

Sulle superficie di traslazione.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

In una Nota: *Sopra la deformazione di una classe di superficie*, inserita nel vol. XVI (anno 1878) del Giornale di BATTAGLINI, il chiar.^{mo} prof. BIANCHI ha considerato le superficie, da lui chiamate *di traslazione*, generate da una curva piana C invariabile di forma che si muove senza rotazione ed un punto di essa descrive una curva C' posta in un piano perpendicolare a quello di C . Queste superficie, come quelle di rivoluzione, si possono deformare in infiniti modi, conservando il carattere della loro generazione; e anzi la costruzione dei *profili derivati* dai profili C , C' è, per le superficie in discorso, perfettamente analoga a quella dei profili derivati dai meridiani delle superficie di rivoluzione; di modo che ogni teorema relativo alla deformazione di una superficie di rivoluzione dà luogo a un teorema analogo sulla deformazione di una superficie di traslazione.

Nella presente Nota io chiamo più generalmente superficie di traslazione quelle che sono generate da una linea a doppia curvatura qualunque Λ (generatrice) la quale, conservando inalterata la sua forma, si muove senza rotazione in modo, che un suo punto qualunque descriva una linea arbitraria L (direttrice); dopo avere dimostrato alcune proprietà di tali superficie, risolvo completamente il problema della loro deformazione in altre della stessa specie, e considero qualche caso particolare notevole.

§ I.

Proprietà generali. — Siano: L una linea a doppia curvatura, x, y, z le coordinate di un suo punto qualunque, rispetto ad un sistema di assi rettangolari $O(x, y, z)$, s l'arco della linea.

Siano: Λ un'altra curva arbitraria, ξ, η, ζ le coordinate di un suo punto qualunque rispetto ad un altro sistema di assi $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ e σ l'arco di Λ .

Supponendo che Λ sia invariabilmente collegata al sistema di assi Ω , si immagini che tale triedro si muova in modo, che il suo vertice Ω percorra la linea L e gli spigoli $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ si mantengano rispettivamente paralleli agli altri fissi Ox, Oy, Oz . In questo movimento la linea Λ (generatrice) genera una superficie di traslazione S ; ogni punto di Λ , o più generalmente ogni punto invariabilmente collegato col sistema di assi Ω , genera, in questo movimento, una linea eguale a L (direttrice).

Chiamando X, Y, Z le coordinate, rispetto al sistema di assi fissi O , di un punto qualunque della superficie S , abbiamo:

$$X = x(s) + \xi(\sigma), \quad Y = y(s) + \eta(\sigma), \quad Z = z(s) + \zeta(\sigma).$$

La forma di queste equazioni rende manifesto che *in una superficie di traslazione la direttrice e la generatrice possono essere scambiate fra loro.*

Consideriamo la tangente T in un determinato punto P della generatrice Λ ; nel movimento pel quale Λ genera la superficie, il punto P descrive una linea eguale a L e la tangente T , mantenendosi sempre parallela a sè stessa, descrive un cilindro che tocca la superficie lungo la linea descritta da P . La stessa proprietà avendo luogo quando si consideri una delle linee L come generatrice e una delle Λ come direttrice, si può dire che *sopra una superficie di traslazione le direttrici L e le generatrici Λ sono linee a tangenti conjugate.*

Se dalle precedenti equazioni ricaviamo il quadrato dell'elemento lineare della superficie, abbiamo:

$$dS^2 = ds^2 + 2(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta')dsd\sigma + d\sigma^2,$$

e quindi, chiamando i l'inclinazione delle linee coordinate, sarà:

$$\cos i = x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'.$$

Se dunque R_s, R_σ sono i raggi di curvatura geodetica delle linee $s = \text{cost.}$, $\sigma = \text{cost.}$, avremo per formole note:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial i}{\partial \sigma}, \quad \frac{1}{R_\sigma} = \frac{\partial i}{\partial s}.$$

Perciò *in una superficie di traslazione le curvature geodetiche delle direttrici ($\sigma = \text{cost.}$) e delle generatrici ($s = \text{cost.}$) soddisfano l'equazione:*

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_s} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{R_\sigma} \right).$$

Se poi indichiamo con K la curvatura totale della superficie, sarà:

$$K = \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial^2 i}{\partial s \partial \sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_s} \right) = \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{R_\sigma} \right).$$

Indicando con $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ i coseni direttivi della normale principale della direttrice L e con $\cos \lambda_1$, $\cos \mu_1$, $\cos \nu_1$ quelli della normale principale della generatrice Λ , abbiamo:

$$\Sigma \cos \lambda \cos \lambda_1 = \rho_s \rho_\sigma \frac{\partial^2 \cos i}{\partial s \partial \sigma},$$

essendo ρ_s , ρ_σ i raggi di curvatura assoluta delle $s = \text{cost.}$, $\sigma = \text{cost.}$ Se quindi $\cos(N, N_1)$ è il coseno dell'angolo formato dalle normali principali delle L , Λ si avrà la relazione:

$$\cos(N, N_1) = -\rho_s \rho_\sigma \left(\cos i \frac{\partial i}{\partial s} \frac{\partial i}{\partial \sigma} + \operatorname{sen} i \frac{\partial^2 i}{\partial s \partial \sigma} \right),$$

la quale, col porre $\cos i = \cos(T, T_1)$, diviene:

$$\frac{\cos(N, N_1)}{\rho_s \rho_\sigma} + \frac{\cos(T, T_1)}{R_s R_\sigma} + K = 0.$$

Questa costituisce una notevole relazione che lega la curvatura della superficie ai raggi di curvatura assoluta e ai raggi di curvatura geodetica delle linee L , Λ .

Risulta di qui che se una delle linee L , Λ , per es. la L , è una retta, sarà $\frac{1}{\rho_s} = \frac{1}{R_s} = 0$ e quindi $K = 0$; infatti in questo caso la superficie è un cilindro.

Se una delle linee L , Λ , per es. L , è geodetica, avremo $\frac{1}{R_s} = 0$ e perciò:

$$K = \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{R_\sigma} \right) = 0;$$

dunque *se sopra una superficie di traslazione una delle direttrici o una delle generatrici è geodetica, la curvatura totale della superficie lungo quella linea è nulla.*

Chiamando P_s , P_σ i raggi di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle linee $s = \text{cost.}$, $\sigma = \text{cost.}$, si ha:

$$\frac{1}{P_s} = \cot i \frac{\partial i}{\partial \sigma} = \frac{1}{R_s} \cot i; \quad \frac{1}{P_\sigma} = \cot i \frac{\partial i}{\partial s} = \frac{1}{R_\sigma} \cot i,$$

e quindi:

$$\operatorname{tang} i = \frac{P_s}{R_s} = \frac{P_\sigma}{R_\sigma}.$$

Dunque in una superficie di traslazione i rapporti dei raggi di curvatura geodetica delle linee L, Λ ai raggi di curvatura geodetica corrispondenti delle loro traiettorie ortogonali sono eguali entrambi alla cotangente dell'angolo formato nel punto che si considera dalle linee L, Λ .

§ II.

Deformazione per flessione delle superficie di traslazione in altre della stessa specie. — In questo paragrafo si studia in modo completo la deformazione di una superficie di traslazione S in un'altra S_1 della stessa specie.

Si supponga che L e Λ siano la direttrice e la generatrice della superficie primitiva S , che L_1 e Λ_1 siano la direttrice e la generatrice della deformata S_1 e che precisamente la linea L_1 sia la deformata di L e Λ_1 di Λ . I quadrati degli elementi lineari delle due superficie S, S_1 sono:

$$dS^2 = ds^2 + 2(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta')dsd\sigma + d\sigma^2;$$

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2(x'_1\xi'_1 + y'_1\eta'_1 + z'_1\zeta'_1)ds_1d\sigma_1 + d\sigma_1^2;$$

e poichè $s = s_1, \sigma = \sigma_1$, la condizione d'identità delle due espressioni scritte si riduce alla seguente:

$$x'_1\xi'_1 + y'_1\eta'_1 + z'_1\zeta'_1 = x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'.$$

Per più semplicità di scrittura sopprimeremo in questa equazione gli accenti, indicanti derivazioni rapporto alle variabili s, σ , salvo a metterli in fine; e studieremo quindi i casi in cui si può soddisfare all'identità:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 = x\xi + y\eta + z\zeta, \quad (1)$$

nella quale x, y, z, x_1, y_1, z_1 sono funzioni della variabile s e $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ sono funzioni dell'altra variabile σ indipendente dalla prima.

