

Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.*)

II. Mitteilung.

Von

A. MAYER in Leipzig.

Bei meiner ersten Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz**) hatte ich nur den einen Zweck im Auge, für das vorgelegte Problem der Variationsrechnung diejenige bestimmte Form dieses Satzes zu gewinnen, welche die Weierstraßsche E -Funktion auf das besondere Extremalenfeld bezieht, das unmittelbar zu dem Jacobischen Kriterium der konjugierten Punkte führt.***) Erst vor kurzem fiel mir auf, daß diese besondere, allerdings aber auch besonders wichtige Form des Satzes im wesentlichen darauf hinausläuft, daß man die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung des Problems durch die Jacobi-Hamiltonsche Methode vollständig integriert. Damit wurde mir aber auch sofort von vornherein klar, daß man zur allgemeinen Lösung derjenigen Hilbertschen Aufgabe, auf deren Erledigung sich der Unabhängigkeitssatz gründet†), müsse kommen können, sobald man nur die allgemeine Cauchysche Methode††) an Stelle jener speziellen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung des Problems benutzt, und die Durchführung dieses Gedankens zeigte, daß die so erhaltene Lösung in der Tat alle möglichen Lösungen jener Aufgabe umfaßt, ja sogar allgemeiner ist als

*) Etwas veränderter Abdruck aus den Leipziger Berichten vom 1. Mai 1905.

**) Diese Annalen, Bd. 58, p. 235—248.

***) Vergl. Bolza, Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904, p. 91, 60, 82. Die Überschrift des § 3 in meiner ersten Note ist hiernach nicht richtig gewählt und mußte vielmehr etwa so lauten: „Loslösung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes von der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung“.

†) Ich habe früher die Lösung dieser Aufgabe geradezu als identisch mit dem Unabhängigkeitssatz selbst betrachtet, weil dieser unmittelbar aus ihr folgt. Es ist aber doch klarer und auch richtiger, beides auseinanderzuhalten.

††) Vergl. diese Annalen, Bd. 3, p. 447/8.

der Unabhängigkeitssatz selbst. Diese Resultate sollen unabhängig von den früheren, und ohne die Cauchysche Methode als bekannt voraussetzen, im folgenden entwickelt werden.

§ 1.

Der Zusammenhang des Problems der Variationsrechnung mit dem Probleme von Hilbert.

Wie früher handelt es sich auch jetzt wieder um das Problem der Variationsrechnung:

I. *Unter allen Funktionen y_1, \dots, y_n von x , die $r < n$ gegebenen, nach r von den Differentialquotienten y_1', \dots, y_n' auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$(1) \quad f_\varrho(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste Werte besitzen, und zwischen diesen Grenzen stetig bleiben, diejenigen zu finden, für welche das vorgelegte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

einen größten oder kleinsten Wert erreicht.

Dieses Problem wird gelöst durch die $n + r$ Differentialgleichungen:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0,$$

in denen

$$(3) \quad \Omega \equiv f + \sum_1^r \lambda_\varrho f_\varrho$$

ist, und möglich und bestimmt kann es nur dann sein, wenn die $n + r$ Gleichungen:

$$(4) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = v_i, \quad f_\varrho = 0$$

auflösbar sind nach den $n + r$ Unbekannten:

$$y_1', \dots, y_n', \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r.$$

Es seien:

$$(5) \quad \begin{cases} y_i' = p_i(x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n), \\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

diese Auflösungen, und durch ihre Substitution werde:

$$(6) \quad \sum_1^n y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} - \Omega = H(x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n).$$

Mit dieser Gleichung genügen dann die Werte (5) zugleich auch identisch den Gleichungen:

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Die Einführung der Variablen v an Stelle der Differentialquotienten y' und der Multiplikatoren λ verwandelt daher die Differentialgleichungen (2) in die $2n$ kanonischen Differentialgleichungen:

$$(7) \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Aus jedem System Lösungen:

$$y_i = y_i(x), \quad \lambda_\rho = \lambda_\rho(x)$$

der Differentialgleichungen (2) erhält man hiernach, indem man dasselbe in die Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

substituiert, ein entsprechendes System Lösungen

$$y_i = y_i(x), \quad v_i = v_i(x)$$

der Differentialgleichungen (7), und umgekehrt liefert jedes System Lösungen dieser letzteren Differentialgleichungen, wenn man es in die r letzten Gleichungen (5) einsetzt, wieder ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2), *welches für die betreffenden Lösungen der Differentialgleichungen (7) zugleich den Gleichungen (5) identisch genügt.*

Dies vorausgeschickt, zeige ich durch Einschließung in $||$ an, daß statt:

$$y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_r$$

geschrieben werden soll:

$$p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r,$$

definiere also:

$$(3') \quad |\Omega| \equiv |f| + \sum_1^r \mu_\rho |f_\rho|$$

und allgemein:

$$|f_\sigma| \equiv f_\sigma(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n),$$

und will nun den Zusammenhang untersuchen, in welchem das Problem I zu der folgenden Hilbertschen Aufgabe steht:

II. Die Variablen $p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r$ als Funktionen von x, y_1, \dots, y_n so zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$(8) \quad |\Omega| + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i},$$

in welchem y_1, \dots, y_n als unbestimmte Funktionen von x zu betrachten sind, ein vollständiger Differentialquotient wird, und zugleich den r Bedingungen:

$$(1') \quad |f_\varrho| = 0$$

identisch genügt werde.

Ist (8) ein vollständiger Differentialquotient, so existiert eine Funktion V von x, y_1, \dots, y_n , für welche:

$$(9) \quad |\Omega| + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{dV}{dx}$$

wird, und die man aus diesem Ansatz durch eine bloße Quadratur findet.

Die Forderung (9) aber zerfällt in die $1 + n$ identisch zu erfüllenden Bedingungen:

$$(10) \quad |\Omega| - \sum_1^n p_i \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(11) \quad \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}.$$

Verbunden mit den r Bedingungsgleichungen (1') bestimmen nun die n Gleichungen (11)

$$p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r$$

als Funktionen von:

$$x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n},$$

und zwar ergeben sie der Bedeutung der Gleichungen (5) zufolge:

$$(5') \quad \begin{cases} p_i = p_i \left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n} \right), \\ \mu_\varrho = \mu_\varrho \left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n} \right). \end{cases}$$

Nach der Definition (6) der Funktion H führt überdies die Substitution dieser Werte die Gleichung (10) über in die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen V und den $n + 1$ unabhängigen Variablen x, y_1, \dots, y_n :

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + H \left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n} \right) = 0.$$

Damit ist unmittelbar der Satz gewonnen:

III. Aus jedem Funktionensystem $p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r$, welches die Aufgabe II löst, erhält man durch eine bloße Quadratur eine solche Lösung V

der partiellen Differentialgleichung (12), mit der jene Funktionen durch die Relationen (5') verbunden sind. Und umgekehrt liefert jede Lösung V dieser partiellen Differentialgleichung, substituiert in die Gleichungen (5'), ein System Lösungen des Problems II.

Weiter hat der Ausdruck (8) die Form:

$$|\Omega| + \sum_1^n (y'_h - p_h) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h} \equiv B + \sum_1^n B_h y'_h.$$

Jedes System von Funktionen p und μ , das der Forderung (9) genügt, muß daher die $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen identisch erfüllen:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} = 0.$$

Von diesen kann man wegen der letzten die n ersten ersetzen durch die folgenden n :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n p_h \left(\frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Es ist aber:

$$B_h \equiv \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h}$$

und, indem die partiellen Differentialquotienten der Funktionen p_h sich von selbst wegheben:

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ |\Omega| - \sum_1^n p_h \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h} \right\} \equiv \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i} + \sum_1^r \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i} |f_\varrho| - \sum_1^n p_h \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h}.$$

