dieses Differential durch Logarithmen integrabel machen, und zwar durch einen Ausdruck von der Form $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$. Die Function ϱ enthält, wie man aus den Gleichungen (2) sieht, aufser R, noch zwei unbestimmte Functionen p und q, und wird durch diese Functionen bestimmt.

Man kann nun umgekehrt die Frage aufstellen, ob es möglich sei, die Functionen p und q so anzunehmen, dafs ϱ oder $\frac{M}{N}$ eine bestimmte gegebene Form bekommt. Die Auflösung dieses Problems führt zu vielen interessanten Resultaten, die als eben so viele Eigenschaften der Functionen von der Form $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ zu betrachten sind. Ich werde mich in dieser Abhandlung auf den Fall beschränken, wenn $\frac{M}{N}$ eine ganze Function von x ist, und folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen suchen:

„Alle Differentiale von der Form $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, wo ϱ und R ganze Functionen von „x sind, zu finden, deren Integrale durch eine Function von der Form „$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$ ausgedrückt werden können."

2.

Differentiirt man die Gleichung

$$N = p^2 - q^2 . R,$$

so erhält man:

$$dN = 2p\,dp - 2q\,dq . R - q^2 . dR;$$

also, wenn man mit p multiplicirt,

$$p\,dN = 2p^2 dp - 2pq\,dq . R - pq^2 . dR,$$

das heifst: wenn man statt p^2 seinen Werth $N + q^2 . R$ setzt,

$$p dN = 2N dp + 2q^2 dp . R - 2pq dq . R - pq^2 . dR,$$

oder

$$p dN = 2N dp - q\big(2(p dq - q dp)R + pq . dR\big),$$

folglich, weil

$$2(p dq - q dp)R + pq . dR = M . dx \ (2.),$$
$$p dN = 2N . dp - qM . dx,$$

oder:

$$qM = 2N . \frac{dp}{dx} - p . \frac{dN}{dx},$$

und folglich

$$5) \quad \frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p . \frac{dN}{N dx}\right) : q.$$

Nun soll $\frac{M}{N}$ eine ganze Function von x sein: also ist, wenn diese Function durch ϱ bezeichnet wird:

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p . \frac{dN}{N . dx}.$$

Daraus folgt, dafs $p . \frac{dN}{N dx}$ eine ganze Function von x sein mufs. Nun ist, wenn man

$$N = \log (x + a)^m (x + a_1)^{m_1} \ldots\ldots (x + a_n)^{m_n}$$

setzt,

$$\frac{dN}{N dx} = \frac{m}{x + a} + \frac{m_1}{x + a_1} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{x + a_n};$$

also mufs auch

$$p\left(\frac{m}{x + a} + \frac{m_1}{x + a_1} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{x + a_n}\right)$$

eine ganze Function sein. Dieses aber kann nicht Statt finden, wenn nicht das Product $(x + a) \ldots\ldots (x + a_n)$ ein Factor von p ist. Es mufs also

$$p = (x + a) \ldots\ldots (x + a_n) . p_1$$

sein, wo p_1 eine ganze Function ist. Nun ist

$$N = p^2 - q^2 . R,$$

also:

$$\log (x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \ldots (x+a_n)^{m_n} = p_1^2 (x+a)^2 (x+a_1)^2 \ldots (x+a_n)^2 - q^2 . R.$$

Da nun R keinen Factor von der Form $(x+a)^2$ hat, und man immer annehmen kann, dafs p und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist klar, dafs

$$m = m_1 = \ldots\ldots m_n = 1$$

und $\quad R = \log (x + a)(x + a_1) \ldots\ldots (x + a_n) . R_1$

sein mufs, wo R_1 eine ganze Function ist.

Man hat also

$$N = \log (x + a)(x + a_1) \ldots\ldots (x + a_n) \text{ und}$$
$$R = N . R_1,$$

das heifst: N mufs ein Factor von R sein. Man hat auch $p = N . p_1$.

Substituirt man diese Werthe von R und p in die Gleichungen (2.), so findet man folgende zwei:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1 \\ \frac{M}{N} = p_1 q . \frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right) R_1 = \varrho \end{array}\right\}.$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Form der Functionen p_1, q, N und R_1, und wenn dieselben bestimmt sind, so giebt hernach die zweite Gleichung die Function ϱ. Diese letzte Function kann auch durch die Gleichung (5.) gefunden werden.

3.

Es kommt nunmehr alles auf die Gleichung

$$7)\quad p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1$$

an.

Sie kann zwar durch die gewöhnliche Methode der unbestimmten Coefficienten aufgelöst werden, allein die Anwendung dieser Methode würde hier äufserst weitläufig sein, und schwerlich zu einem allgemeinen Resultat führen. Ich werde mich daher eines andern Verfahrens bedienen, welches demjenigen ähnlich ist, das man anwendet, um die unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade zwischen zwei unbekannten Gröfsen aufzulösen. Der Unterschied besteht blofs darin, dafs man, statt mit ganzen Zahlen, mit ganzen Functionen zu thun hat. Da in der Folge häufig die Rede von dem Grade einer Function sein wird, so werde ich mich des Zeichens δ bedienen, um denselben auszudrücken, auf die Weise, dafs δP den Grad der Function P bezeichnet, z. B.

$$\delta(x^m + ax^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots) = m,$$
$$\delta\left(\frac{x^5 + cx}{x^3 + e}\right) = 2,$$
$$\delta\left(\frac{x + e}{x^2 + k}\right) = -1 \text{ etc.}$$

Es ist übrigens klar, daſs folgende Gleichungen Statt finden:

$$\delta\,(P\,.\,Q) = \delta P + \delta Q,$$

$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$

$$\delta\,(P^m) = m\,\delta P;$$

ferner

$$\delta\,(P + P') = \delta P,$$

wenn $\delta P'$ nicht gröſser als δP ist.

Eben so will ich, der Kürze wegen, den ungebrochenen Theil einer rationalen Function u durch

$$Eu$$

bezeichnen, auf die Weise, daſs

$$u = Eu + u',$$

wo $\delta u'$ negativ ist.

Es ist klar, daſs

$$E(s + s') = E(s) + E(s'),$$

und also

$$E(s + s') = E(s),$$

wenn $\delta s'$ negativ ist.

In Rücksicht auf dieses Zeichen hat man folgenden Satz:

„Wenn die drei rationalen Functionen u, v und z die Eigenschaft haben, daſs

$$u^2 = v^2 + z,$$

„so ist

$$E(u) = \pm E(v),$$

„wenn $\delta z < \delta v$.

Es ist nemlich, zu Folge der Definition,

$$u = E(u) + u',$$
$$v = E(v) + v',$$

wo $\delta u'$ und $\delta v'$ kleiner als Null sind; also wenn man diese Werthe in die Gleichung $u^2 = v^2 + z$ substituirt:

$$(Eu)^2 + 2u'Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'Ev + v'^2 + z.$$

Daraus folgt:

$$(Eu)^2 - (Ev)^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v'Ev + 2u'Eu = t,$$

oder:

$$(Eu + Ev)(Eu - Ev) = t.$$

Nun ist, wie leicht zu sehen,

$$\delta t < \delta v;$$

$\delta(Eu + Ev)\,(Eu - Ev)$ dagegen ist wenigstens gleich δv, wenn nicht $(Eu + Ev)\,(Eu - Ev)$ gleich Null ist; es ist also nothwendig

$$(Eu + Ev)\,(Eu - Ev) = 0,$$

welches

$$Eu = \pm Ev$$

giebt, wie zu beweisen war.

Es ist klar, dafs die Gleichung (7.) nicht Statt finden kann, wenn nicht $\delta(Np_1^2) = \delta(R_1 q^2)$, das heifst,

$$\delta N + 2\delta p_1 = \delta R_1 + 2\delta q.$$

Daraus folgt

$$\delta(NR_1) = 2(\delta q - \delta p_1 + \delta R_1).$$

Der höchste Exponent in der Function R mufs also eine gerade Zahl sein.

Es sei $\delta N = n - m$, $\delta R_1 = n + m$.

4.

Dieses festgesetzt, werde ich nunmehr statt der Gleichung

$$p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1$$

folgende:

$$8)\quad p_1^2 . N - q^2 . R_1 = v$$

setzen, wo v eine ganze Function ist, deren Grad kleiner ist als $\frac{\delta N + \delta R_1}{2}$.

