

## Ueber eine hinreichende Bedingung für das Maximum und Minimum einfacher Integrale.

Von

G. v. ESCHERICH in Wien.

In den folgenden Blättern wird versucht die hinreichende Bedingung, die Herr Kneser\*) für das Extremum einfacher Integrale angab, unter allgemeineren Voraussetzungen herzuleiten. Die hierbei angestellten Betrachtungen stehen in engem Zusammenhange mit den Entwicklungen, die ich in früheren Untersuchungen über die zweite Variation der einfachen Integrale veröffentlichte\*\*), und führen von hier aus durch zwei sehr nahe liegende Bemerkungen (§ 3) zum Ziele.

### § 1.

Zum leichteren Verständnisse sollen zunächst die Voraussetzungen und Sätze, auf denen die späteren Entwicklungen beruhen, zusammengestellt werden.

1) Es wird vorausgesetzt: 1) dass die Functionen

$$f(x, y_1 \cdots y_n; y'_1 \cdots y'_n); \quad \varphi_k(x, y_1 \cdots y_n; y'_1 \cdots y'_n) \quad (k=1, 2 \cdots m < n)$$

samt ihren drei ersten partiellen Ableitungen nach den Veränderlichen  $x, y_1 \cdots y_n, y'_1 \cdots y'_n$  in einem homogenen Continuum ( $\mathfrak{C}$ \*\*\*) dieser Veränderlichen, in dem  $a \leq x \leq b$  ist, stetig sind. 2) Dass das System von Differentialgleichungen

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0; & \frac{dy_i}{dx} = y'_i \quad (i=1, 2 \cdots n), \\ \varphi_k(x, y_1 \cdots y_n; y'_1 \cdots y'_n) = 0 & (k=1, 2 \cdots m), \end{cases}$$

\*) Diese Annalen Bd. 51, pag. 321.

\*\*) Die zweite Variation einfacher Integrale. Mitteilung I, II, III, Wien. Ber. 1898, Bd. CVII, pag. 1191, 1267, 1383. Mitteilung IV, Wien. Ber. 1899, Bd. CVIII, pag. 1269. Sie werden hier als Mitt. angeführt.

\*\*\*) Pringsheim, Math. Encyclopädie Bd. II, pag. 46.



oder Cauchy-Picard'schen Methode hergeleitet werden\*). Sie liegt dann in dem zu ihren Anfangswerthen in  $a$  gehörigen Regularitätsintervalle\*\*) und ist wegen Voraussetzung (1) nach diesen differentiirbar\*\*\*).

2) Die gefundene Lösung erfüllt eine nothwendige Bedingung, damit das Integral

$$(1) \quad \int_a^b f(x, y_1 \cdots y_n, y'_1 \cdots y'_n) dx = \int_a^b F dx = J \quad \left( \frac{dy_k}{dx} = y'_k \right)$$

für die  $y_1, y_2, \cdots y_n$ , die in  $a$  und  $b$  die vorgegebenen Werthe besitzen und den Gleichungen

$$\varphi_k(x, y_1 \cdots y_n, y'_1 \cdots y'_n) = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m)$$

genügen, zu einem Max. oder Min. werde. Sind die Functionen  $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$  sammt ihren ersten Ableitungen von  $x$  in  $ab$  eindeutig und stetig, und verschwinden die  $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$  in den Endpunkten von  $ab$ , so wird, wenn man den  $y_1, y_2, \cdots y_n$  bez. die Variationen  $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$  ertheilt, die zugehörige zweite Variation des Integrals

$$(2) \quad \delta^2 J = \int_a^b \sum_{i,k=1}^n (a_{ik} \eta'_i \eta'_k + 2b_{ik} \eta'_i \eta_k + c_{ik} \eta_i \eta_k) dx,$$

$$(3) \quad a_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}; \quad b_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k}; \quad c_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k};$$

wo  $F(x, y_1 \cdots y_n; y'_1 \cdots y'_n)$  längs  $(C)$  zu nehmen ist. Kann das Gleichungssystem

$$\varphi_k(x, y_1 + \eta_1, \cdots y_n + \eta_n, y'_1 + \eta'_1, \cdots y'_n + \eta'_n) = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m),$$

dem die  $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$  längs  $(C)$  genügen sollen, durch die Gleichungen