Infolge der weiter noch vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1') lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen des Ausdrucks (8) so schreiben:

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} + \sum_1^n p_h \frac{\partial}{\partial y_h} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i},$$

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial y_h} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h},$$

und durch Ausführung der zweiten partiellen Differentiationen werden die n ersten von ihnen:

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial x} + \sum_1^n p_h \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial y_h} + \sum_1^n \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_1^n p_k \frac{\partial p_k}{\partial y_h} \right) \\ & + \sum_1^r \frac{\partial |f_\varrho|}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \mu_\varrho}{\partial x} + \sum_1^n p_h \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_h} \right) = \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i}. \end{aligned} \right.$$

Verknüpft man andererseits die Funktionen $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ von x mit irgend einem System Lösungen des Problems II durch die $n + r$ Gleichungen:

$$(15) \quad y'_k = p_k \quad \text{und} \quad (16) \quad \lambda'_q = \mu_q,$$

so liefert die Differentiation dieser Gleichungen zugleich:

$$y''_k = \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial p_k}{\partial y_h} p_h,$$

$$\lambda'_q = \frac{\partial \mu_q}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \mu_q}{\partial y_h} p_h;$$

überdies gehen $|\Omega|$ und $|f_q|$ wieder über in die ursprünglichen Funktionen Ω und f_q , und die Bedingungen (13') werden daher:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial x} + \sum_1^n \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_h} y'_h + \sum_1^n \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_k} y''_k + \sum_1^r \frac{\partial f_q}{\partial y_i} \lambda'_q = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i},$$

d. h. diese Bedingungen und die Bedingungen (1') verwandeln sich in die Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_q = 0.$$

So oft also in den Gleichungen (15) und (16) $p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r$ solche Funktionen von x, y_1, \dots, y_n sind, welche die Bedingungen (1') und (13) identisch erfüllen, sind zugleich diejenigen Funktionen $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ von x , die man durch vollständige Integration der n Differentialgleichungen (15) und Substitution der Lösungen in die Gleichungen (16) erhält, Lösungen mit n willkürlichen Konstanten der Differentialgleichungen des Problems I.

Aus Satz III folgt hiernach sofort weiter:

IV. Jeder Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12) gehört ein System Lösungen $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen (2) mit n willkürlichen Konstanten zu, in bezug auf welche die Lösungen y_1, \dots, y_n voneinander unabhängig sind, und dieses System Lösungen erhält man, indem man von den mit der betreffenden Lösung V gebildeten Gleichungen (5') die n ersten, die ein System Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen y_1, \dots, y_n und x bilden, vollständig integriert und ihre Lösungen in die r letzten Gleichungen (5') substituiert.

§ 2.

Ableitung eines gewissen Systems Lösungen der Differentialgleichungen (2) mit n willkürlichen Konstanten aus den vollständigen Lösungen dieser Gleichungen.

Kehren wir nun aber zurück zu den Differentialgleichungen (2) und zu ihrer kanonischen Form (7)!

Es seien:

$$(17) \quad y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_{2n}), \quad v_i = \psi_i(x, c_1, \dots, c_{2n})$$

die mit Hilfe der Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

aus irgend einem bekannten System vollständiger Lösungen:

$$(18) \quad y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_{2n}), \quad \lambda_q = \Theta_q(x, c_1, \dots, c_{2n})$$

der Differentialgleichungen (2) erhaltenen vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