Diese Gleichung ist, wie man sieht, allgemeiner; sie kann durch das nemliche Verfahren aufgelöst werden.

Es sei t der ganze Theil der gebrochenen Function $\frac{R_1}{N}$ und t' der Rest, so hat man

$$9)\quad R_1 = N . t + t',$$

und es ist klar, dafs t vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn $\delta N = n - m$ und $\delta R_1 = n + m$.

Substituirt man diesen Ausdruck für R_1 in die Gleichung (3.), so ergiebt sich

$$10)\quad (p_1^2 - q^2 . t) . N - q^2 . t' = v.$$

Es sei nunmehr

$$11)\quad t = t_1^2 + t'_1 \ldots\ldots\ldots,$$

so kann man immer t_1 so bestimmen, dafs der Grad von t'_1 kleiner ist als m. Man setze nemlich

$$\begin{aligned} t\ &= \alpha_0 + \alpha_1 . x + \alpha_2 . x^2 \ldots . + \alpha_{2m} x^{2m} \\ t_1 &= \beta_0 + \beta_1\, x + \ldots\ldots\ldots + \beta_m\, x^m \\ t'_1 &= \gamma_0 + \gamma_1\, x + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1}, \end{aligned}$$

so giebt die Gleichung (10.)

$$\alpha_{2m} x^{2m} + \alpha_{2m-1} . x^{2m-1} + \alpha_{2m-2} x^{2m-2} + \ldots . + \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots . + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$= \beta^2_m x^{2m} + 2\beta_m \beta_{m-1} x^{2m-1} + (\beta^2_{m-1} + 2\beta_m \beta_{m-2}) . x^{2m-2} + (2\beta_m \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-2}) x^{2m-3} + \text{etc.}$$
$$+ \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + \gamma_1 x + \gamma.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Coefficienten mit einander vergleicht:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2m} &= \beta^2_m \\
\alpha_{2m-1} &= 2\beta_m . \beta_{m-1} \\
\alpha_{2m-2} &= 2\beta_m . \beta_{m-2} + \beta^2_{m-1} \\
\alpha_{2m-3} &= 2\beta_m . \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-2} \\
\alpha_{2m-4} &= 2\beta_m . \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-3} + \beta^2_{m-2} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= 2\beta_m . \beta_0 + 2\beta_{m-1} . \beta_1 + 2\beta_{m-2} . \beta_2 + \ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{m-1} &= \alpha_{m-1} - 2\beta_{m-1} . \beta_0 - 2\beta_{m-2} . \beta_1 - \ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{m-2} &= \alpha_{m-2} - 2\beta_{m-2} . \beta_0 - 2\beta_{m-3} . \beta_1 - \ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_2 &= \alpha_2 - 2\beta_2 . \beta_0 - \beta_1^2 \\
\gamma_1 &= \alpha_1 - 2\beta_1 . \beta_0 \\
\gamma_0 &= \alpha_0 - \beta_0^2.
\end{aligned}$$

Die $m+1$ ersten Coefficienten dieser Gleichungen geben, wie in jedem Falle leicht zu sehen, die Werthe der $m+1$ Gröfsen $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots\ldots . \beta_0$, und die m letzten die Werthe der Gröfsen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_{m-1}$.

Die vorausgesetzte Gleichung (11.) ist also immer möglich.

Substituirt man nun in die Gleichung (10.) statt t seinen Werth aus der Gleichung (11.), so erhält man:

$$12)\quad (p_1^2 - q^2 . t_1^2) N - q^2 (N . t'_1 + t') = v.$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = t_1^2 + t'_1 + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2}.$$

Bemerkt man nun, dafs

$$\delta\left(t'_1 + \frac{t_1}{N} + \frac{v}{q^2}\right) < \delta t_1,$$

so ist, dem Vorhergehenden zufolge,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right) = \pm E t_1 = \pm t_1,$$

also hat man

$$p_1 = \pm t_1 \cdot q + \beta,$$
$$\text{wo } \delta\beta < \delta q;$$

oder, da t_1 mit beiden Zeichen genommen werden kann,

$$p_1 = t_1 \cdot q + \beta.$$

Substituirt man diesen Ausdruck statt p_1 in die Gleichung (12.), so geht dieselbe in

$$13) \quad (\beta^2 + 2\beta t_1 q) N - q^2 \cdot s = v$$

über, wenn man der Kürze wegen

$$Nt'_1 + t' = s$$

setzt.

Aus dieser Gleichung folgt leicht:

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{N(t_1^2 N + s)}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2},$$

oder, weil $t_1^2 N + s = R_1$, (indem $R_1 = tN + t'$, $s = Nt'_1 + t'$, und $t = t_1^2 + t'_1$),

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{R_1 N}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Es sei nun

$$R_1 N = r^2 + r',$$
$$\text{wo } \delta r' < \delta r \text{ ist},$$

so hat man:

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \left(\frac{r}{s}\right)^2 + \frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Nun aber ist, wie leicht zu sehen,

$$\delta\left(\frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right) < \delta\left(\frac{r}{s}\right),$$

also

$$E\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right) = E\left(\frac{r}{s}\right),$$

folglich

$$E\left(\frac{q}{\beta}\right) = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right);$$

also, wenn man

$$E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right) = 2\mu \text{ setzt},$$

$q = 2\mu \cdot \beta + \beta_1$; wo $\delta\beta_1 < \delta\beta$ ist.

Substituirt man diesen Ausdruck für q in die Gleichung (13.), so erhält man folgende:

$$\beta^2 \cdot N + 2\beta t_1 N (2\mu\beta + \beta_1) - s(4\mu^2\beta^2 + 4\mu\beta_1\beta + \beta_1^2) = v,$$

das

das heifst:

$$\beta^2(N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2 + 2(t_1 N - 2\mu s)\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

oder, wenn man

$$14)\quad \left\{\begin{array}{l} s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2 \\ t_1 N - 2\mu s = -r_1 \end{array}\right\}$$

setzt,

$$15)\quad s_1 . \beta^2 - 2r_1 . \beta\beta_1 - s . \beta_1^2 = v.$$

Weil $E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right) = 2\mu$ ist, so hat man

$$1 + t_1 N = 2s . \mu + E, \text{ wo } \delta E < \delta s,$$

folglich giebt die letzte der Gleichungen (14.)

$$r_1 = r - E.$$

Ferner erhält man, wenn man den Ausdruck für s_1 mit s multiplicirt,

$$ss_1 = Ns + 4\mu t_1 Ns - 4s^2\mu^2 = Ns + t_1^2 N^2 - (2s\mu - t_1 N)^2.$$

Nun ist $2s\mu - t_1 N = r_1$, also

$$ss_1 = Ns + t_1^2 N^2 - r_1^2, \text{ und } r_1^2 + ss_1 = N(s + t_1^2 N).$$

Es ist ferner

$$s + t_1^2 N = R_1,$$

also

$$16)\quad r_1^2 + ss_1 = N . R_1 = R.$$

Vermöge des Vorhergehenden ist $R = r^2 + r'$, also

$$r^2 - r_1^2 = ss_1 - r', \; (r + r_1)(r - r_1) = ss_1 - r'.$$

Da nun $\delta r' < \delta r$ ist, so folgt aus dieser Gleichung, dafs

$$\delta(ss_1) = \delta(r + r')(r - r_1),$$

das heifst, weil $r - r_1 = E$, wo $\delta E < \delta r$,

$$\delta s + \delta s_1 = \delta r + \delta E.$$

Nun ist $\delta E < \mathrm{d}s$, also

$$\delta s_1 < \delta r.$$

Ferner hat man:

$$s = N . t'_1 + t', \text{ wo } \delta t' < \delta N \text{ und } \delta t'_1 < \delta t_1,$$

also

$$\delta s < \delta N + \delta t_1.$$

Aber $R = N(s + t_1^2 N)$, folglich:

$$\delta R = 2\delta t_1 + 2\delta N,$$

oder, da $\delta R = 2\delta r = 2\delta r_1$,

$$\delta t_1 + \delta N = \delta r_1.$$

Daraus folgt also, dafs

$$\delta s < \delta r_1.$$

Die Gleichung $p_1^2 . N - q^2 . R_1 = v$ ist also nunmehr in die Gleichung

$$s_1 . \beta^2 - 2 r_1 . \beta\beta_1 - s . \beta_1^2 = v$$

übergegangen, wo $\delta r_1 = \frac{1}{2}\delta R = m$, $\delta\beta_1 < \delta\beta$ und $\delta s < m$, $\delta s_1 < m$.