Ciascuno dei due membri di (1), nel caso più generale, è composto di tre termini, ma può darsi che l'uno o l'altro o entrambi si riducano a un numero minore di termini; volendo quindi esaminare tutte le ipotesi possibili, basta esaminare separatamente i sei casi seguenti:

- | | |
|----|---|
| a) | il primo membro ha 1 termine e il secondo 1 |
| b) | " " 1 " " |
| c) | " " 1 " " |
| d) | " " 2 " " |
| e) | " " 2 " " |
| f) | " " 3 " " |

Infatti il caso in cui il primo membro ha 2 termini e il secondo 1; l'altro in cui il primo membro ha 3 termini e il secondo 1; e l'altro in cui il primo membro ha 3 termini e il secondo 2 si riducono rispettivamente ai casi *b)*, *c)*, *e)*, supponendo che, invece di essere data la superficie S deformantesi in S_1 , sia data la S_1 deformantesi in S .

a)

L'identità (1) da soddisfare si riduce ora alla seguente:

$$x_1 \xi_1 = x \xi,$$

la quale dà:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{\xi}{\xi_1}.$$

Essendo il primo membro funzione di s e il secondo funzione di σ , ciascuno deve essere una costante; indicandola con a , risulta:

$$x_1 = ax, \quad \xi_1 = \frac{1}{a} \xi; \quad (2)$$

apponendo alle x , x_1 , ξ , ξ_1 di queste equazioni gli accenti indicanti derivazioni rapporto alle s , σ e integrando poi le equazioni ottenute, si ottengono le stesse (2), qualora si mettano a zero le costanti arbitrarie d'integrazione, il che non nuoce alla generalità.

Dunque nel caso *a)*, fra le coordinate x_1 , x e fra le ξ_1 , ξ , hanno luogo le relazioni (2).

Se ora confrontiamo la relazione $x_1 \xi_1 = x \xi$ colla (1), deduciamo che nel caso presente deve essere altresì verificata la condizione:

$$y_1 \eta_1 + z_1 \zeta_1 = y \eta + z \zeta;$$

se questa è soddisfatta senza che si annullino contemporaneamente tutti quattro i termini che la compongono, allora si entra nel caso *d)* e perciò tale ipotesi sarà considerata in seguito. Se poi la precedente è verificata coll'annullarsi di ogni termine, allora avendosi:

$$y_1 \eta_1 = 0, \quad z_1 \zeta_1 = 0, \quad y \eta = 0, \quad z \zeta = 0,$$

si dovrebbero esaminare 16 casi particolari; lasciando però da parte quelli nei quali una delle linee L , Λ , L_1 , Λ_1 o entrambe sono rette (poichè allora una

delle superficie S, S_1 o entrambe sono cilindri, casi evidentemente privi d'importanza) rimangono da considerare i soli quattro casi seguenti:

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad y = 0, \quad \xi = 0; \quad y_1 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \eta = 0, \quad z = 0 \\ \eta_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad y = 0, \quad \xi = 0; \quad \eta_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad \eta = 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

In ciascuno di questi l'una e l'altra delle superficie S, S_1 è generata da una curva piana, invariabile di forma, che si muove senza rotazione in modo, che un suo punto qualunque descrive una curva posta in un piano perpendicolare a quello che contiene la prima. Siamo quindi nel caso delle superficie di traslazione trattate dal prof. BIANCHI nel citato articolo, al quale rimandiamo il lettore.

b)

La condizione da soddisfare (1) diviene:

$$x_1 \xi_1 = x \xi + y \eta;$$

dividendo ambi i membri per $x \xi$ e derivando l'equazione ottenuta rapporto a s , si ha:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' \frac{\xi_1}{\xi} = \left(\frac{y}{x}\right)' \frac{\eta}{\xi},$$

la quale si può scrivere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)'}{\left(\frac{y}{x}\right)'} = \frac{\eta}{\xi_1},$$

e non può quindi sussistere se ciascuno dei due membri non è una costante; indicandola con B , avremo:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' = B \left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Moltiplicando per ds e integrando, si ha:

$$\frac{x_1}{x} = A + B y,$$

essendo A una costante arbitraria; si deduce quindi:

$$x_1 = A x + B y.$$

Operando sulle altre coordinate ξ, η, \dots come abbiamo operato sulle x, y, \dots si ha:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta,$$

con a e b costanti; in causa di queste due relazioni la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Ba\xi y = 0,$$

la quale sarà un'identità quando:

$$Aa - 1 = 0, \quad Bb - 1 = 0, \quad Ab = 0, \quad Ba = 0.$$

Queste equazioni sono incompatibili, poichè le due prime richiedono che le quantità A, B, a, b siano diverse da zero, nel qual caso le altre due non possono essere soddisfatte.

Dunque nel caso $b)$ non si ha alcuna soluzione.

c)

La (1) diviene:

$$x_1 \xi_1 = x\xi + y\eta + z\zeta, \tag{3}$$

e questa, divisa per $x\xi$ e derivata rapporto a s , dà:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' \frac{\xi_1}{\xi} = \left(\frac{y}{x}\right)' \frac{\eta}{\xi} + \left(\frac{z}{x}\right)' \frac{\zeta}{\xi}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{\xi}{\zeta}$ e poi derivando l'equazione ottenuta rapporto a σ , si ha:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' \left(\frac{\xi_1}{\zeta}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)' \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)';$$

deve quindi essere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)'}{\left(\frac{y}{x}\right)'} = \frac{\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)'}{\left(\frac{\xi_1}{\zeta}\right)'} = \text{costante} = B.$$

Si deduce di qui:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' = B \left(\frac{y}{x}\right)',$$

la quale, moltiplicata per ds e integrata, dà:

$$\frac{x_1}{x} = A + B \frac{y}{x},$$

con A costante; e di qui:

$$x_1 = Ax + By.$$

Ora è facile vedere che dalla (3) si avrebbe potuto ottenere anche una relazione della forma:

$$x_1 = Ay + Bz,$$

ovvero un'altra della forma:

$$x_1 = Ax + Bz,$$

e quindi basterà, per comprendere tutti i casi particolari, considerare la relazione più generale:

$$x_1 = Ax + By + Cz,$$

dove A, B, C sono costanti. Con un processo analogo al precedente si ricava pure:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

essendo a, b, c tre costanti; ed allora la relazione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Acx\zeta + Bay\xi + Bcy\zeta + \\ + Caz\xi + Cbz\eta + (Cc - 1)z\zeta = 0.$$

Questa è identicamente verificata quando i coefficienti soddisfanno le equazioni:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Cc - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ac = 0; \\ Ba = 0; \quad Bc = 0; \quad Ca = 0; \quad Cb = 0;$$

ma dalle tre prime si ricava che A, B, C, a, b, c devono essere diversi da zero ed allora le sei condizioni rimanenti non possono essere soddisfatte.