Ist dann a eine neue willkürliche Konstante oder auch nur irgend ein solcher bestimmter Wert von x , daß die $2n$ Gleichungen (17) auch für $x = a$ noch auflösbar bleiben nach ihren $2n$ Integrationskonstanten c_1, \dots, c_{2n} , so kann man an Stelle der letzteren die Anfangswerte:

$$a_i = \varphi_i(a, c_1, \dots, c_{2n}), \quad b_i = \psi_i(a, c_1, \dots, c_{2n})$$

der Variablen y_i und v_i für $x = a$ als neue willkürliche Konstanten einführen und erhält hierdurch ein neues vollständiges System Lösungen der Differentialgleichungen (7) von der Form:

$$(19) \quad \begin{cases} y_i = y_i(x, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n), \\ v_i = v_i(x, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n), \end{cases}$$

in welchem

$$\begin{aligned} y_i(a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) &\equiv a_i, \\ v_i(a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) &\equiv b_i \end{aligned}$$

ist. Indem man dann weiter nach willkürlicher Wahl der Funktion:

$$A \equiv A(a, a_1, \dots, a_n)$$

jedes:

$$b_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

setzt, entsteht aus diesem neuen vollständigen System von Lösungen selbst wieder ein neues System Lösungen der Differentialgleichungen (7):

$$(20) \quad \begin{cases} y_i = y_i\left(x, a_1, \dots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) \equiv \bar{y}_i(x, a_1, \dots, a_n), \\ v_i = v_i\left(x, a_1, \dots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) \equiv \bar{v}_i(x, a_1, \dots, a_n), \end{cases}$$

das für $x = a$ ergibt:

$$y_i = a_i, \quad v_i = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und diesem System entspricht das System Lösungen der Differentialgleichungen (2):

$$(21) \quad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \dots, a_n), \quad \lambda_q = \bar{\lambda}_q(x, a_1, \dots, a_n),$$

dessen r letzte Gleichungen aus den r letzten Gleichungen (5) durch Substitution der Werte (20) hervorgehen. Seine n willkürlichen Konstanten a_1, \dots, a_n sind die Anfangswerte der Lösungen y_1, \dots, y_n für $x = a$, und nach p. 337 genügt es identisch den Gleichungen:

$$(5'') \quad \begin{cases} y_i' = p_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n), \\ \lambda_q = \mu_q(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n). \end{cases}$$

Infolge der Art, wie die Gleichungen (19) aus den Gleichungen (17) und diese wieder aus den Gleichungen (18) entstanden, erhält man diese, im allgemeinen partikulären Lösungen des Systems (2) aus seinen vollständigen Lösungen (18) direkt dadurch, daß man die letzteren in die Gleichungen einführt:

$$(22) \quad \varphi_i(a, c_1, \dots, c_{2n}) = a_i, \quad \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und sodann mittels dieser $2n$ Gleichungen die $2n$ Integrationskonstanten c_1, \dots, c_{2n} aus ihnen eliminiert.

§ 3.

Das erhaltene System Lösungen der Differentialgleichungen (2) entspricht im Sinne des Satzes IV einer bestimmten Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12).

Deutet man die Substitution der eben gewonnenen Lösungen (20) der Differentialgleichungen (7) durch einen oberen horizontalen Strich an und definiert V durch die Formel:

$$(23) \quad V \equiv A(a, a_1, \dots, a_n) + \int_a^x \left\{ \sum_1^n v_h \frac{\partial H}{\partial v_h} - H \right\} dx^*)$$

*) Das Integral in dieser Formel ist identisch mit dem, welches aus

$$\int_a^x \Omega dx \quad \text{oder} \quad \int_a^x f dx$$

durch Substitution der Lösungen (21) entsteht, während andererseits das Folgende selbst zugleich auch die Cauchysche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung (12) liefert.

als Funktion von x, a_1, \dots, a_n , so erhält man durch partielle Differentiation nach a_k :

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \frac{\partial A}{\partial a_k} + \int_a^x \sum_1^n \left\{ \bar{v}_h \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right\} dx.$$

Nach (7) ist aber:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} \equiv \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_h} \equiv -\frac{\partial \bar{v}_h}{\partial x},$$

also besitzt die Summe unter dem Integralzeichen den Wert:

$$\sum_1^n \left\{ \bar{v}_h \frac{\partial^2 \bar{y}_h}{\partial x \partial a_k} + \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}.$$