Man erhält nemlich diese Gleichung, wenn man

$$17) \quad \begin{cases} p_1 = t_1 . q + \beta \\ q = 2\mu . \beta + \beta_1 \end{cases}$$

setzt. t_1 ist durch die Gleichung

$$t = t_1^2 + t'_1, \text{ wo } \delta t'_1 < \delta t_1 \text{ und } t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$

bestimmt, μ aber durch die Gleichung

$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$

$$\text{wo } r^2 + r' = R_1 N, \; s = N t'_1 + R - N . t.$$

Ferner ist

$$18) \quad \begin{cases} r_1 = 2\mu . s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4 s \mu^2, \\ r_1^2 + s s_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Es kommt also nun auf die Gleichung (15.) an.

5.

Auflösung der Gleichung:

$$s_1 . \beta^2 - 2 r_1 \beta\beta_1 - s . \beta_1^2 = v,$$

$$\text{wo } \delta s < \delta r'_1, \; \delta s_1 < \delta r_1, \; \delta v < \delta r_1, \; \delta\beta_1 < \delta\beta.$$

Dividirt man die Gleichung

$$19) \quad s_1 . \beta^2 - 2 r_1 \beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v$$

mit $s_1 \beta_1^2$, so erhält man

$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2\frac{r_1}{s_1} . \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{v}{s_1\beta_1^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}.$$

Hieraus folgt, da $\delta\left(\frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}\right) < \delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right) = \pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

mithin
$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) . (1 \pm 1),$$
wo man das Zeichen + nehmen mufs, weil sonst $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)$ gleich Null sein würde, also
$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 2E\left(\frac{r_1}{s_1}\right);$$
daher, wenn man
$$\mathrm{E}\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$$
setzt,
$$\beta = 2\beta_1 . \mu_1 + \beta_2, \text{ wo } \delta\beta_2 < \delta\beta_1.$$
Substituirt man diesen Werth für β in die gegebene Gleichung, so kommt
$$s_1(\beta_2^2 + 4\beta_1\beta_2\mu_1 + 4\mu_1^2 . \beta_1^2) - 2r_1\beta_1(\beta_2 + 2\mu_1\beta_1) - s\beta_1^2 = v,$$
oder:
$$20)\quad s_2 . \beta_1^2 - 2r_2 . \beta_1 . \beta_2 - s_1 . \beta_2^2 = -v,$$
wo $r_2 = 2\mu_1 s_1 - r_1$, $s_2 = s + 4r_1\mu_1 - 4s_1\mu_1^2$.

Da $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$, so ist
$$r_1 = \mu_1 s_1 + E_1, \text{ wo } \delta E_1 < \delta s_1.$$
Dadurch erhält man
$$r_2 = r_1 - 2E_1$$
$$s_2 = s + 4E_1\mu_1,$$
also, wie leicht zu sehen,
$$\delta r_2 = \delta r_1, \delta s_2 < \delta r_2.$$

Die Gleichung (19.) hat folglich dieselbe Form wie die Gleichung (20.), und man kann also darauf dieselbe Operation anwenden, nemlich wenn man setzt
$$\mu_2 = E\left(\frac{r_2}{s_2}\right), \; r_2 = s_2\mu_2 + E_2, \beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3.$$
Dieses giebt
$$s_3 . \beta_2^2 - 2r_3\beta_2\beta_3 - s_2 . \beta_3^2 = +v,$$
wo
$$r_3 = 2\mu_2 s_2 - r_2 = r_2 - 2E_2,$$
$$s_3 = s_1 + 4r_2\mu_2 - 4s_2\mu_2^2 = s_1 + 4E_2\mu_2,$$
und $\delta\beta_3 < \delta\beta_2$.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man, nach $n-2$ Transformationen, die Gleichung:
$$21)\quad s_n . \beta^2_{n-1} - 2r_n . \beta_{n-1} . \beta_{n-2} - s_{n-1} . \beta^2_n = (-1)^{n-1} . v,$$
$$\text{wo } \delta\beta_n < \delta\beta_{n-1}.$$
Die Gröfsen s_n, r_n, β_n sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n \cdot \beta_n + \beta_{n+1},$$
$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$
$$r_n = 2\mu_{n-1} \cdot s_{n-1} - r_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-1} + 4r_{n-1}\mu_{n-1} - 4s_{n-1} \cdot \mu^2_{n-1},$$

wozu noch die folgenden hinzugefügt werden können:

$$r_n = \mu_n s_n + E_n,$$
$$r_n = r_{n-1} - 2E_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4E_{n-1} \cdot \mu_{n-1}.$$

Da nun die Zahlen

$$\delta\beta,\ \delta\beta_1,\ \delta\beta_2,\ \ldots\ldots\ldots\ \delta\beta_n,\ \text{etc.}$$

eine abnehmende Reihe bilden, so mufs man nach einer gewissen Zahl von Transformationen ein β_n finden, welches gleich Null ist. Es sei also

$$\beta_m = 0.$$

Alsdann giebt die Gleichung (21.), wenn man $n = m$ setzt:

$$22)\quad s_m \cdot \beta^2_{m-1} = (-1)^{m-1}\, v.$$

Dies ist die allgemeine Bedingungsgleichung für die Auflösbarkeit der Gleichung (19).

s_m hängt von den Functionen s, s_1, r_1 ab, und β_{m-1} mufs so genommen werden, dafs

$$\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r.$$

Die Gleichung (22.) zeigt an, dafs man für alle s, s_1 und r_1 unzählige Werthe von v finden kann, welche der Gleichung (19.) genug thun.

Setzt man in die gegebene Gleichung statt v seinen Werth $(-1)^{m-1} \cdot s_m \cdot \beta^2_{m-1}$, so erhält man

$$s_1 \cdot \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s \cdot \beta_1^2 = (-1)^{m-1} \cdot s_m \cdot \beta^2_{m-1},$$

welche Gleichung immer auflösbar ist.

Es ist leicht zu sehen, dafs β und β_1 den gemeinschaftlichen Factor β_{m-1} haben. Nimmt man daher an, dafs β und β_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben sollen, so ist β_{m-1} unabhängig von x. Man kann alsdann $\beta_{m-1} = 1$ setzen, und folglich hat man die Gleichung

$$s_1 \cdot \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1} s_m.$$

Die Functionen β, β_1, β_2, ... werden durch die Gleichung

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1}$$

bestimmt, wenn man der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots. m-1$ setzt, und bemerkt, dafs $\beta_m = 0$, nemlich:

$$\begin{aligned}
\beta_{m-2} &= 2\mu_{m-1} \cdot \beta_{m-1},\\
\beta_{m-3} &= 2\mu_{m-2} \cdot \beta_{m-2} + \beta_{m-1},\\
\beta_{m-4} &= 2\mu_{m-3} \cdot \beta_{m-3} + \beta_{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_3 &= 2\mu_4 \cdot \beta_4 + \beta_5,\\
\beta_2 &= 2\mu_3 \cdot \beta_3 + \beta_4,\\
\beta_1 &= 2\mu_2 \cdot \beta_2 + \beta_3,\\
\beta &= 2\mu_1 \cdot \beta_1 + \beta_2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\beta_1} &= 2\mu_1 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)},\\
\frac{\beta_1}{\beta_2} &= 2\mu_2 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} &= 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_{m-2}}\right)},\\
\frac{\beta_{m-1}}{\beta_{m-2}} &= 2\mu_{m-2},
\end{aligned}$$

folglich erhält man, durch auf einander folgende Substitutionen:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-2} + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

Man hat also die Werthe von β und β_1, wenn man diesen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt.

6.

Setzt man in die Gleichung

$$p_1^2 \cdot N - q^2 \cdot R_1 = v$$

für v seinen Werth $(-1)^{m-1} \cdot s_m$, so erhält man

$$p_1^2 \,.\, N - q^2 \,.\, R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

wo

$$q = 2\mu \,.\, \beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t^1 \,.\, q + \beta,$$

also

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\left(\frac{q}{\beta}\right)},$$

$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta},$$

folglich

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

Die Gleichung:

$$p_1^2 N - q^2 \,.\, R_1 = 0$$

giebt

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 \,.\, N},$$

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\left(\frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 N}\right)},$$

also, wenn man m unendlich grofs annimmt:

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

folglich hat man:

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

Man findet also die Werthe von p_1 und q für alle m, wenn man die Function $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ in einen Kettenbruch verwandelt *).