Dunque nel caso c) non si ha alcuna soluzione.

d)

Si deve verificare la condizione seguente:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 = x\xi = y\eta,$$

la quale, divisa per $y\eta$, e derivata successivamente rapporto a s e a σ , dà:

$$\left(\frac{x_1}{y}\right)' \left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)' = \left(\frac{x}{y}\right)' \left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)'.$$

Deve perciò essere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{y}\right)'}{\left(\frac{x}{y}\right)'} = \frac{\left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)'}{\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)'} = A,$$

con A costante; da questa relazione si deduce:

$$\left(\frac{x_1}{y}\right)' = A \left(\frac{x}{y}\right)',$$

e per integrazione:

$$\frac{x_1}{y} = A \frac{x}{y} + B,$$

con B costante. Si ha dunque:

$$x_1 = Ax + By.$$

Con un processo perfettamente analogo al precedente si può dedurre:

$$y_1 = Cx + Ey,$$

con C, E costanti; e per rispetto alle altre coordinate ξ_1, η_1 si avrà pure:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta; \quad \eta_1 = c\xi + e\eta,$$

essendo a, b, c, d costanti. Ma evidentemente fra i casi possibili vi è pur quello che le due relazioni che danno x_1, y_1 o le altre che danno ξ_1, η_1 non siano indipendenti fra loro (e ciò per la sussistenza di una particolare relazione di 1.^o grado fra le x_1, y_1 o fra le ξ_1, η_1); si vede quindi che il caso d) si suddivide in tre sottocasi, a seconda che ha luogo una sola relazione della 1.^a specie e una sola della 2.^a; ovvero due della 1.^a e una della 2.^a (ovvero, inversamente, una della 1.^a e due della 2.^a); ovvero due relazioni della 1.^a specie e due della 2.^a.

Sottocaso I.^o — Avendosi in questo caso:

$$x_1 = Ax + By, \quad \xi_1 = a\xi + b\eta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Bay\xi + y_1\eta_1 = 0.$$

Questa, per essere soddisfatta identicamente con valori particolari di A, B, a, b , richiede che sia $y_1\eta_1 = 0$ la qual condizione riduce la (1) alla forma già considerata nel caso b); nel sottocaso I.^o non si ha quindi nessuna soluzione.

Sottocaso II.^o — Ora essendo:

$$x_1 = Ax + By; \quad y_1 = Cx + Ey; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta,$$

avremo da soddisfare alla condizione:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Bay\xi + Cx\eta_1 + Ey\eta_1 = 0,$$

la quale dà:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ba = 0; \quad C = 0; \quad E = 0.$$

Ma siccome le prime due equazioni richieggono che A, B, a, b siano diverse da zero e ciò fa sì che non siano soddisfatte le altre due seguenti, così si può dire che neppure in questo sottocaso si ha alcuna soluzione.

Sottocaso III.° — Ora avendosi:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ax + By \\ y_1 &= Cx + Ey \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 &= a\xi + b\eta \\ \eta_1 &= c\xi + e\eta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

la condizione (1) diviene:

$$(Aa + Cc - 1)x\xi + (Bb + Ee - 1)y\eta + (Ab + Ce)x\eta + (Ba + Ec)y\xi = 0,$$

la quale, per essere soddisfatta identicamente, richiede:

$$Aa + Cc - 1 = 0; \quad Bb + Ee - 1 = 0; \quad Ab + Ce = 0; \quad Ba + Ec = 0.$$

Considerando date le costanti A, B, C, E e come incognite le a, b, c, e , si deduce da queste equazioni:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{E}{AE - BC}; & b &= -\frac{C}{AE - BC}; & c &= -\frac{B}{AE - BC}; \\ e &= \frac{A}{AE - BC}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ora, per quanto è stato osservato al principio di questo paragrafo, alle quantità $x, y, x_1, y_1, \xi, \eta, \xi_1, \eta_1$ che entrano nelle (4) bisognerebbe apporre gli accenti indicanti derivazioni rapporto a s o a σ ; le (4) ci darebbero così delle relazioni fra le derivate delle coordinate e, mediante integrazioni, si avrebbero le corrispondenti relazioni fra le coordinate. Tali integrazioni introducono delle costanti arbitrarie additive le quali, senza nuocere alla generalità, possono essere supposte nulle; per conseguenza si può ritenere che *fra le coordinate x_1, y_1 e le x, y e fra le coordinate ξ_1, η_1 e le ξ, η hanno luogo le relazioni (4), nelle quali A, B, C, E sono costanti arbitrarie e a, b, c, e sono costanti date dalle (5).*

Se confrontiamo la relazione $x_1\xi_1 + y_1\eta_1 = x\xi + y\eta$ che ha luogo nel presente caso *d*) colla generale (1), vediamo che ora è soddisfatta anche l'altra

condizione:

$$z_1 \zeta_1 = z \zeta.$$

Se ambi i membri di questa equazione sono diversi da zero, si avrà:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{\zeta}{\zeta_1} = \text{costante} = k,$$

da cui:

$$z_1 = kz, \quad \zeta_1 = \frac{1}{k} \zeta;$$

se insieme a queste equazioni consideriamo le (4), si vede che le tre coordinate x_1, y_1, z_1 sono legate alle x, y, z e le tre coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 alle ξ, η, ζ da relazioni lineari, che sono precisamente dei casi particolari di quelle che troveremo nel caso f). [Infatti per ricavare le relazioni, di cui ora si tratta, da quelle del caso f), basta nelle (15) fare: $C = G = H = L = c = g = h = l = 0$, $M = \frac{1}{m} = k$.]

Se dunque $z_1 \zeta_1$ e $z \zeta$ sono diversi da zero, abbiamo un caso che rientra nel generale f) che tratteremo in seguito.

Se poi supponiamo che sia $z \zeta = 0$ $z_1 \zeta_1 = 0$, allora avremo da considerare le quattro soluzioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ z_1 = 0 \end{array} \right\} (\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \zeta = 0 \\ \zeta_1 = 0 \end{array} \right\} (\beta) \quad \left. \begin{array}{l} z = 0 \\ \zeta_1 = 0 \end{array} \right\} (\gamma) \quad \left. \begin{array}{l} \zeta = 0 \\ z_1 = 0 \end{array} \right\} (\delta)$$

α) La condizione $z_1 = 0$ mostra che la linea L_1 è piana e quindi deve essere:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 = 1;$$

calcolando queste derivate dalle (4), tale condizione diviene:

$$(A^2 + C^2) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2(AB + CE) \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + (B^2 + E^2) \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Ma essendo L piana, risulta:

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2},$$

e perciò la precedente diviene:

$$(A^2 + C^2 - B^2 - E^2) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2(AB + CE) \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \cdot \frac{dx}{ds} + B^2 + E^2 - 1 = 0.$$

Se quest'eguaglianza non è un'identità ci offre $\frac{dx}{ds} = \text{costante}$, la quale condizione, unita all'altra che L è piana, conduce a una retta; se la linea L è una retta, la superficie di traslazione si riduce a un cilindro, caso evidentemente privo d'importanza.

Se poi quell'eguaglianza è un'identità, allora sarà:

$$A^2 + C^2 = B^2 + E^2 = 1, \quad AB + CE = 0,$$

da cui si deduce:

$$A = \cos \theta \quad B = -\sin \theta, \quad C = \sin \theta, \quad E = \cos \theta,$$

essendo θ una costante.

Con questi valori si deduce dalle (4) che le due linee piane L, L_1 sono eguali di forma e solamente sono collocate diversamente rapporto ai rispettivi assi di riferimento; le due superficie S, S_1 sono quindi identiche, e anche questo caso non ha evidentemente alcuna importanza.

β) Con un processo perfettamente analogo al precedente, si giunge a conclusioni analoghe, cioè la superficie di traslazione S_1 è un cilindro, ovvero è la stessa S cambiata di posizione; l'un caso e l'altro non ha veruna importanza.

γ) La condizione $\zeta_1 = 0$ mostra che la generatrice Λ_1 è piana e quindi deve essere:

$$\left(\frac{d\zeta_1}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

la quale in causa delle (4) diviene:

$$(a^2 + c^2)\left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 + 2(ab + ce)\frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + (b^2 + e^2)\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 - 1 = 0.$$

Facendo uso delle (5), si possono esprimere i coefficienti dei termini di questa equazione per A, B, C, E ed allora si avrà da soddisfare alle due condizioni seguenti:

$$(B^2 + E^2)\left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 - 2(AB + CE)\frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + (A^2 + C^2)\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 - (AE - BC)^2 = 0$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 = 1;$$

queste ci forniscono $\frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d\zeta}{d\sigma}$ in funzione di $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ e, con un'integrazione, potremo facilmente ricavare le η, ζ espresse in funzione di ζ , che resta arbitraria.