Überdies wird für $x = a$:

$$\bar{y}_h \equiv a_h, \quad \bar{v}_h \equiv \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

und damit:

$$\left[\sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right]_a^x \equiv \sum_1^n \left(\bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_h} \frac{\partial a_h}{\partial a_k} \right) \equiv \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_k},$$

es bleibt also nur:

$$(24) \quad \frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}.$$

Dies festgesetzt, seien:

$$(25) \quad a_i = a_i(x, y_1, \dots, y_n) \equiv (a_i)$$

die Auflösungen der n ersten Gleichungen (20), also der n Gleichungen:

$$(26) \quad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \dots, a_n)$$

nach ihren n willkürlichen Konstanten a_1, \dots, a_n . Die Substitution dieser Auflösungen, die durch () hervorgehoben werden soll, führt die Funktion (23) über in die Funktion:

$$(27) \quad (V) \equiv W(x, y_1, \dots, y_n).$$

Nun reduzieren sich die Gleichungen (26) für $x = a$ auf $y_i = a_i$, daher müssen auch ihre Auflösungen (25) für $x = a$ ergeben: $a_i = y_i$. Nach (23) wird aber für $x = a$:

$$V = A(a, a_1, \dots, a_n).$$

Die neue Funktion W besitzt also zunächst die Eigenschaft, für $x = a$ den Wert anzunehmen:

$$W = A(a, y_1, \dots, y_n).$$

Weiter folgt aus ihrer Entstehungsart:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial V}{\partial a_k} \right) \frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$

also nach (24):

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n (\bar{v}_h) \sum_1^n \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i}.$$

Da aber die Gleichungen (25) die Auflösungen der Gleichungen (26) sind, so hat man:

$$y_h \equiv (\bar{y}_h)$$

und damit zugleich:

$$\frac{\partial y_h}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i};$$

man erhält also einfach:

$$(28) \quad \frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv (\bar{v}_i).$$

Aus der Definition (24) folgt endlich noch:

$$(29) \quad \frac{dV}{dx} \equiv \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_h} - \bar{H}.$$

Überdies sind die Gleichungen (26) umgekehrt wieder die Auflösungen ihrer Auflösungen (25). Die Substitution der letzteren wird daher wieder aufgehoben durch die Substitution der Werte (26). Man hat daher nach (27):

$$(27') \quad V \equiv \bar{W},$$

und nach (28):

$$(28') \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_i} \equiv \bar{v}_i.$$

Andererseits ist daher auch:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x},$$

oder nach (28'), und weil der obere Strich die Substitution der Lösungen (20) des Systems (7) anzeigt:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h},$$

und hieraus folgt nach (29) und (28'):

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{H} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + H(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_n}) \equiv 0.$$

In dieser Identität kann man aber die Substitutionen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufheben und erkennt auf diese Weise, daß $V=W$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ist:

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + H(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n}) = 0.$$

Beachtet man schließlich noch, daß die Gleichungen (5'), denen unsere Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) identisch genügen, durch die Identitäten (28') übergehen in die Gleichungen:

$$y'_i = p_i \left(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_n} \right),$$

$$\lambda_\varrho = u_\varrho \left(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_n} \right),$$

so kann man nunmehr den Satz aussprechen:

V. *Hat man die Differentialgleichungen (2) vollständig integriert und eliminiert nun aus den gewonnenen vollständigen Lösungen:*

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = \Theta_\varrho(x, c_1, \dots, c_{2n})$$

die 2n Integrationskonstanten c_1, \dots, c_{2n} mit Hilfe der 2n Gleichungen:

$$\varphi_i(a, c_1, \dots, c_{2n}) = a_i, \quad \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \right]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

in denen a eine neue willkürliche Konstante oder auch ein passend gewählter bestimmter Wert von x ist, so erhält man ein neues System Lösungen dieser Differentialgleichungen:

$$y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \dots, a_n), \quad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \dots, a_n),$$

dessen n willkürliche Konstanten a_1, \dots, a_n die Anfangswerte der Variablen y_1, \dots, y_n für $x = a$ sind, und diese neuen Lösungen der Differentialgleichungen (2) gehören einer bestimmten Lösung $V = W$ der partiellen Differentialgleichung (12), und zwar einer Lösung, die für $x = a$ den Wert

$$W = A(a, y_1, \dots, y_n)$$

annimmt, in solcher Weise zu, daß sie für $V = W$ den $n + r$ Gleichungen (5') identisch genügen.