---

*) Die obige Gleichung drückt hier nicht eine absolute Gleichheit aus. Sie deutet nur auf eine abgekürzte Weise an, wie die Gröfsen t_1, μ, μ_1, μ_2, ... gefunden werden können. Sobald indessen der Kettenbruch einen Werth hat, ist derselbe immer gleich $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

7.

Es sei nun $v = a$, so ist

$$s_m = (-1)^{m-2} a.$$

Sobald also die Gleichung

$$p_1^2 N - q^2 . R_1 = a$$

auflösbar sein soll, so muſs wenigstens eine der Gröſsen

$$s,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ldots\ldots\ s_m \text{ etc.}$$

unabhängig von x sein.

Und umgekehrt: wenn eine dieser Gröſsen unabhängig von x ist, so ist es immer möglich zwei ganze Functionen p_1 und q zu finden, die dieser Gleichung genugthun. Wenn nemlich $s_m = a$, so hat man die Werthe von p_1 und q, wenn man den Kettenbruch

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt. Im Allgemeinen sind, wie leicht zu sehen, die Functionen s, s_1, s_2, etc. vom ($n - 1^{\text{ten}}$) Grade, wenn NR_1 vom $2n^{\text{ten}}$ ist. Die Bedingungs-Gleichung

$$s_m = a$$

giebt also $n - 1$ Gleichungen zwischen den Coefficienten der Functionen N und R_1, und daher kann man nur $n + 1$ dieser Coefficienten willkürlich annehmen; die übrigen sind durch die Bedingungs-Gleichungen bestimmt.

8.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun also, daſs man alle Werthe von R_1 und N findet, welche das Differential $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 . N}}$ durch einen Ausdruck von der Form

$$\log\left(\frac{p + q\sqrt{(R_1 . N)}}{p - q\sqrt{(R_1 . N)}}\right)$$

integrirbar machen, wenn man nach und nach die Gröſsen s, s_1, s_2 $\ldots\ldots$ s_m unabhängig von x setzt.

Da $p = p_1 N$, so ist auch

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right),$$

oder:

$$23)\quad \begin{cases} \int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{y\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{y\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right), \\ \text{wo} \\ y = \varrho + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}, \end{cases}$$

wenn man annimmt, dafs s_m = einer Constante ist.

Wenn nun R_1, N und p_1, q so bestimmt sind, so findet man ϱ durch die Gleichung (5.). Diese Gleichung giebt, wenn man $p_1 N$ statt p und ϱ statt $\frac{M}{N}$ setzt,

$$\varrho = \left(p_1 \frac{dN}{dx} + 2N \cdot \frac{dp_1}{dx}\right) : q.$$

Hieraus folgt, dafs:

$$\delta\varrho = \delta p_1 + \delta N - 1 - \delta q = \delta p - dq - 1.$$

Nun aber ist, wie man vorhin sahe, $\delta p + \delta q + n$, also

$$\delta\varrho = n - 1.$$

Wenn also die Function R oder $R_1 N$ vom $2n^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist die Function ϱ nothwendig vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade.

9.

Wir sahen oben, dafs

$$R = R_1 N$$

sein mufs; man kann aber immer annehmen, dafs die Function N constant ist. In der That ist

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right),$$

also auch

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1^2 N + R_1 + 2qp_1\sqrt{(R_1 N)}}{p_1^2 N + R_1 - 2qp_1\sqrt{(R_1 N)}}\right),$$

das heifst, wenn man

$$p_1^2 N + R_1 = p' \text{ und } 2p_1 q = q'$$

fetzt,

$$\int \frac{2\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}\right).$$

Es

Es ist klar, daſs p' und q' keinen gemeinschaftlichen Factor haben; also kann man immer

$$N = 1$$

setzen. Man hat also statt der Gleichung $p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$ folgende:

$$p'^2 - q'^2 . R = 1,$$

deren Auflösung man erhält, wenn man oben N gleich 1, und R statt R_1 setzt.

Da $N = 1$, so hat man, wie leicht zu sehen,

$$t = R;\quad t_1 = r;\quad R = r^2 + s,$$

folglich:

$$24)\quad \begin{cases} \frac{p'}{q'} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}, \\ R = r^2 + s, \\ \mu = E\left(\frac{r}{s}\right);\quad r = s.\mu + \varepsilon; \\ r_1 = r - \varepsilon,\quad s_1 = 1 + 4\varepsilon.\mu, \\ \mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right);\quad r_1 = s_1.\mu_1 + \varepsilon_1 \\ r_2 = r_1 - \varepsilon_1,\ s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),\ r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n, \\ r_{n+1} = r_n - \varepsilon_n,\ s_{n+1} = s_{n-1} + 4\varepsilon_n\mu_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{m-1} = E\left(\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right),\ r_{m-1} = \mu_{m-1}.s_{m-1} + \varepsilon_{m-1}, \\ r_m = r_{m-1} - \varepsilon_{m-1},\ s_m = s_{m-2} + \varepsilon_{m-1}\mu_{m-1} = a. \end{cases}$$

Wenn nun $R, r, \mu, \mu_1, \ldots\ldots \mu_{m-1}$ durch diese Gleichungen bestimmt sind, so hat man:

$$25)\quad \begin{cases} \int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}\right), \\ \text{wo}\quad \varrho = \frac{2}{q'} . \frac{dp'}{dx}, \end{cases}$$

wie aus der Gleichung hervorgeht, wenn man $N = 1$ setzt.

10.

Man kann dem Ausdrucke

$$\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)$$

eine einfachere Form geben; nemlich die Form

$$\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

Dieses läſst sich leicht, wie folgt, beweisen.

Wenn man setzt:

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m}=t_1+\cfrac{1}{2\mu_0+\cfrac{1}{2\mu_1+\ldots+\cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}},$$

so ist, wie aus der Theorie der Kettenbrüche bekannt,

$$\alpha_m=\alpha_{m-2}+2\mu_{m-1}\cdot\alpha_{m-1} \qquad (a)$$

$$\beta_m=\beta_{m-2}+2\mu_{m-1}\cdot\beta_{m-1} \qquad (b)$$

Diese Gleichungen geben durch Elimination von μ_{m-1}:

$$\alpha_m\cdot\beta_{m-1}-\beta_m\cdot\alpha_{m-1}=-(\alpha_{m-1}\cdot\beta_{m-2}-\beta_{m-1}\cdot\alpha_{m-2}),$$

also,

$$\alpha_m\cdot\beta_{m-1}-\beta_m\cdot\alpha_{m-1}=(-1)^{m-1};$$

wie bekannt.

Die beiden Gleichungen (a) und (b) geben ferner:

$$\alpha_m^2=\alpha_{m-2}^2+4\alpha_{m-1}\cdot\alpha_{m-2}\cdot\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\cdot\alpha_{m-1}^2,$$

$$\beta_m^2=\beta_{m-2}^2+4\beta_{m-1}\cdot\beta_{m-2}\cdot\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\cdot\beta_{m-1}^2.$$

Hieraus folgt

$$\alpha_m^2 N-\beta_m^2\cdot R_1$$

$$=\alpha_{m-2}^2 N-\beta_{m-2}^2\cdot R_1+4\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N-\beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1)+4\mu_{m-1}^2(\alpha_{m-1}^2 N-\beta_{m-1}^2 R_1).$$

Nun aber ist:

$$\alpha_m^2\cdot N-\beta_m^2\cdot R_1=(-1)^m\cdot s_m,$$

$$\alpha_{m-1}^2\cdot N-\beta_{m-1}^2\cdot R_1=(-1)^{m-1}\cdot s_{m-1},$$

$$\alpha_{m-2}^2\cdot N-\beta_{m-2}^2\cdot R_1=(-1)^{m-2}\cdot s_{m-2},$$

also, wenn man substituirt:

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m . (\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4s_{m-1}m^2_{\mu-1}.$$