Se poi si esprimono le coordinate ξ, η, ζ anzi che per l'arco di Λ per un parametro indipendente qualunque τ , si deve soddisfare solamente alla condizione:

$$(B^2 + E^2)d\xi^2 - 2(AB + CE)d\xi d\eta + (A^2 + C^2)d\eta^2 - (AE - BC)^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0,$$

alla quale si può dare la forma seguente:

$$(AE - BC)^2 d\zeta^2 = [B^2 + E^2 - (AE - BC)^2] d\xi^2 - 2(AB + CE)d\xi d\eta + [A^2 + C^2 - (AE - BC)^2] d\eta^2.$$

Questa equazione, risolta rapporto a ζ e integrata previa una moltiplicazione per $d\tau$, dà la coordinata ζ in funzione di τ quando si conoscano in funzione di questa variabile le ξ, η .

Operando nell'un modo e nell'altro, si hanno le equazioni:

$$\xi = \xi(\sigma) = \xi(\tau)$$

$$\eta = \frac{AB + CE}{A^2 + C^2} \xi(\sigma) \pm \frac{AE - BC}{A^2 + C^2} \int \sqrt{A^2 + C^2 - \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2} \cdot d\sigma = \eta(\tau)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{A^2 + C^2} \int \sqrt{(A^2 + C^2)^2 \left\{1 - \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\right\} - \left\{(AB + CE) \frac{d\xi}{d\sigma} \pm (AE - BC) \sqrt{A^2 + C^2 - \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2}\right\}^2} \cdot d\sigma = \\ &= \frac{1}{AE - BC} \int \sqrt{\left\{B^2 + E^2 - (AE - BC)^2\right\} \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 - 2(AB + CE) \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + \left\{A^2 + C^2 - (AE - BC)^2\right\} \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau \end{aligned}$$

che ci esprimono ξ, η, ζ sia in funzione dell'arco σ di Λ , sia in funzione del parametro arbitrario τ .

La linea L è piana, ed essendo completamente arbitraria, può rappresentarsi colle equazioni:

$$x = x(s) = x(t), \quad y = y(s) = y(t), \quad z = 0, \quad (7)$$

coll'avvertenza che, quando la variabile indipendente è l'arco s , si ha:

$$y = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \cdot ds,$$

e quando la variabile indipendente t è qualunque, le funzioni $x(t), y(t)$ sono entrambe arbitrarie.

Le coordinate dei punti di Λ , si ottengono dalle (4) mettendo al posto dei coefficienti a, b, c, e i loro valori (5) e invece di η l'espressione data dalla

seconda (6); si ha dunque:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A}{A^2 + C^2} \xi(\sigma) \mp \frac{C}{A^2 + C^2} \int \sqrt{A^2 + C^2 - \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2} \cdot d\sigma = \\ &= \frac{1}{AE - BC} \{E\xi(\tau) - C\eta(\tau)\} \\ \eta_1 &= \frac{C}{A^2 + C^2} \xi(\sigma) \pm \frac{A}{A^2 + C^2} \int \sqrt{A^2 + C^2 - \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2} \cdot d\sigma = \\ &= \frac{1}{AE - BC} \{-B\xi(\tau) + A\eta(\tau)\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\xi_1 = 0.$$

a seconda che la variabile indipendente è l'arco σ ovvero il parametro arbitrario τ .

In quanto alla linea L_1 , la determinazione delle coordinate de'suoi punti in funzione dell'arco s si fa col mezzo delle (4) unitamente alla condizione.

$$\frac{dz_1}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2}.$$

Se poi tale determinazione si fa in funzione del parametro arbitrario t , si osserverà che le (4) dànno:

$$dx_1 = A dx + B dy, \quad dy_1 = C dx + E dy$$

e quindi, dovendo essere:

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2,$$

si avrà:

$$dz_1^2 = dx^2 + dy^2 - (A dx + B dy)^2 - (C dx + E dy)^2,$$

d'onde:

$$dz_1 = \sqrt{(1 - A^2 - C^2)dx^2 - 2(AB + CE)dxdy + (1 - B^2 - E^2)dy^2},$$

la quale equazione dà dz_1 , e perciò facilmente z_1 , tosto che siano date le funzioni $x(t)$, $y(t)$.

Operando nell'un modo e nell'altro, si hanno le seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ax(s) + By(s) = Ax(t) + By(t) \\ y_1 &= Cx(s) + Ey(s) = Cx(t) + Ey(t) \\ z_1 &= \int \sqrt{1 - \left(A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(C \frac{dx}{ds} + E \frac{dy}{ds}\right)^2} \cdot ds = \\ &= \int \sqrt{1 - A^2 - C^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2(AB + CE) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + (1 - B^2 - E^2) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

che ci esprimono le coordinate x_1, y_1, z_1 sia per l'arco s di L_1 , sia per il parametro arbitrario t .

Avremo quindi il teorema: *la superficie di traslazione S nella quale la generatrice Λ e la direttrice L sono le linee rappresentate dalle equazioni (6), (7) è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 nella quale la generatrice Λ_1 e la direttrice L_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni (8), (9), colla condizione che Λ_1 sia la deformata di Λ e L_1 la deformata di L . Nelle precedenti equazioni A, B, C, E sono costanti arbitrarie; σ è l'arco delle linee Λ, Λ_1 ; s è l'arco delle linee L, L_1 ; τ e t sono due parametri indipendenti qualunque. Quando le variabili indipendenti sono s e σ , nelle precedenti equazioni sono funzioni arbitrarie le $x(s), \xi(\sigma)$; quando invece le variabili indipendenti sono i parametri arbitrari t e τ , nelle precedenti equazioni sono funzioni arbitrarie le $x(t), y(t), \xi(\tau), \eta(\tau)$.*

Una particolarità della deformazione ora trovata è di trasformare la linea piana L in una linea a doppia curvatura L_1 e la linea a doppia curvatura Λ in una linea piana Λ_1 ; inoltre dalle (4) si rileva che la proiezione sul piano coordinato $z_1 = 0$ della linea gobba L_1 è dello stesso ordine della linea piana L ; e la proiezione sul piano coordinato $\xi = 0$ della linea gobba Λ è dello stesso ordine della linea piana Λ_1 .

Nella deformazione ora studiata, dico che si possono assumere arbitrariamente le linee piane L, Λ_1 . Notiamo anzitutto che le seconde (4), risolte rapporto alle ξ, η , danno:

$$\xi = A\xi_1 + C\eta_1, \quad \eta = B\xi_1 + E\eta_1. \quad (10)$$

Se allora supponiamo che le due linee piane L, Λ_1 siano definite rispettivamente nei modi seguenti:

$$x = x(s); \quad y = y(s) = \int \sqrt{1 - x'^2} \cdot ds; \quad z = 0 \quad (11)$$

$$\xi_1 = \xi_1(\sigma); \quad \eta_1 = \eta_1(\sigma) = \int \sqrt{1 - \xi_1'^2} \cdot d\sigma; \quad \zeta_1 = 0, \quad (12)$$

riesce facile la determinazione delle linee L_1, Λ .