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \eta'_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \eta_i \right) \equiv \sum_{i=1}^n (\alpha_{ki} \eta'_i + \beta_{ki} \eta_i) \equiv \omega_k(\eta) = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots m)$$

ersetzt werden, so lässt sich  $\delta^2 J$  transformiren mit Hilfe des Systems von Differentialgleichungen der  $\Pi^{\text{ten}}$  Ordnung

\*) Die Grundzüge für diese Behandlung sind gegeben in Mitt. I (§ II, 2, p. 128); in weiterer Ausführung für den Fall analytischer Functionen bei Kneser l. c. p. 340, § 5.

\*\*) Painlevé Bull. soc. math. t. 27, 1899.

\*\*\*) Bendixon Bull. soc. math. t. 24, 1896 und G. v. Escherich, Wien. Ber. 1899 Bd. 188, p. 622.

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \psi_i(z, r) &= \sum_{k=1}^n \left[ c_{ki} z_k + b_{ki} z_k' - \frac{d}{dx} (b_{ik} z_k + a_{ik} z_k') \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left( \beta_{ki} r_k - \frac{d}{dx} (\alpha_{ki} r_k) \right) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ \omega_i(z) &= \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik} z_k' + \beta_{ik} z_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right.$$

das ich in Ermangelung einer schon bestehenden Bezeichnung das accessorische System von Differentialgleichungen nannte\*). Dasselbe hat die Eigenschaft sich selbst adjungirt zu sein, denn bezeichnet man mit  $(z, r)$  das System von  $(n+m)$  Grössen  $z_1, z_2, \dots, z_n; r_1, \dots, r_m$  und mit  $(u, \rho)$  ein anderes derartiges System, so ist:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n u_i \psi_i(z, r) + \sum_{k=1}^m \rho_k \omega_k(z) - \left[ \sum_{i=1}^n z_i \psi_i(u, \rho) + \sum_{k=1}^m r_k \omega_k(u) \right] \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{i,k} [a_{ik} (z_i u_k' - u_i z_k') + b_{ik} (z_i u_k - u_i z_k)] \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} (r_k u_i - \rho_k z_i) \right\} \equiv \frac{d}{dx} \psi(z, r; u, \rho);$$

der bilineare Differentialausdruck (6)  $\psi(z, r; u, \rho)$  hat die Eigenschaft für je zwei Lösungen  $(z, r)$  und  $(u, \rho)$  von (5) im ganzen Intervalle  $ab$  einen constanten Werth anzunehmen. Im Falle dieser Null ist, nenne ich die beiden Integralsysteme oder Lösungen conjugirt. Es giebt nun Gruppen von Lösungen der Gleichungen (5), in denen je zwei zu einander conjugirt sind. Die grösste Anzahl von linear-unabhängigen Lösungen, die zu einer solchen Gruppe zusammentreten können, ist  $n$ : sie bilden dann ein System conjugirter Lösungen oder kurz conjugirtes System.