Vermöge des Vorhergehenden aber ist

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} . r_{m-1} - 4s_{m-1} . m_{\mu-1},$$

folglich:

$$r_{m-1} = (-1)^m . (\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1).$$

Es sei

$$z_m = \alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1} \text{ und } z'_m = \alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1},$$

so erhält man, durch Multiplication:

$$z_m . z'_{m-1} = \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 + (\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m)\sqrt{(NR_1)}.$$

Es war aber, wie wir sahen,

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m = (-1)^{m-1},\ \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 = (-1)^{m-1} . r_m,$$

folglich ist

$$z_m z'_{m-1} = (-1)^{m-1}(r_m + \sqrt{R}),$$

und auf dieselbe Weise

$$z'_m . z_{m-1} = (-1)^{m-1}(r_m - \sqrt{R}).$$

Hieraus folgt, durch Division:

$$\frac{z_m}{z'_m} . \frac{z'_{m-1}}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

das heifst, wenn man mit $\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}$ multiplicirt,

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}} . \frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}.$$

Setzt man der Reihe nach

$$m = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots\ldots m,$$

so erhält man

$$\frac{z_1}{z'_1} = \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} . \frac{z_0}{z'_0},$$

$$\frac{z_2}{z'_2} = \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} . \frac{z_1}{z'_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_m}{z'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}} . \frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}:$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{z_0}{z_1} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_3 + \sqrt{R}}{r_3 - \sqrt{R}} \cdots\cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Nun aber ist

$$z_0 = \alpha_0 \sqrt{N} + \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1},$$
$$z'_0 = \alpha_0 \sqrt{N} - \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1},$$

und
$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

also

$$26) \quad \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}} = \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

und wenn man die Logarithmen nimmt,

$$26) \quad \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

wie zu beweisen war.

11.

Differentiirt man den Ausdruck $z = \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$, so erhält man nach den gehörigen Reductionen:

$$dz = \frac{2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m) N R_1 - \alpha_m \beta_m (R_1 dN - N dR_1)}{(\alpha_m^2 \cdot N - \beta_m^2 \cdot R_1) \cdot \sqrt{(N \cdot R_1)}}.$$

Nun ist

$$\alpha_m^2 \cdot N - \beta_m^2 \cdot R_1 = (-1)^{m-1} \cdot s_m.$$

also wenn man

$$27) \quad (-1)^{m-1} \cdot \varrho_m = 2\left(\alpha_m \frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m \frac{d\alpha_m}{dx}\right) N R_1 - \alpha_m \beta_m \frac{(R_1 dN - N dR_1)}{dx}$$

setzt,

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(N \cdot R_1)}},$$

$$\text{und } z = \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{s_m \sqrt{(N \cdot R_1)}},$$

folglich

$$\int \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right),$$

oder:

$$28)\quad \int \frac{\varrho_m}{s_m}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$=\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

In diesem Ausdruck ist s_m höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ und ϱ_m nothwendig vom $(n-1+\delta s_m)^{\text{ten}}$ Grade, wovon man sich auf folgende Weise überzeugen kann.

Differentiirt man die Gleichung

$$29)\quad \alpha_m^2 . N-\beta_m^2 . R_1=(-1)^{m-1} . s_m,$$

so findet man folgende:

$$2\alpha_m N d\alpha_m+\alpha_m^2 dN-2\beta_m d\beta_m R_1-\beta_m^2 dR_1=(-1^{m-1}ds_m,$$

oder, wenn man mit $\alpha_m N$ multiplicirt,

$$\alpha_m^2 N(2Nd\alpha_m+\alpha_m dN)-2\alpha_m\beta_m d\beta_m NR_1-\beta_m^2\alpha_m NdR_1=(-1)^{m-1}\cdot\alpha_m Nds_m.$$

Setzt man hier statt $\alpha_m^2 N$ seinen Werth aus der Gleichung (29), so erhält man

$$(-1)^{m-1} s_m (2Nd\alpha_m+\alpha_m dN)$$

$$+\beta_m\big(2NR_1\beta_m d\alpha_m+\alpha_m\beta_m R_1 dN-2\alpha_m d\beta_m NR_1-\beta_m\alpha_m NdR_1\big)=(-1)^{m-1}\alpha_m Nds_m,$$

das heifst:

$$\beta_m\big(2(\alpha_m d\beta_m-\beta_m d\alpha_m)NR_1-\alpha_m\beta_m(R_1dN-NdR_1)\big)$$
$$=(-1)^{m-1}\big(s_m(2Nd\alpha_m+\alpha_m dN)-\alpha_m Nds_m\big).$$

Nun ist, vermöge der Gleichung (27.), die Gröfse linker Hand gleich $\beta_m(-1)^{m-1}\varrho_m dx$, also hat man

$$30)\quad \beta_m . \varrho_m=s_m\left(\frac{2Nd\alpha_m}{dx}+\frac{\alpha_m dN}{dx}\right)-\alpha_m\frac{Nds_m}{dx}.$$

Weil nun $\delta s_m < n$, so ist die Function rechter Hand, wie leicht zu sehen, nothwendig vom $(\delta s_m+\delta N+\delta\alpha_m-1)^{\text{ten}}$ Grade; also

$$\delta\varrho_m=\delta s_m+\delta N+\delta\alpha_m-\delta\beta_m-1.$$

Aber aus der Gleichung folgt, dafs

$$2\delta\alpha_m+\delta N=2\delta\beta_m+\delta R_1,$$

also

$$d\varrho_m=\delta s_m+\frac{\delta N+\delta R_1}{2}-1,$$

oder, da $\delta N+\delta R_1=2n$,

$$\delta\varrho_m=\delta s_m+n-1,$$

das heifst: ϱ_m ist nothwendig vom $(\delta s_m+n-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Daraus folgt, dafs die Function $\frac{\varrho_m}{s_m}$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Setzt man in die Formel (28.) $N = 1$, so ist $t_1 = r$, und also

$$31)\ \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{s_m \sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo, zu Folge der Gleichung (30.),

$$\beta_m \cdot \varrho_m = 2 s_m \frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m \cdot \frac{ds_m}{dx}.$$

Setzt man in die Formel

$$s_m = \alpha,$$

so ist:

$$32)\ \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{\alpha \sqrt{R}} = \log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo

$$\beta_m \cdot \varrho_m = \alpha \cdot \left(2N \cdot \frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m \frac{dN}{dx}\right),$$

und wenn man $N = 1$ setzt,

$$33)\ \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo

$$\varrho_m = \frac{2}{\beta_m} \cdot \frac{d\alpha_m}{dx}.$$

Dem Obigen zu Folge ist diese Formel eben so allgemein als die Formel (30.), und giebt alle Integrale von der Form $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$, wo ϱ und R ganze Functionen sind, die sich durch eine logarithmische Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausdrücken lassen.

12.

In dem Ausdruck (28.) ist die Function $\frac{\varrho_m}{s_m}$ durch die Gleichung (30.) gegeben. Man kann aber diese Function auf eine bequemere Art, mit Hülfe der Gröfsen t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, μ_2, ... ausdrücken.

Man bezeichne die Function

$$\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right) \text{ durch } z_m,$$

so erhält man, wenn man das Differential nimmt,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2} \cdot \frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2} \cdot \frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

oder, wenn man reducirt,

$$dz_m = \frac{r_m \cdot dR - 2R\,dr_m}{r_m^2 - R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Nun ist, wie wir vorhin sahen,

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4\,s_{m-1} \cdot \mu^2_{m-1},$$

also, wenn man mit s_{m-1} multiplicirt,

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + 4\mu_{m-1}\, s_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4\,(s_{m-1}\,\mu_{m-1})^2,$$

das heifst:

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + r^2_{m-1} - (2s_{m-1}\,\mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Nun ist

$$r_m = 2\,s_{m-1}\,\mu_{m-1} - r_{m-1},$$

folglich, wenn man diese Gröfse substituirt,

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1}\, s_{m-2} + r^2_{m-1} - r^2_m,$$

woraus man man durch Transposition

$$r^2_m + s_m \cdot s_{m-1} = r^2_{m-1} + s_{m-1} \cdot s_{m-2}$$

findet.