Per la linea L_1 noi abbiamo due coordinate de' suoi punti nelle (4) e l'altra coordinata z_1 si può dedurre dalla nota relazione:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1;$$

si ha così:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax(s) + By(s); & y_1 &= Cx(s) + Ey(s); \\ z_1 &= \int \sqrt{1 - \left(A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(C \frac{dx}{ds} + E \frac{dy}{ds}\right)^2} \cdot ds. \end{aligned} \quad (13)$$

In quanto alle coordinate dei punti della linea Λ , le (10) ce ne danno due e la terza ζ si può ricavare dalla relazione:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_1}{d\sigma}\right)^2 = 1;$$

abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} \xi &= A\xi_1(\sigma) + C\eta_1(\sigma); & \eta &= B\xi_1(\sigma) + E\eta_1(\sigma); \\ \zeta &= \int \sqrt{1 - \left(A \frac{d\xi_1}{d\sigma} + C \frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2 - \left(B \frac{d\xi_1}{d\sigma} + E \frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2} \cdot d\sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

Dunque la superficie di traslazione S in cui la generatrice Λ e la direttrice L sono le linee rappresentate dalle equazioni (14), (11) è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 in cui la generatrice Λ_1 e la direttrice L_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni (12), (13), colla condizione che Λ_1 e L_1 siano le deformate delle Λ , L . In queste equazioni A , B , C , E sono costanti arbitrarie, $x(s)$ è una funzione arbitraria di s e $\xi_1(\sigma)$ è una funzione arbitraria di σ .

Si applicherà il primo dei precedenti teoremi quando, partendo da una superficie di traslazione *data*, si voglia deformarla in un'altra della stessa specie; infatti allora sono note le linee L , Λ e si tratta di trovare le L_1 , Λ_1 . Si applicherà invece il secondo teorema quando siano fissate a priori le linee piane L , Λ_1 . Ciò si vedrà più particolarmente in alcune applicazioni che seguono.

δ) Trattando il caso δ), si arriva a conseguenze perfettamente analoghe a quelle ora trovate nella trattazione del caso γ).

e)

La condizione (1) nel caso presente diviene:

$$x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 = x \xi + y \eta + z \zeta,$$

la quale, divisa per $z\eta_1$ e derivata successivamente rapporto a s e a σ , dà:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)' \left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)' = \left(\frac{x}{z}\right)' \left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)' + \left(\frac{y}{z}\right)' \left(\frac{\eta_1}{\eta_1}\right)'.$$

Dividendo ambi i membri per $\left(\frac{y}{z}\right)'$ e derivando l'equazione che si ottiene rapporto ad s , si ha:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} \right] \left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)' = \left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} \right] \left(\frac{\xi}{\eta}\right)',$$

da cui si ricava:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} \right] = A \cdot \left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} \right],$$

con A costante. Integrando e indicando con B un'altra costante arbitraria, si ottiene:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} = A \frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} + B,$$

da cui:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)' = A \left(\frac{x}{z}\right)' + B \left(\frac{y}{z}\right)',$$

ed integrando:

$$\frac{x_1}{z} = A \frac{x}{z} + B \frac{y}{z} + C,$$

con C costante. Si deduce finalmente:

$$x_1 = Ax + By + Cz.$$

Con processo perfettamente analogo a quello ora seguito, si può dedurre:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

con a, b, c costanti arbitrarie.

Si può pure ricavare per le altre coordinate y_1, η_1 delle relazioni analoghe alle precedenti e perciò, per contemplare ancora i casi in cui le due relazioni che danno x_1, y_1 o quelle che danno ξ_1, η_1 non siano indipendenti fra loro (il che avverrebbe quando le x_1 e y_1 o le ξ_1 e η_1 fossero legate fra loro da una

particolare relazione lineare), esamineremo separatamente tre sottocasi, a seconda che ha luogo una sola relazione della 1.^a specie e una sola della 2.^a, ovvero due della 1.^a specie e una della 2.^a (o inversamente una della 1.^a e due della 2.^a specie), ovvero due relazioni della 1.^a specie e due della 2.^a.

Sottocaso I.^o — Essendo ora:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + (Cc - 1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta + \\ + Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + y_1\eta_1 = 0.$$

Qualunque sia il valore delle costanti A, B, C, a, b, c , a volere che tale relazione sia soddisfatta identicamente, si richiede che sia: $y_1\eta_1 = 0$, e quindi si cade nel caso c) già trattato.

Sottocaso II.^o — Essendo ora:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + (Cc - 1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta + \\ + Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + Ex\eta_1 + Fy\eta_1 + Gz\eta_1 = 0,$$

e sarà un'identità quando si abbia:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Cc - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ac = 0; \\ Ba = 0; \quad Bc = 0; \quad Ca = 0; \quad Cb = 0; \quad E = 0; \quad F = 0; \quad G = 0.$$

Ora le prime tre equazioni richiedono che A, B, C, a, b, c siano differenti da zero ed allora le altre sei seguenti non possono essere soddisfatte.

Sottocaso III.^o — Ora essendo:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta; \\ \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa + Ee - 1)x\xi + (Bb + Ff - 1)y\eta + (Cc + Gg - 1)z\zeta + \\ + (Ab + Ef)x\eta + (Ac + Eg)x\zeta + (Ba + Fe)y\xi + (Bc + Fg)y\zeta + \\ + (Ca + Ge)z\xi + (Cb + Gf)z\eta = 0,$$

ed è un'identità quando:

$$\begin{aligned} Aa + Ee - 1 = 0; \quad Bb + Ff - 1 = 0; \quad Cc + Gg - 1 = 0; \quad Ab + Ef = 0; \\ Ac + Eg = 0; \quad Ba + Fe = 0; \quad Bc + Fg = 0; \quad Ca + Ge = 0; \quad Cb + Gf = 0. \end{aligned}$$

Da queste relazioni si ricava:

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C}{G} = -\frac{e}{a} = -\frac{f}{b} = -\frac{g}{c};$$

chiamando $\frac{1}{m}$ il valore comune di questi rapporti eguali, si ricava:

$$E = mA, \quad F = mB, \quad G = mC, \quad e = -\frac{1}{m}a, \quad f = -\frac{1}{m}b, \quad g = -\frac{1}{m}c,$$

coi quali valori si riconosce l'impossibilità di soddisfare alle prime tre equazioni.

Riassumendo, si ha che nel caso e) non esiste alcuna soluzione.

f)

Nel caso presente la condizione da soddisfare è la stessa (1); dividendone ambo i membri per $z\zeta_1$ e derivando l'equazione ottenuta successivamente rapporto a s e σ , si ha:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)' \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_1}\right)' + \left(\frac{y_1}{z}\right)' \left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)' = \left(\frac{x}{z}\right)' \left(\frac{\xi}{\zeta_1}\right)' + \left(\frac{y}{z}\right)' \left(\frac{\eta}{\zeta_1}\right)'.$$

Dividendo ambi i membri di quest'equazione per $\left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)' \left(\frac{y}{z}\right)'$ e derivando poi l'equazione ottenuta rapporto ad s e σ successivamente, si ottiene:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]' \cdot \left[\frac{\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_1}\right)'}{\left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)'}\right]' = \left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]' \cdot \left[\frac{\left(\frac{\xi}{\zeta_1}\right)'}{\left(\frac{\eta}{\zeta_1}\right)'}\right]',$$

dalla quale si deduce:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]' = A \left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]',$$

con A costante. Integrando e indicando con B un'altra costante, si ha:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} = A \frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} + B,$$

da cui:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)' = A \left(\frac{x}{z}\right)' + B \left(\frac{y}{z}\right)',$$

e con un'altra integrazione:

$$\frac{x_1}{z} = A \frac{x}{z} + B \frac{y}{z} + C,$$

ciò che dà:

$$x_1 = Ax + By + Cz.$$

Analogamente si arriverebbe a una relazione della forma:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

con a, b, c costanti; dunque le coordinate dei punti di L_1 sono legate a quelle dei punti di L e le coordinate dei punti di Λ_1 a quelle dei punti di Λ da relazioni lineari; ma siccome le relazioni di una specie e dell'altra possono essere una, due o tre, si avranno in tutto da considerare i seguenti 6 sottocasi:

Numero delle relazioni di 1. ^a specie.	1	1	2	1	3	2	2	3	3
Numero delle relazioni di 2. ^a specie.	1	2	1	3	1	2	3	2	3
	ovvero			ovvero			ovvero		
Numero dei sottocasi .	I. ^o	II. ^o		III. ^o		IV. ^o	V. ^o	VI. ^o	

Sottocaso I.^o — Avendosi:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + (Cc - 1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta + \\ + Bay\xi + Bcy\zeta + Cax\xi + Cbz\eta + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 = 0.$$

Onde questa condizione possa essere identicamente soddisfatta con valori par-

ticolari delle costanti A, B, C, a, b, c , si richiede che sia $y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 = 0$ ed allora, il 1.° membro di (1) riducendosi a un termine solo, entriamo in un caso già considerato.