§ 4.

Tragweite des Satzes V.

Lassen wir im Vorhergehenden den Anfangswert a von x ganz willkürlich, so können wir die Formel (23) auch nach a partiell differenzieren*) und erhalten dann auf demselben Wege, der zur Formel (24) führte, zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial A}{\partial a} - \left[\sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} - \bar{H} \right]_{x=a} + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} - \left[\sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} \right]_{x=a},$$

d. h., da für $x = a$:

*) Die folgende Rechnung ist im wesentlichen dieselbe, die zu der zweiten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung des Problems I führt.

$$\bar{y}_h = a_h, \quad \bar{v}_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} = \left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} \right]_{x=a}$$

wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \dots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} \\ - \sum_1^n \frac{\partial A}{\partial a_h} \left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} \right]_{x=a}. \end{aligned}$$

Nunmehr aber hat \bar{y}_h die Form:

$$\bar{y}_h \equiv \bar{y}_h(x, a, a_1, \dots, a_n).$$

Aus $a_h \equiv [\bar{y}_h]_{x=a}$ folgt daher durch partielle Differentiation nach a :

$$0 \equiv \frac{\partial a_h}{\partial a} \equiv \left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} \right]_{x=a},$$

und demnach bleibt nur:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \dots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}.$$

Andererseits erhält man indirekt aus der Formel

$$(27') \quad V \equiv \bar{W}$$

durch partielle Differentiation nach a :

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial a} + \sum_1^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a},$$

oder nach (28')

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial a} + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a},$$

und der Vergleich dieser beiden Werte von $\frac{\partial V}{\partial a}$ liefert sofort die Formel:

$$(30) \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \dots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right).$$

Ist daher im besondern die von a freie Funktion:

$$V = A(x, y_1, \dots, y_n)$$

selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (12), so ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial a} \equiv 0,$$

und damit zugleich, wenn man die Substitution der Lösungen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufhebt,

$$\frac{\partial W}{\partial a} \equiv 0,$$

d. h. es ist dann auch die aus (23) abgeleitete neue Lösung $V = W$ der

partiellen Differentialgleichung (12) frei von a . Sie erhält aber für $x = a$ den Wert

$$W = A(a, y_1, \dots, y_n),$$

und fällt also, da jede von der willkürlichen Konstante a freie Funktion $F(x, y_1, \dots, y_n)$ bereits unmittelbar gegeben ist durch ihren Wert $F(a, y_1, \dots, y_n)$ für $x = a$, überhaupt zusammen mit der Lösung

$$V = A(x, y_1, \dots, y_n).$$

Um daher ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2) zu erhalten, das für eine beliebig gegebene Lösung

$$V = F(x, y_1, \dots, y_n)$$

der partiellen Differentialgleichung (12) den Gleichungen (5') genügt, braucht man nur im Satze V die Konstante a ganz willkürlich zu lassen und

$$A(a, a_1, \dots, a_n) \equiv F(a, a_1, \dots, a_n)$$

zu nehmen.