Aus dieser Gleichung folgt, dafs $r^2_m + s_m \cdot s_{m-1}$ einen und denselben Werth für alle m hat, und dafs also auch

$$r^2_m + s_m\, s_{m-1} = r_1{}^2 + s \cdot s_1$$

ist. Wir sahen aber oben, dafs $r_1{}^2 + s s_1 = R$, also auch

$$34)\quad R = r^2_m + s_m\, s_{m-1}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für R in die Gleichung, so erhält man nach gehörigen Reductionen:

$$dz_m = \frac{2\,dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}.$$

Da nun

$$r_m = 2\,s_{m-1}\,\mu_{m-1} - r_{m-1}$$

ist, so geht das Glied $-\frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ in

$$-2\mu_{m-1} \cdot \frac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$$

über. Also erhält man

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1} \cdot ds_{m-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

und durch Integration

$$35)\ \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1}\, ds_{m-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}.$$

Dieser Ausdruck ist, wie man sieht, eine Reductions-Formel für die Integrale von der Form $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$. Sie giebt nemlich das Integral $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ durch ein anderes Integral von derselben Form und durch ein Integral von der Form $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{R}}$, wo t eine ganze Function ist.

Setzt man nun in diese Formel statt m der Reihe nach $m-1, m-2, \ldots \ldots 3, 2$, so erhält man $m-1$ ähnliche Gleichungen, welche addirt, folgende geben, wenn man bemerkt, dafs r_0 dasselbe ist wie $2s\mu - r_1$, das heifst, vermöge der Gleichung

$$r_1 + t_1 N = 2s\mu,$$

dasselbe wie $-t_1 N$:

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots + z_m) - \int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$$
$$+ \int 2\,(dr_1 + dr_2 + dr_3 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \mu_2 ds_2 \ldots - \mu_m ds_m) \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Man kann nun ferner das Integral $\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$ reduciren. Differentiirt man nemlich den Ausdruck

$$z = \log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right),$$

so erhält man nach einigen Reductionen:

$$dz = \frac{-2dt_1 N R_1 - t_1(R_1 dN - N dR_1)}{(t_1^2 N - R_1)\sqrt{R}}.$$

Nun ist

$$R_1 = t_1^2 N + s.$$

Substituirt man also in die obige Gleichung statt R_1 diesen Ausdruck, so findet man

$$dz = (2N dt_1 + t_1 dN) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}},$$

folglich, wenn man integrirt,

$$\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2N dt_1 + dN t_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Da-

Dadurch geht der Ausdruck für $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ in folgenden über:

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -\left(z + z_1 + z_2 + \ldots\ldots\ldots + z_m\right)$$

$$+\int 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \mu_2 ds_2 - \ldots - \mu_m ds_m\right),$$

das heifst, wenn man statt z, z_1, z_2 ...... ihre Werthe setzt:

$$36)\quad \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$$

$$= \int 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_m ds_m\right),$$

$$-\log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) - \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right).$$

Diese Formel ist ganz dieselbe wie die Formel (28), und giebt:

$$37)\quad \frac{\varrho_m}{s_m} = -\frac{r_m ds_m}{s_m} + 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 \ldots - \mu_m ds_m\right).$$

Der obige Ausdruck erspart aber die Berechnung der Functionen α_m und β_m.

Wenn nun s_m unabhängig von x ist, so verschwindet das Integral $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$, und man erhält folgende Formel:

$$38)\quad \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(\tfrac{1}{2}t_1 dN + Ndt_1 + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}\right)$$

$$+\log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m + \sqrt{R}}\right).$$

Wenn in dem Ausdruck (16.) $N = 1$, so ist $t_1 = r$, und folglich:

$$39)\quad \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = \int 2\left(dr + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_m ds_m\right)$$

$$-\log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) - \ldots\ldots - \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

und wenn man hier $s_m = a$ setzt:

$$40)\quad \left\{\begin{aligned} &\int 2\left(dr + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}\right) \\ &= \log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right). \end{aligned}\right.$$

Dem Obigen zu Folge hat diese Formel dieselbe Allgemeinheit wie (38.), und giebt daher alle Integrale von der Form $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{R}}$, wo t eine **ganze** Function ist, die durch eine Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausgedrückt werden kann.

13.

Wir sahen oben, daſs

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

also, wenn man $N = 1$ setzt:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \dots}}}}$$

Im Allgemeinen sind die Gröſsen μ, μ_1, μ_2, ... μ_3 von einander verschieden. Wenn aber eine der Gröſsen s, s_1, s_2, ... s_m unabhängig von x ist, so wird der Kettenbruch **periodisch**. Dieses kann man auf folgende Art beweisen:

Es ist

$$r_{m+1}^2 + s_m \,.\, s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

also, wenn $s_m = a$,

$$r_{m+1}^2 - r^2 = s - a\, s_{m+1} = (r_{m+1} + r)\,(r_{m+1} - r).$$

Nun ist $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$, folglich kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht zu gleicher Zeit

$$r_{m+1} = r,\; s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Da nun

$$\mu_{m+1} = E\left(\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right),$$

so ist auch

$$\mu_{m+1} = a \,.\, E\left(\frac{r}{s}\right),$$

das heiſst, weil $E\left(\frac{r}{s}\right) = \mu$,

$$\mu_{m+1} = a\mu.$$

Es ist ferner

$$s_{m+2} = s_m + 4\mu_{m+1}r_{m+1} - 4\mu^2_{m+1}\cdot s_{m+1};$$

das heifst, weil $s_m = a$, $r_{m+1} = r$, $\mu_{m+1} = a\mu$,

$$s_{m+2} = a(1 + 4\mu r - 4\mu^2 s);$$

folglich, da $s_1 = 1 + 4\mu r - 4\mu^2 s$,

$$s_{m+2} = a s_1.$$

Nun ist

$$r_{m+2} = 2\mu_{m+1}s_{m+1} - r_{m+1} = 2\mu s - r,$$

also, da $r_1 = 2\mu s - r$,

$$r_{m+2} = r_1.$$

Daraus folgt ferner

$$\mu_{m+2} = \pm E\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}} = \frac{1}{a}E\frac{r_1}{s_1},$$

also:

$$\mu_{m+2} = \frac{\mu_1}{a}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so ist leicht zu sehen, dafs allgemein:

$$41)\quad \begin{cases} r_{m+n} = r_{n-1}, \quad s_{m+n} = a^{\pm 1}\cdot s_{n-1} \\ \mu_{m+n} = a^{\pm 1}\cdot\mu_{n-1}. \end{cases}$$

Das Zeichen + mufs genommen werden, wenn n gerade ist, und das Zeichen —, wenn n ungerade ist.

Setzt man in die Gleichung

$$r_m^2 + s_{m-1}\,s_m = r^2 + s$$

a statt s_m, so erhält man

$$(r_m - r)(r_m + r) = s - a\cdot s_{m-1}.$$

Hieraus folgt

$$r_m = r,\ s_{m-1} = \frac{s}{a}.$$

Nun ist $\mu_m = E\left(\frac{r_m}{s_m}\right)$, also

$$\mu_m = \frac{1}{a}\cdot E(r),$$

das heifst

$$\mu_m = \frac{1}{a}\cdot r.$$

Ferner hat man

$$r_m + r_{m-1} = 2s_{m-1} \cdot \mu_{m-1},$$

das heifst, da $r_m = r$, $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \cdot \mu_{m-1}.$$

Aber $r + r_1 = 2s\mu$, also

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu).$$

Nun ist

$$r_{m-1}^2 + s_{m-1} \cdot s_{m-2} = r_1^{\,2} + s \cdot s_1,$$

das heifst, weil $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$(r_{m-1} + r_1)(r_{m-1} - r_1) = \frac{s}{a}(as_1 - s_{m-2}).$$

Wir sahen aber, dafs

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu),$$

also, wenn man substituirt,

$$2(r_{m+1} + r_1)(\mu_{m-1} - a\mu) = as_1 - s_{m-2}.$$

Da nun $\delta(r_{m+1} + r_1) > \delta(as_1 - s_{m-1})$, so giebt diese Gleichung

$$\mu_{m-1} = a\mu,\ s_{m-1}\ as_1,$$

folglich auch

$$r_{m-1} = r_1.$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man leicht:

$$r_{m-2} = r_2,\ s_{m-3} = \frac{1}{a} \cdot s_2,\ \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

und allgemein:

$$42)\ \begin{cases} r_{m-n} = r_{n-1},\ s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \\ \mu_{m-n} = a^{\pm 1} \cdot \mu_{n-1}. \end{cases}$$

14.