Sottocaso II.° — Ora abbiamo:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

e perciò dobbiamo soddisfare identicamente alla condizione:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + (Cc - 1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta + Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + Ex\eta_1 + Fy\eta_1 + Gz\eta_1 + z_1\zeta_1 = 0,$$

la quale richiede che sia $z_1\zeta_1 = 0$; allora il 1.° membro di (1) si riduce a due termini e cadiamo quindi in un caso già contemplato.

Sottocaso III.° — Si ha:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad z_1 = Hx + Ly + Mz; \\ \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

e perciò dovrà essere identicamente:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + (Cc - 1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta + Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + Ex\eta_1 + Fy\eta_1 + Gz\eta_1 + Hx\zeta_1 + Ly\zeta_1 + Mz\zeta_1 = 0.$$

Deve quindi essere:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Cc - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ac = 0; \\ Ba = 0; \quad Bc = 0; \quad Ca = 0; \quad Cb = 0; \\ E = 0; \quad F = 0; \quad G = 0; \quad H = 0; \quad L = 0; \quad M = 0.$$

Le prime tre relazioni insegnano che A, B, C, a, b, c sono diverse da zero ed allora non possono essere soddisfatte le sei seguenti.

Sottocaso IV.° — Si ha:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \\ \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta; \quad \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta,$$

e perciò si dovrà verificare identicamente la relazione:

$$(Aa + Ee - 1)x\xi + (Bb + Ff - 1)y\eta + (Cc + Gg - 1)z\zeta + \\ (Ab + Ef)x\eta + (Ac + Eg)x\zeta + (Ba + Fe)y\xi + (Bc + Fg)y\zeta + \\ + (Ca + Ge)z\xi + (Cb + Gf)z\eta + z_1\zeta_1 = 0.$$

Dando alle costanti arbitrarie dei valori qualunque, questa relazione non può essere soddisfatta se non quando $z, \zeta_1 = 0$; in tal caso il 1.º membro della (1) si riduce a due termini e si rientra quindi in un caso già studiato.

Sottocaso V.º — Abbiamo:

$$y_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \\ \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta; \quad \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta; \quad \zeta_1 = h\xi + l\eta + m\zeta,$$

e perciò la condizione da soddisfare è:

$$(Aa + Ee - 1)x\xi + (Bb + Ff - 1)y\eta + (Cc + Gg - 1)z\zeta + \\ + (Ab + Ef)x\eta + (Ac + Eg)x\zeta + (Ba + Fe)y\xi + (Bc + Fg)y\zeta + \\ + (Ca + Ge)z\xi + (Cb + Gf)z\eta + hz_1\xi + lz_1\eta + mz_1\zeta = 0.$$

Dovremo dunque avere:

$$Aa + Ee - 1 = 0; \quad Bb + Ff - 1 = 0; \quad Cc + Gg - 1 = 0; \\ Ab + Ef = 0; \quad Ac + Eg = 0; \quad Ba + Fe = 0; \quad Bc + Fg = 0 \\ Ca + Ge = 0; \quad Cb + Gf = 0; \quad h = 0; \quad l = 0; \quad m = 0.$$

Da queste equazioni si deduce:

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C}{G} = -\frac{e}{a} = -\frac{f}{b} = -\frac{g}{c},$$

e chiamando $\frac{1}{m}$ il valore comune di questi rapporti eguali, si ha:

$$E = mA; \quad F = mB; \quad G = mC; \\ e = -\frac{1}{m}a; \quad f = -\frac{1}{m}b; \quad g = -\frac{1}{m}c.$$

E queste espressioni mostrano l'impossibilità di soddisfare alle prime tre equazioni precedenti.

Sottocaso VI.º — Si ha ora:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad z_1 = Hx + Ly + Mz; \\ \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta; \quad \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta; \quad \zeta_1 = h\xi + l\eta + m\zeta, \quad (15)$$

e la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa + Ee + Hh - 1)x\xi + (Bb + Ff + Ll - 1)y\eta + (Cc + Gg + Mm - 1)z\zeta + \\ + (Ab + Ef + Hl)x\eta + (Ac + Eg + Hm)x\zeta + (Ba + Fe + Lh)y\xi + \\ + (Bc + Fg + Lm)y\zeta + (Ca + Ge + Mh)z\xi + (Cb + Gf + Ml)z\eta = 0,$$

ed è un'identità quando si abbia:

$$\begin{aligned} Aa + Ee + Hh - 1 &= 0; & Bb + Ff + Ll - 1 &= 0; & Cc + Gg + Mm - 1 &= 0; \\ Ab + Ef + Hl &= 0; & Ac + Eg + Hm &= 0; & Ba + Fe + Lh &= 0; \\ Bc + Fg + Lm &= 0; & Ca + Ge + Mh &= 0; & Cb + Gf + Ml &= 0. \end{aligned}$$

Se si pone per semplicità:

$$D = \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ H & L & M \end{vmatrix}, \quad (16)$$

e si suppone che D sia diverso da zero, si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{D}(FM - GL); & b &= \frac{1}{D}(GH - EM); & c &= \frac{1}{D}(EL - FH); \\ e &= \frac{1}{D}(CL - BM); & f &= \frac{1}{D}(AM - CH); & g &= \frac{1}{D}(BH - AL); \\ h &= \frac{1}{D}(BG - CF); & l &= \frac{1}{D}(CE - AG); & m &= \frac{1}{D}(AF - BE). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Le relazioni trovate (15) hanno veramente luogo fra le derivate delle coordinate; ma per quanto è stato osservato anche nei casi *a) d)*, si può ritenere che esse abbiano effettivamente luogo fra le coordinate. Le (15), siccome:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1,$$

ci danno:

$$\begin{aligned} (A^2 + E^2 + H^2)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + (B^2 + F^2 + L^2)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + (C^2 + G^2 + M^2)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \\ + 2(AB + EF + HL)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + 2(AC + EG + HM)\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + \\ + 2(BC + FG + LM)\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Inoltre è noto che deve essere:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

da queste due relazioni si potrebbe ricavare $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ in funzione di $\frac{dx}{ds}$ e quindi

si avrebbero, mediante integrazioni, le espressioni di y e di z in funzione di x , che resterebbe arbitraria. Ma riesce molto più semplice esprimere le coordinate, anzi che per l'arco, per un parametro indipendente qualunque t ; nella prima delle precedenti relazioni passando ai differenziali e ponendo per semplicità:

$$\left. \begin{aligned} A^2 + E^2 + H^2 - 1 &= \alpha; & B^2 + F^2 + G^2 - 1 &= \beta; & C^2 + I^2 + M^2 - 1 &= \gamma \\ AB + EF + HL &= \lambda; & AC + EG + HM &= \mu; & BC + FI + LM &= \nu, \end{aligned} \right\} (18)$$

si ottiene:

$$\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\lambda dx dy + 2\mu dx dz + 2\nu dy dz = 0.$$

Risolvendo quest'equazione rapporto a dz , si ha:

$$dz = -\frac{1}{\gamma}(\mu dx + \nu dy) \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{(\mu^2 - \alpha\gamma)dx^2 + 2(\mu\nu - \gamma\lambda)dx dy + (\nu^2 - \beta\gamma)dy^2};$$

e perciò, se supponiamo che le coordinate x, y siano funzioni note del parametro indipendente t , avremo che la curva L sarà rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t); & y &= y(t); & z &= -\frac{1}{\gamma}(\mu x + \nu y) \pm \\ & \pm \frac{1}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha\gamma)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(\mu\nu - \gamma\lambda)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta\gamma)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt. \end{aligned} \right\} (19)$$

Per la linea Λ si fa un calcolo perfettamente analogo al precedente e si arriva a concludere che, ponendo per semplicità:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + e^2 + h^2 - 1 &= \alpha_1; & b^2 + f^2 + g^2 - 1 &= \beta_1; & c^2 + i^2 + m^2 - 1 &= \gamma_1; \\ ab + ef + hl &= \lambda_1; & ac + eg + hm &= \mu_1; & bc + fi + lm &= \nu_1, \end{aligned} \right\} (20)$$

tale linea può rappresentarsi per mezzo delle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\tau); & \eta &= \eta(\tau); & \zeta &= -\frac{1}{\gamma_1}(\mu_1 \xi + \nu_1 \eta) \pm \\ & \pm \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1 \gamma_1)\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + 2(\mu_1 \nu_1 - \gamma_1 \lambda_1)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1 \gamma_1)\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau, \end{aligned} \right\} (21)$$

essendo τ un parametro indipendente qualunque.