Nach Satz III hängt aber jedes System Lösungen $p_1, \dots, p_n, \mu, \dots, \mu_r$ des Problems II mit einer Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12) durch die Gleichungen (5') zusammen, und nach Satz IV entspricht jeder solchen Lösung V ein System Lösungen $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen (2), das den Gleichungen (5') genügt. Man sieht somit:

VI. *Nach vollständiger Integration der Differentialgleichungen (2) gestattet Satz V überhaupt jedes System Lösungen dieser Differentialgleichungen zu erhalten, welches mit irgend einem System Lösungen des Problems II in den Beziehungen steht:*

$$(\alpha) \quad y_i' = p_i, \quad \lambda_\rho = \mu_\rho.$$

Und zwar ergibt sich zur gleichzeitigen Auffindung solcher zusammengehöriger Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II aus dem Satze V und den Identitäten (28) zunächst unmittelbar die folgende Regel:

Nachdem man der Vorschrift des Satzes V gemäß aus den vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) das neue System Lösungen:

$$(21) \quad x_i = \bar{y}_i(x, a_1, \dots, a_n), \quad \lambda_\rho = \bar{\lambda}_\rho(x, a_1, \dots, a_n)$$

dieser Gleichungen abgeleitet hat, substituiert man diese neuen Lösungen in die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω nach den y_i' und eliminiert aus den so erhaltenen Werten

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i'} = \bar{v}_i(x, a_1, \dots, a_n)$$

die n Konstanten a_1, \dots, a_n mittels der n ersten Gleichungen (21). Hat sich hierdurch ergeben:

$$(\beta) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = (\bar{v}_i) \equiv w_i(x, y_1, \dots, y_n),$$

so löst man diese n Gleichungen zusammen mit den r gegebenen Bedingungsgleichungen des Problems I:

$$(1) \quad f_\varrho = 0$$

nach den $n + r$ Unbekannten $y'_1, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ auf. Die Auflösungen (α) dieser $n + r$ Gleichungen bilden dann ein System Gleichungen, denen die Lösungen (21) identisch genügen, und deren rechte Seiten zugleich Lösungen des Problems II sind.

Die Berechnung der Werte der partiellen Differentialquotienten von Ω ist jedoch nur ein unnötiger Umweg.

Die Lösungen (21) genügen nämlich einerseits den Gleichungen (1) und (β), andererseits aber selbstverständlich auch den Gleichungen:

$$(\gamma) \quad y'_i = \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x}, \quad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho.$$

Mit den letzteren Gleichungen befriedigen sie daher zugleich diejenigen, die aus diesen Gleichungen entstehen, wenn man a_1, \dots, a_n mit Hilfe der n ersten Gleichungen (21) eliminiert, also müssen die auf diese Weise erhaltenen Werte der y'_i und λ_ϱ ausgedrückt in den Variablen x, y_1, \dots, y_n , notwendig zusammenfallen mit den Auflösungen (α) der Gleichungen (1) und (β).

Man erhält demnach diejenigen Lösungen des Problems II, mit denen die Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) durch die Formeln (α) verbunden sind, einfach dadurch, daß man in den aus (21) folgenden Gleichungen (γ) für a_1, \dots, a_n die Auflösungen der n ersten Gleichungen (21) einsetzt.

§ 5.

Die Grenzen der Anwendbarkeit des Unabhängigkeitssatzes selbst.

Die in meiner ersten Mitteilung gewonnenen besonderen zusammengehörigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II existieren ebenso wie die Jacobi-Hamiltonsche Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) nur, solange das Problem I wirklich möglich und bestimmt ist, solange also die vollständigen Lösungen

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_{2n})$$

seiner Differentialgleichungen gerade $2n$ Integrationskonstanten in solcher Art enthalten, daß man diesen Lösungen für zwei gegebene Werte von x fest gegebene Werte vorschreiben kann. Satz V dagegen setzt nur voraus,

daß die $n + r$ Gleichungen (4) auflösbar seien nach den $n + r$ Unbekannten $y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_r$, oder daß das System Differentialgleichungen (2) wirklich von der Ordnung $2n$ sei, und er gilt unter dieser Voraussetzung auch dann noch, wenn die vollständigen Lösungen y_1, \dots, y_n dieser Differentialgleichungen weniger als $2n$ willkürliche Konstanten enthalten. Dies tritt im besonderen immer dann ein, wenn im Problem I die Funktion f ein vollständiger Differentialquotient ist. Daraus folgt aber leider noch durchaus nicht, daß ein *Hilbertscher Unabhängigkeitssatz* auch für das folgende Problem der Variationsrechnung existierte:

VII. Unter allen stetigen Funktionen y_1, \dots, y_n von x , die $r < n$ gegebenen, nach y_1', \dots, y_r' auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$f_\rho(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

genügen, und von denen die $n - 1$ letzten für zwei gegebene Werte x_0 und $x_1 > x_0$ von x gegebene Werte besitzen, während von y_1 nur der Wert für $x = x_0$ fest vorgeschrieben ist, diejenigen zu finden, denen ein größter oder kleinster Wert dieser ersten Funktion für $x = x_1$ zugehört,

was um so auffallender ist, als es bekanntlich doch auch in diesem Problem eine Funktion gibt, die vollständig die Rolle der Weierstraßschen E -Funktion übernimmt.

Versteht man nämlich unter $p_1, \dots, p_n, \mu_1, \dots, \mu_r$ irgend ein bestimmtes System Lösungen des Problems II, so bewahrt für alle, nach den Bedingungen des Problems I zulässigen Funktionen y_1, \dots, y_n von x , welche den Ausdruck (8), oder, was wegen der Bedingungen (1') dasselbe ist, den Ausdruck:

$$|f| + \sum_1^n (y_h' - p_h) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h}$$

im Integrationsintervall stetig erhalten, das Integral:

$$(31) \quad I^* \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left\{ |f| + \sum_1^n (y_h' - p_h) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h} \right\} dx$$

unveränderlich denselben Wert, da es ja nur abhängt von den Grenzen x_0, x_1 und den Werten jener Funktionen y_1, \dots, y_n an den beiden Grenzen und alle diese Grenzwerte fest gegeben sind, und dies Resultat erst ist der eigentliche *Hilbertsche Unabhängigkeitssatz*.

Für ein solches System Lösungen:

$$y_i = \bar{y}_i, \quad \lambda_\rho = \bar{\lambda}_\rho$$

des Problems I aber, welches den Gleichungen:

$$y_i' = p_i, \quad \lambda_\rho = \mu_\rho$$

genügt, erhält dies Integral den Wert:

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \bar{f} dx.$$

Setzt man daher:

$$(32) \quad E \equiv f - |f| - \sum_1^n (y'_i - p_i) \frac{\partial Q}{\partial p_i},$$

so kann man — immer die Stetigkeitsforderung als erfüllt vorausgesetzt — die Änderung

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} f dx - \int_{x_0}^{x_1} \bar{f} dx,$$

welche das vorgelegte Integral

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

erfährt, wenn es erst mit einem bestimmten System solcher Lösungen und dann mit irgend welchen anderen, den Bedingungen des Problems I genügenden Funktionen y_1, \dots, y_n gebildet wird, so ausdrücken:

$$(33) \quad \Delta I = \int_{x_0}^{x_1} E dx.$$

Das Problem VII dagegen, obgleich es seiner äußeren Form nach für $f \equiv y_1'$ mit dem Problem I zusammenfällt, unterscheidet sich doch dadurch ganz wesentlich von diesem, daß man bei ihm den Wert von y_1 für $x = x_1$ nicht mehr fest vorschreiben kann, sondern vielmehr notwendig ganz willkürlich lassen muß. Bezieht man daher, indem man f durch y_1' ersetzt, das Integral (31) auf das Problem VII, so bleibt sein Wert nun nicht mehr für alle mit den Problembedingungen verträglichen Funktionen y_1, \dots, y_n von x unveränderlich, sondern wird abhängig von dem Werte, den die erste dieser Funktionen für $x = x_1$ annimmt, und die fundamentale Formel (33) ist daher auf das Problem VII gar nicht mehr anwendbar.