Es sei nun:

A) m eine gerade Zahl, $= 2k$

In diesem Falle ist leicht zu sehen, dafs, vermöge der Gleichungen (41.) und (42.), die Gröfsen $r, r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots s, s_1, s_2 \ldots\ldots \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots\ldots$ folgende Reihen bilden:

0	1	2	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$ ...	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+4$
r	r_1	r_2	r_2	r_2	r	r	r_1 ...	r_2	r_1	r	r	r_1	r_2 etc.
s	s_1	s_2	as_1	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	as_1 ...	s_1	s	1	s	s_1	s_2 etc.
μ	μ_1	μ_2	$\frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a}$ ...	μ_1	μ	r	μ	μ_1	μ_2 etc.

B) Es sei m eine ungerade Zahl, $= 2k - 1$.

In diesem Falle geben die Gleichungen

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \text{ und } s_{2k-n-1} = a^{\pm 1} s_{n-1}$$

für $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} s_{k-1},$$

folglich

$$a = 1.$$

Die Gröfsen r, r_1 etc. s, s_1 etc. μ, μ_1 etc. bilden also folgende Reihen:

0	1	2	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$ etc.
r	r_1	r_2	r_{k-2}	r_{k-1}	r_{k-1}	r_{k-2}	r_1	r	r	r_1	r_2 etc.
s	s_1	s_2	s_{k-2}	s_{k-1}	s_{k-2}	s_{k-3}	s	1	s	s_1	s_2 etc.
μ	μ_1	μ_2	μ_{k-2}	μ_{k-1}	μ_{k-2}	μ_{k-3}	μ	r	μ	μ_1	μ_2 etc.

Hieraus siehet man, dafs wenn eine der Gröfsen s, s_1, s_2 .... unabhängig von x ist, so ist der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch immer periodisch, und hat allgemein folgende Form, wenn $s_m = a$,

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2r}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \text{etc.} + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \ldots}}}}}}}}}}$$

Wenn m ungerade ist, so hat man überdem $a = 1$, und alsdann

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Das Umgekehrte findet ebenfalls Statt; das heifst: wenn der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch die obige Form hat, so ist s_m unabhängig von x. Denn es sei

$$\mu_m = \frac{r}{a},$$

so hat man, da

$$r_m = s_m \cdot \mu_m + \varepsilon_m,$$

$$r_m = \frac{r}{a} \cdot s_m + \varepsilon_m.$$

Da nun $r_m = r_{m-1} + \varepsilon_{m-1}$, wo $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, so ist klar, dafs auch

$$r_m = r + \gamma_m, \text{ wo } \delta\gamma_m < \delta r.$$

Dadurch wird die Gleichung

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

folglich:

$$s_m = a;$$

wie zu beweisen war.

Verbindet man nun dieses mit dem Vorhergehenden, so findet man folgenden Satz:

„Wenn es möglich ist, für ϱ eine ganze Function von der Art zu finden, dafs

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right),$$

„so wird der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch periodisch sein, und folgende „Form haben:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \dots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

„und umgekehrt, wenn der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch diese Form hat, so „ist es immer möglich, für ϱ eine ganze Function zu finden, die der Gleichung

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right)$$

„genugthut. Die Function y ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \dots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}}}.$$

In diesem Satz ist die vollständige Auflösung der im Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe enthalten,

15.

Wir haben gesehen, dafs wenn s_{2k-1} unabhängig von x ist, allemal $s_k = s_{k-1}$, und wenn s_{2k} unabhängig von x ist, $s_k = c s_{k-1}$ ist, wo c constant ist. Das Umgekehrte findet ebenfalls Statt, wie sich auf folgende Art beweisen läfst:

I. Es sei zuerst $s_k = s_{k-2}$,

Es ist

$$r_{k-1}^2 + s_{k-1}\, s_{k-2} = r_k^2 + s_k \cdot s_{k-1},$$

also, da $s_k = s_{k-2}$,

$$r_k = r_{k-1}.$$

Nun ist

$$r_k \;\;= \mu_k \;\;\cdot s_k \;\;+ \varepsilon_k,$$
$$s_{k-2} = \mu_{k-2} \cdot s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

folglich

$$r_k - r_{k-2} = s_k\,(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Aber

$$r_k = r_{k-1}, \quad r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

folglich, wenn man substituirt,

$$0 = s_k\,(\mu_k - \mu_{k+2}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Diese Gleichung giebt, wenn man bemerkt, dafs: $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$; $\delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Ferner ist $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, also, vermöge der letzten Gleichung,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

das heifst, weil $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$,

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

Nun ist

$$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-2} + s_{k-2} \cdot s_{k-3},$$

also, da $r_{k+1} = r_{k-2}$, $s_k = s_{k-2}$, auch

$$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen

$$r_{k+1} = \mu_{k+1} \cdot s_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \quad \text{und} \quad r_{k-3} = \mu_{k-3} \cdot s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$

so erhält man

$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1}\,(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$

Nun aber ist

$$r_{k+1} = r_{k-2} \text{ und } r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3},$$

folglich

$$0 = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$

Hieraus folgt

$$\mu_{k+1} = \mu_{k-3}, \quad \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ist leicht zu sehen, dafs allgemein:

$$r_{k+n} = r_{k-n-1}, \quad \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2}, \quad s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

Setzt man in die letzte Gleichung $n = k - 1$, so findet man

$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Nun ist klar, dafs s_{-1} dasselbe ist wie 1; denn es ist allgemein

$$R = r_m^2 + s_m \cdot s_{m-1},$$

also, wenn $m = 0$,

$$R = r^2 + s \cdot s_{-1}.$$

Aber $R = r^2 + s$, folglich $s_{-1} = 1$, und also auch

$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Es sei zweitens $s_k = c s_{k-1}$.

Es ist

$$r_k = \mu_k \cdot s_k + \varepsilon_k \text{ und } r_{k-1} = \mu_{k-1} \cdot s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

folglich:

$$r_k - r_{k-1} = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

Nun ist $r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}$, folglich

$$0 = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Diese Gleichung giebt

$$\mu_k = \frac{1}{c} \cdot \mu_{k-1}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Da nun

$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}, \quad r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$

so erhält man durch Addition

$$r_{k+1} = r_{k-1}.$$

Ferner ist

$$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-1}^2 + s_{k-1} \cdot s_{k-2},$$

also, da $r_{k+1} = r_{k-1}$, $s_k = c\, s_{k-1}$,

$$s_{k+1} = \frac{1}{c} \cdot s_{k-2}.$$

Fährt

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$s_{2k} = c^{\pm 1},$$

also, s_{2k} unabhängig von x.

Diese Eigenschaft der Gröfsen s, s_1, s_2 etc. zeigt, dafs die Gleichung $s_{2k}=a$ mit $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$, und die Gleichung $s_{2k-1} = 1$ mit $s_k = s_{k-2}$ identisch ist. Wenn man also die zu $s_{2k} = a$ gehörige Form der Function R sucht, so kann man statt $s_{2k} = a$, $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$ setzen, und wenn man die zu der Gleichung $s_{2k} = 1$ gehörige Form sucht, so ist es hinreichend, $s_k = s_{k-2}$ zu setzen; was die Rechnung sehr abkürzt.

16.

Vermöge der Gleichungen (41.) und (42.) kann man dem Ausdrucke (40.) eine einfachere Form geben.

Man erhält nemlich:

a) Wenn m gerade und $= 2k$ ist:

$$43)\ \begin{cases} \int 2(dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} + \frac{1}{2} dr_k - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-1} ds_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}\right). \end{cases}$$

b) Wenn m ungerade und $= 2k - 1$ ist:

$$44)\ \begin{cases} \int 2(dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-2} ds_{k-2} - \frac{1}{2}\mu_{k-1} ds_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right). \end{cases}$$

17.

Um das Obige auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir das Integral

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{(x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)}}$$

nehmen.

Hier ist $\delta R = 4$, also sind die Functionen s, s_1, s_2, s_3 ...... vom ersten Grade, und folglich giebt die Gleichung $s_m =$ Const. nur eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Gröfsen α, β, γ, δ, ε.

Wenn man

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + a x + b)^2 + c + e x$$

setzt, so hat man:

$$r = x^2 + ax + b, \quad s = c + ex.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir $c = 0$ setzen.