Facendo poi uso delle (15), si trovano pure le equazioni delle altre linee

L_1 e Λ_1 ; la prima di queste sarà quindi rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left(A - \frac{\mu C}{\gamma} \right) x + \left(B - \frac{\nu C}{\gamma} \right) y \pm \\ &\quad \pm \frac{C}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha \gamma) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2(\mu \nu - \gamma \lambda) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta \gamma) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt \\ y_1 &= \left(E - \frac{\mu G}{\gamma} \right) x + \left(F - \frac{\nu G}{\gamma} \right) y \pm \\ &\quad \pm \frac{G}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha \gamma) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2(\mu \nu - \gamma \lambda) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta \gamma) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt \\ z_1 &= \left(H - \frac{\mu M}{\gamma} \right) x + \left(L - \frac{\nu M}{\gamma} \right) y \pm \\ &\quad \pm \frac{M}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha \gamma) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2(\mu \nu - \gamma \lambda) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta \gamma) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Invece la linea Λ_1 è rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \left(a - \frac{\mu_1 c}{\gamma_1} \right) \xi + \left(b - \frac{\nu_1 c}{\gamma_1} \right) \eta \pm \\ &\quad \pm \frac{c}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1 \gamma_1) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2(\mu_1 \nu_1 - \gamma_1 \lambda_1) \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1 \gamma_1) \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)^2} \cdot d\tau \\ \eta_1 &= \left(e - \frac{\mu_1 g}{\gamma_1} \right) \xi + \left(f - \frac{\nu_1 g}{\gamma_1} \right) \eta \pm \\ &\quad \pm \frac{g}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1 \gamma_1) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2(\mu_1 \nu_1 - \gamma_1 \lambda_1) \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1 \gamma_1) \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)^2} \cdot d\tau \\ \zeta_1 &= \left(h - \frac{\mu_1 m}{\gamma_1} \right) \xi + \left(l - \frac{\nu_1 m}{\gamma_1} \right) \eta \pm \\ &\quad \pm \frac{m}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1 \gamma_1) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2(\mu_1 \nu_1 - \gamma_1 \lambda_1) \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1 \gamma_1) \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)^2} \cdot d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Abbiamo perciò il teorema: la superficie di traslazione S nella quale la direttrice L e la generatrice Λ sono le linee rappresentate dalle equazioni (19), (21) è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 in cui la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni (22), (23), colla condizione che L_1 sia la deformata di L e Λ_1 la deformata di Λ . In queste equazioni $A, B, C, E, F, G, H, L, M$ sono costanti arbitrarie; le costanti

$a, b, c, e, f, g, h, l, m$ sono date dalle (17), (16); le costanti $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ e $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sono date dalle (18), (20).

Nella deformazione ora trovata le linee L, Λ sono a doppia curvatura, ma nessuna di esse è completamente arbitraria; avvenuta la deformazione, le linee L_1, Λ_1 in cui si trasformano le prime sono pure a doppia curvatura e si ha che L_1 è dello stesso ordine di L e Λ_1 dello stesso ordine di Λ .

§ III.

Casi particolari delle deformazioni studiate. — Consideriamo il caso particolare in cui le coordinate x_1, y_1, z_1 sono proporzionali alle corrispondenti x, y, z e le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 sono proporzionali alle corrispondenti ξ, η, ζ ; avremo allora:

$$x_1 = mx, \quad y_1 = ny, \quad z_1 = pz; \quad \xi_1 = \frac{1}{m} \xi, \quad \eta_1 = \frac{1}{n} \eta, \quad \zeta_1 = \frac{1}{p} \zeta,$$

essendo m, n, p costanti. Essendo per di più:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{ds} &= \sqrt{1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - m^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - n^2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \\ \frac{d\zeta_1}{d\sigma} &= \sqrt{1 - \left(\frac{d\xi_1}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}, \end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\frac{dz_1}{ds} = p \frac{dz}{ds}, \quad \frac{d\zeta_1}{d\sigma} = \frac{1}{p} \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

avremo:

$$\frac{\sqrt{1 - m^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - n^2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{dz}{ds}} = p; \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}}{\frac{d\zeta}{d\sigma}} = \frac{1}{p}.$$

Se dunque poniamo:

$$\frac{m^2 - 1}{1 - p^2} = \alpha, \quad \frac{n^2 - 1}{1 - p^2} = \beta, \quad \frac{\frac{1}{m^2} - 1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \alpha, \quad \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \beta,$$

risulta:

$$m = \sqrt{\frac{1+a}{1+\alpha}}; \quad n = \sqrt{\frac{1+b}{1+\beta}}; \quad p = \sqrt{\frac{z(1+a)}{a(1+\alpha)}} = \sqrt{\frac{\beta(1+b)}{b(1+\beta)}},$$

e quindi necessariamente:

$$\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta(1+\alpha)} = \frac{a(1+b)}{b(1+a)}. \quad (24)$$

Le linee L e Λ sono allora rappresentate dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t); & y &= y(t); & z &= \int \sqrt{a \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + b \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt \\ \xi &= \xi(\tau); & \eta &= \eta(\tau); & \zeta &= \int \sqrt{\alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \beta \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)^2} \cdot d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

e le linee L_1 , Λ_1 dalle altre:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{1+a}{1+\alpha}} x(t); & y_1 &= \sqrt{\frac{1+b}{1+\beta}} y(t); \\ z_1 &= \sqrt{\frac{\alpha(1+a)}{a(1+\alpha)}} \int \sqrt{a \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + b \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt \\ \xi_1 &= \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+a}} \xi(\tau); & \eta_1 &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1+b}} \eta(\tau); \\ \zeta_1 &= \sqrt{\frac{a(1+\alpha)}{\alpha(1+a)}} \int \sqrt{\alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \beta \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)^2} \cdot d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Dunque onde le linee L , Λ rappresentate dalle (25) si possano assumere come direttrice e generatrice di una superficie di traslazione S deformabile in una superficie di egual natura S_1 , è necessario e sufficiente che le costanti a , b , α , β verifichino la condizione (24); in tal caso la deformazione che riduce S a S_1 riduce le linee L , Λ nelle altre L_1 , Λ_1 definite dalle equazioni (26).

Mettiamo la condizione che le due linee L , L_1 si proiettino sui piani coordinati $z=0$, $z_1=0$ in due curve simili; si potranno disporre tali curve in modo, che risulti $m=n$ ed allora anche le due linee Λ , Λ_1 si proiettano sui piani coordinati $\zeta=0$, $\zeta_1=0$ in due curve simili.