Alsdann ist

$$s = ex, \text{ und folglich}$$

$$\mu = E\left(\frac{r}{s}\right) = E\left(\frac{x^2 + ax + b}{ex}\right),$$

das heiſst:

$$\mu = \frac{x}{e} + \frac{a}{e}, \quad \varepsilon = b.$$

Ferner

$$r_1 = r - 2\varepsilon = x^2 - ax + b - 2b = x^2 + ax - b,$$

$$s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu = 1 + 4b \cdot \frac{x + a}{e} = \frac{4b}{e} \cdot x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = E\left\{\frac{x^2 + ax - b}{\frac{4b}{e} \cdot x + \frac{4ab}{e} + 1}\right\} = \frac{e}{4b} \cdot x - \frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1 = r_1 - \mu_1 s_1 = \frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b,$$

$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1 = \left(\frac{ae^2}{4b^2} + \frac{e^3}{16b^3}\right)x - \frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b\right).$$

Es sei nun

Erstens: $s_1 = \text{constant}$.

Alsdann giebt die Gleichung

$$s_1 = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$b = 0,$$

folglich

$$R = x^2 + ax,$$

$$\int 2(dr - \tfrac{1}{2}\mu ds)\frac{1}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right),$$

das heiſst, weil $\mu = \frac{x + a}{e}$, $s = ex$,

$$\int \frac{(3x + a)\,dx}{\sqrt{((x^2 + ax)^2 + ex)}} = \log\left(\frac{x^2 + ax + \sqrt{R}}{x^2 + ax - \sqrt{R}}\right).$$

Dieses Integral findet man auch leicht, wenn man Zähler und Nenner des Differentials mit x multiplicirt.

Zweitens: Es sei $s_2 = \text{constant}$.

In diesem Fall giebt die Formel, weil $k = 1$,

$$\int 2(dr + \tfrac{1}{2} dr_1 - \mu ds)\frac{1}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right).$$

Nun aber giebt $s_2 = \text{Const.}$, $s_1 = cs$, also

$$\frac{4b}{e} \cdot x + \cdot \frac{4ab}{e} + 1 = cex,$$

folglich die Bedingungs-Gleichung $\frac{4ab}{e} + 1 = 0$, das heiſst:

$$e = -4ab,$$

folglich

$$R = (x^2 + ax + b)^2 - 4abx.$$

Da nun ferner $\mu = \frac{x + a}{e}$, $r = x^2 + ax + b$, $r_1 = x^2 + ax - b$, so wird die Formel:

$$\int \frac{(4x + a)\, dx}{\sqrt{\left((x^2 + ax + b)^2 - 4abx\right)}} = \log\left(\frac{x^2 + ax + b + \sqrt{R}}{x^2 + ax + b - \sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 + ax - b + \sqrt{R}}{x^2 + ax - b - \sqrt{R}}\right),$$

Drittens: Es sei $s_3 = \text{Const.}$

Diese Gleichung giebt $s = s_2$, das heiſst:

$$\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b = 0.$$

Hieraus findet man

$$e = -2b\left(a \pm \sqrt{\left(a^2 + 4b\right)}\right).$$

Die Formel (44.) giebt folglich, weil $k = 2$,

$$\int \frac{\left(5x + \tfrac{3}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4b)}\right) . dx}{\sqrt{\left((x^2 + ax + b)^2 - 2b\left(a \pm \sqrt{\left((a^2 + 4b\right)} . x\right)\right)}}$$

$$= \log\left(\frac{x^2 + ax + b + \sqrt{R}}{x^2 + ax + b - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{x^2 + ax - b + \sqrt{R}}{x^2 + ax - b - \sqrt{R}}\right).$$

Ist z. B. $a = 0$, $b = 1$, so erhält man folgendes Integral:

$$\int \frac{(5x - 1) . dx}{\sqrt{\left((x^2 + 1)^2 - 4x\right)}}$$

$$= \log\left(\frac{x^2 + 1 + \sqrt{\left((x^2 + 1)^2 - 4x\right)}}{x^2 + 1 - \sqrt{\left((x^2 + 1)^2 - 4x\right)}}\right) + \log\left(\frac{x^2 - 1 + \sqrt{\left((x^2 + 1)^2 - 4x\right)}}{x^2 - 1 - \sqrt{\left((x^2 + 1)^2 - 4x\right)}}\right).$$

Viertens: Es sei $s_4 = \text{Const.}$

Dieses giebt $s_2 = cs_1$, das heiſst:

$$\left(\frac{ae^2}{b^2}+\frac{e^3}{4b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}.x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right).c.$$

Hieraus erhält man, wenn man die Coefficienten vergleicht und nachher c eliminirt,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$

$$(e+4ab)^2=16b^3-e(e+4ab),$$

$$e^2+6ab.e=8b^3-8a^2b^2,$$

$$e=-3ab\mp\sqrt{(8b^3+a^2b^2)}=-b\left((3a\pm\sqrt{(a^2+8b)}\right).$$

Vermöge dieses Ausdrucks giebt die Formel (43.)

$$\int\frac{\left(6x+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+8b)}\;dx\right)}{\sqrt{\left((x^2+ax+b)^2-b(3a+\sqrt{(a^2+8b)}x\right)}}=\log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right)$$

$$+\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right)+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+ax+\frac{3}{4}\left(a-\sqrt{(a^2+8b)}\right)+\sqrt{R}}{x^2+ax+\frac{3}{4}\left(a-\sqrt{(a^2+8b)}\right)-\sqrt{R}}\right).$$

Setzt man z. B. $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, so bekommt man:

$$\int\frac{(x+\frac{1}{6})\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}=\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right)$$

$$+\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right)+\tfrac{1}{12}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^2-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right).$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und noch mehrere Integrale finden. So z. B. läfst sich das Integral

$$\int\frac{(x+\frac{1}{7}).dx}{\sqrt{\left(\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2.x\right)}}$$

durch Logarithmen ausdrücken.

Wir haben hier die Integrale von der Form $\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ gesucht, die sich durch eine logarithmische Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausdrücken lassen.

Man könnte das Problem noch allgemeiner machen, und allgemein alle Integrale von einerlei Form suchen, die sich auf irgend eine Weise durch Logarithmen ausdrücken lassen; allein man würde keine neue Integrale finden. Es findet nemlich folgendes merkwürdige Theorem Statt:

„Wenn ein Integral von der Form

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}},$$

„wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, durch Logarithmen ausgedrückt „werden kann, so kann man es immer auch folgender Maßsen ausdrücken:

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log\left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right).$$

„wo A constant ist und p und q ganze Functionen von x sind."

Dieses Theorem werde ich bei einer andern Gelegenheit beweisen.

20.

Bemerkung über die Lagrangische Interpolations-Formel.

(Von. Herrn Prof. *Dirksen.*)

Bekanntlich kommt die Bildung der Lagrangischen Interpolations-Formel auf die Lösung von folgendem analytischen Probleme zurück:

Man wünscht eine algebraische ganze, die $(n-1)^{te}$ Ordnung nicht übersteigende, Function von x, die hier, der Kürze wegen, mit $f(x)$ bezeichnet werden mag, zu finden, so beschaffen, daſs sie die Werthe $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_\mu \ldots\ldots A_{n-1}$ liefere, wenn man darin für x nach und nach die n Werthe $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_\mu \ldots\ldots a_{n-1}$ substituirt.

Der Forderung nach ist

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + \ldots\, M_\mu x^\mu + \ldots\, M_{n-1} x^{n-1}$$

eine algebraische ganze Function von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung; und da das Product aus den n Factoren

$$x - a_0,\; x - a_1.\; x - a_2, \ldots\ldots x - a_\mu, \ldots\ldots x - a_{n-1},$$

die Gröſse $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_\mu)\ldots\ldots(x-a_{n-1})$ namentlich, eine eben solche Function von der n^{ten} Ordnung ist: so wird, der Theorie der Zerfällung gebrochener Functionen gemäſs, der Bruch:

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1})}$$

gleich $\dfrac{C_0}{x-a_0} + \dfrac{C_1}{x-a_1} + \dfrac{C_2}{x-a_2} + \dfrac{C_3}{x-a_3} + \ldots \dfrac{C_\mu}{x-a_\mu} + \ldots \dfrac{C_{n-1}}{x-a_{n-1}}$