Avendosi poi in questo caso:

$$z = \sqrt{\frac{m^2-1}{1-p^2}} \cdot \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \cdot dt,$$

se si pone:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t,$$

essendo R una funzione di t , risulta:

$$z = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{1 - p^2}} \cdot \int \sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Questa relazione dimostra che L è un'elica segante le generatrici del cilindro sul quale è descritta sotto l'angolo i dato come segue:

$$\cot i = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{1 - p^2}}.$$

Da questa si ricava:

$$p = \sqrt{1 + (1 - m^2) \tan^2 i},$$

e allora per la coordinata z_i dei punti di L_i si ha:

$$z_i = \sqrt{1 + (1 - m^2) \tan^2 i} \cdot z,$$

la quale mostra che la linea L_i è pure un'elica e sega le generatrici del cilindro che la contiene sotto l'angolo i_i tale, che:

$$\sin i_i = m \sin i.$$

Per la linea Λ abbiamo:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - 1}{1 - \frac{1}{p^2}}} \int \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

e quindi, se si pone:

$$\xi = \rho \cos \tau, \quad \eta = \rho \sin \tau,$$

essendo ρ funzione di τ , sarà:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - 1}{1 - \frac{1}{p^2}}} \int \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

la quale dimostra che Λ è un'elica segante le generatrici del cilindro sotto l'angolo ι tale, che:

$$\cot \iota = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - 1}{1 - \frac{1}{p^2}}} = \frac{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 i}}{m \sin i}.$$

Avremo dunque:

$$\operatorname{sen} \iota = m \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} i_1,$$

da cui risulta:

$$\iota = i_1.$$

Per la linea Λ_1 deformata di Λ si ha:

$$\zeta_1 = \frac{1}{p} \zeta,$$

e quindi anche Λ_1 è un'elica segante le generatrici del cilindro che la contiene sotto l'angolo ι_1 tale, che:

$$\cos \iota_1 = \frac{1}{p} \cos \iota = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - m^2) \tan^2 i}} \cos \iota;$$

e poichè si è trovato $\iota = i_1$, sarà:

$$\cos \iota_1 = \frac{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1 + (1 - m^2) \tan^2 i}} \cos i,$$

da cui risulta:

$$\iota_1 = i.$$

Dunque se nella deformazione di una superficie di traslazione $S (L, \Lambda)$ in un'altra della stessa specie $S_1 (L_1, \Lambda_1)$ le linee L, L_1 si proiettano sui piani coordinati $z=0, z_1=0$ in due curve simili $[x=x(t), y=y(t)], [x_1=mx(t), y_1=my(t)]$ anche le linee Λ, Λ_1 si proiettano sui piani coordinati $\zeta=0, \zeta_1=0$ in due curve simili $[\xi=\xi(\tau), \eta=\eta(\tau)], \left[\xi_1=\frac{1}{m}\xi(\tau), \eta_1=\frac{1}{m}\eta(\tau) \right]$ e le quattro linee $L, \Lambda, L_1, \Lambda_1$ sono altrettante eliche. La direttrice L della superficie primitiva S e la generatrice Λ_1 della deformata S_1 segano le generatrici dei rispettivi cilindri sotto lo stesso angolo i ; la generatrice Λ della superficie primitiva S e la direttrice L_1 della deformata S_1 segano le generatrici dei rispettivi cilindri sotto il medesimo angolo ι ; e fra le due inclinazioni i, ι ha luogo la relazione: $\operatorname{sen} \iota = m \operatorname{sen} i$.

Una curiosa deformazione si ottiene come caso particolare di quella ora trovata.

Si supponga che le sezioni rette dei cilindri contenenti le eliche L, Λ siano eguali; allora $\xi(\tau)$ e $\eta(\tau)$ sono di τ le stesse funzioni che $x(t)$ e $y(t)$ lo sono di t . Le due eliche L, Λ_1 essendo allora tracciate sopra due cilindri

simili e segnando le loro generatrici sotto il medesimo angolo sono linee simili; lo stesso avviene delle altre due eliche Λ , L_1 .

Siccome poi si deduce $m = \frac{\text{sen } \iota}{\text{sen } i}$, abbiamo deformando la superficie di traslazione S in cui la direttrice L e la generatrice Λ sono due eliche descritte sullo stesso cilindro e seganti le generatrici sotto gli angoli i , ι in una nuova superficie di traslazione S_1 , la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 della superficie deformata sono rispettivamente simili alla generatrice Λ e alla direttrice L della superficie primitiva. Il rapporto di similitudine di L_1 a Λ è $\frac{\text{sen } \iota}{\text{sen } i}$ e quello di Λ_1 a L è $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \iota}$.

Nella deformazione studiata nel caso d) supponiamo che la generatrice Λ sia un'elica tracciata sopra un cilindro colle generatrici parallele all'asse delle ζ e segante queste generatrici sotto l'angolo costante ι ; avremo allora:

$$\zeta = \cot \iota \int \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

la quale espressione, confrontata colla terza (6), in cui porremo per semplicità:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{B^2 + E^2 - (AE - BC)^2}{(AE - BC)^2}; \quad n = -\frac{AB + CE}{(AE - BC)^2}; \\ p &= \frac{A^2 + C^2 - (AE - BC)^2}{(AE - BC)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

diviene:

$$(m - \cot^2 \iota) d\xi^2 + 2n d\xi d\eta + (p - \cot^2 \iota) d\eta^2 = 0.$$

Si può soddisfare a questa equazione in due modi, o lasciando arbitrari i coefficienti e determinando in modo conveniente le variabili ξ , η , ovvero lasciando arbitrarie tali variabili e determinando in modo conveniente i coefficienti.

1.° modo. — Risolvendo la precedente equazione rapporto a $d\eta$ e poi integrando, si ottiene:

$$\eta = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - (p - \cot^2 \iota)(m - \cot^2 \iota)}}{p - \cot^2 \iota} \xi + \text{cost.},$$

la quale mostra che Λ si riduce a una curva piana, caso che escludiamo:

2.° modo. — Dovendosi avere:

$$m = \cot^2 \iota, \quad n = 0, \quad p = \cot^2 \iota,$$

la costante A resta arbitraria e per le altre B, C, E otteniamo:

$$B = \sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}, \quad C = -\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}, \quad E = A.$$

Le (5) dànno allora:

$$a = \frac{A}{\text{sen}^2 \iota}, \quad b = \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}}{\text{sen}^2 \iota}, \quad c = -\frac{\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}}{\text{sen}^2 \iota}, \quad e = \frac{A}{\text{sen}^2 \iota},$$

e per le coordinate dei punti delle linee L, Λ e dei punti delle linee L_1, Λ_1 abbiamo:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = 0 \quad (28)$$

$$\xi = \xi(\tau); \quad \eta = \eta(\tau); \quad \zeta = \cot \iota \int \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ax(t) + \sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2} \cdot y(t); & y_1 &= -\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2} \cdot x(t) + Ay(t); \\ z_1 &= \cos \iota \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A}{\text{sen}^2 \iota} \xi(\tau) + \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}}{\text{sen}^2 \iota} \eta(\tau); & \eta_1 &= -\frac{\sqrt{\text{sen}^2 \iota - A^2}}{\text{sen}^2 \iota} \xi(\tau) + \frac{A}{\text{sen}^2 \iota} \eta(\tau); \\ \zeta_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Dunque una superficie di traslazione in cui la direttrice L e la generatrice Λ sono rispettivamente la linea piana (28) e l'elica (29) entrambe arbitrarie, si può deformare in un'altra superficie di traslazione in cui la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 sono rispettivamente l'elica (30) e la linea piana (31).

Se nelle formole (11), (12) supponiamo che la $\xi_1(\sigma)$ sia dell'arco σ la stessa funzione che la $x(s)$ è dell'arco s , le due linee piane L, Λ_1 sono eguali; se per di più supponiamo che sia $B = C$, le (13), (14) mostrano che le due linee a doppia curvatura L_1, Λ sono perfettamente eguali.

Potremo dunque dire la superficie di traslazione S nella quale la direttrice L e la generatrice Λ sono rappresentate dalle equazioni (11), (14) nelle quali $B = C$ e inoltre $\xi_1(\sigma)$ è di σ la stessa funzione che $x(s)$ lo è di s , può deformarsi in un'altra superficie di traslazione S_1 in modo, che la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 della superficie deformata siano rispettivamente eguali alla generatrice Λ e alla direttrice L della superficie primitiva.