Sind  $(u^1, \rho^1); (u^2, \rho^2) \dots (u^n, \rho^n)$  die  $n$  Glieder eines solchen Systems, so soll es mit  $(u^k, \rho^k)$  bezeichnet und

$$\sum \pm u_1^1 u_2^2 \dots u_n^n = \Delta(u^1, u^2 \dots u^n)$$

seine Determinante genannt werden. Es giebt unendlich viele conjugirte Systeme, insbesondere sind auch, da für  $u_i = z_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) in  $\xi$ , auch  $\psi(z, r, u, \rho) = 0$  wird, jedem Punkte  $\xi$  von  $ab$  unendlich viele zugeordnet, welche die dem Punkte  $\xi$  conjugirten heissen mögen. Ihre Determinanten unterscheiden sich nur um von Null verschiedene von  $x$

\*) Seine Integration und Eigenschaften sind in Mitt. I (IX, pag. 1234) und Mitt. II (pag. 1294—1326) untersucht.

unabhängige Factoren und verschwinden insgesamt in  $\xi$ ; mit  $\Delta(x, \xi)$  werde in üblicher Weise irgend eine von ihnen bezeichnet.

3) Besteht ein conjugirtes System  $((u^k, \rho^k))$ , dessen Determinante in  $\alpha\beta$  ( $a \leq \alpha < \beta \leq b$ ) nicht verschwindet und erfüllen die  $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ , die in  $a\alpha$  und  $b\beta$  Null seien, in  $ab$  die früher angegebenen Bedingungen, so lässt sich, wie Clebsch zuerst zeigte,  $\delta^2 J$  in eine reducirte Form bringen\*):

$$(7) \quad \delta^2 J = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k dx,$$

wo

$$(8) \quad \xi_i = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \dots u^n)} \begin{vmatrix} \eta'_i & ; & \eta_1, \dots \eta_n \\ (u^1_i)' & ; & u^1_1, \dots u^1_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u^n_i)' & ; & u^n_1, \dots u^n_n \end{vmatrix}$$

und also

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m).$$

Aus dieser reducirten Form ergibt sich als nothwendige Bedingung, damit  $\delta^2 J$  ihr Zeichen nicht ändere und somit für das Eintreten eines Extremums\*\*):

$$(10) \quad \text{die Form } \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k \text{ mit den Nebenbedingungen}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

muss in jedem Punkte von  $ab$  definit sein und in allen vom selben Zeichen.

Ist speciell  $\Delta(x, a)$ , die Determinante eines dem Anfangspunkte  $a$  conjugirten Systems, nirgends in  $(a + 0, b)$  Null, so giebt es unendlich viele conjugirte Systeme, deren Determinante in  $ab$  nirgends verschwindet\*\*\*).

\*) Die Ableitung bei Mayer (J. f. Math. Bd. 69) und die beiden von mir gegebenen (Mitt. I und IV) setzen voraus, dass die  $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$  auch zweite Derivirte besitzen. Doch lässt sich, wie ich an einem anderen Orte zeigen werde, dieser Uebelstand leicht beseitigen.

\*\*) Mitt. III (pag. 1384, XVII).

\*\*\*) Dieser Satz wurde zuerst von Mayer (l. c.) unter einschränkenderen Voraussetzungen, die zum Theil sogar über das Integrations-Intervall  $ab$  hinausgehen, bewiesen. Er gilt auch ohne dieselben, wie aus Mitt. III, pag. 1412, XIX hervorgeht, wo der Beweis für die analoge Voraussetzung, dass  $\Delta(x, b)$  in  $(a, b - 0)$  nicht verschwinde, unter den im Texte gemachten Annahmen geführt wird.

## § 2.

Sind die in  $ab$  sammt ihren ersten Derivirten eindeutigen und stetigen Functionen des  $x: \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$  in  $a$  und  $b$  Null, und genügen sie längs  $(C)$  den Gleichungen

$$\varphi_k(x, y_1 + \eta_1 \dots y_n + \eta_n; y'_1 + \eta'_1 \dots y'_n + \eta'_n) = 0 \quad (k=1, 2 \dots m),$$

so wird, wenn die  $y_1 \dots y_n, y'_1 \dots y'_n$  der Curve  $(C)$  durch die Variationen  $\eta_1 \dots \eta_n, \eta'_1 \dots \eta'_n$  wieder in Punkte des Continuum (C) übergeführt werden, die Darstellung des Restes der Taylor'schen Formel durch ein bestimmtes Integral für das Integral (1) die Aenderung ergeben:

$$(2^*) \quad \Delta J = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i,k} (\bar{a}_{ik} \eta'_i \eta'_k + 2\bar{b}_{ik} \eta'_i \eta_k + \bar{c}_{ik} \eta_i \eta_k) dx,$$

wo bekanntlich

$$(3^*) \quad \bar{a}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y'_i \partial y'_k} (1-\lambda) d\lambda; \quad \bar{b}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y'_i \partial y_k} (1-\lambda) d\lambda;$$

$$\bar{c}_{ik} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y_i \partial y_k} (1-\lambda) d\lambda,$$

und in  $(\cdot)$  das Argument:  $x, y_1 + \lambda \eta_1, \dots y_n + \lambda \eta_n; y'_1 + \lambda \eta'_1, \dots y'_n + \lambda \eta'_n$  einzusetzen ist. Die  $m$  Bedingungsgleichungen für die  $\eta$  lassen sich analog in die Form bringen

$$(4^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_k(\eta) = \sum_{i=1}^n (\bar{\alpha}_{ki} \eta'_i + \bar{\beta}_{ki} \eta_i) = 0 \quad (i=1, 2 \dots m), \\ \bar{\alpha}_{ki} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_k(\cdot)}{\partial y'_i} d\lambda, \quad \bar{\beta}_{ki} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_k(\cdot)}{\partial y_i} d\lambda, \end{array} \right.$$

wo in  $(\cdot)$  wieder das obige Argument gehört. Wegen der Voraussetzungen in § 1, 1) sind die Grössen in  $(3^*)$  und  $(4^*)$  stetige Functionen der  $\eta$  und  $\eta'$ , und daher ebenso wie diese stetige Functionen des  $x$  in  $ab$ . Mit unendlich klein werdenden  $\eta$  und  $\eta'$  gehen sie daher in die gleichen ungestrichenen Buchstaben von (3) und (4) über.

Die Analogie dieser Formeln mit denen in § 1, 2) führt wieder zu einem analogen accessorischen Systeme von Differentialgleichungen:

$$(5^*) \quad \bar{\psi}_i(z, r) = 0 \quad (i=1, 2 \dots n); \quad \bar{\omega}_i(z) = 0 \quad (i=1, 2 \dots m),$$

das aus (5) erhalten wird, indem man darin die Buchstaben überstreicht. Dasselbe kann in gleicher Weise zur Transformation von  $\Delta J$  verwendet werden, wie (5) zu der von  $\delta^2 J$ : Besteht ein conjugirtes System von (5\*)  $(\bar{x}^k, \bar{r}^k)$  dessen Determinante in  $ab$  nicht verschwindet, so kann  $\Delta J$  in

$$(7^*) \quad \Delta J = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i,k} \bar{a}_{ik} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k dx$$

übergeführt werden, wo die  $\bar{\xi}$  durch den analogen Ausdruck von (8) gegeben sind und den (9) analogen Gleichungen genügen. Ist daher überdies  $\sum \bar{a}_{ik} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k$  nicht im ganzen Intervall  $ab$  Null und überall gleich bezeichnet, so hat auch  $\Delta J$  dieses Zeichen.

Diese Annahmen treffen nun für genügend kleine  $|\eta|$  und  $|\eta'|$  zu unter den Voraussetzungen, dass: 1)  $\Delta(x, a)$  in § 1, 3) in  $(a+0, b)$  nicht verschwindet und 2) die nothwendige Bedingung (10) erfüllt ist.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich als Folge der beiden nachstehenden Bemerkungen.

### § 3.

1) Ist  $\Phi(x, v_1, \dots, v_n)$  eine stetige Function der  $x, v_1, \dots, v_n$  in einem homogenen Continuum  $(\mathfrak{B})$ , dem auch die Stellen  $a \leq x \leq b, v_1 = 0, \dots, v_n = 0$  angehören und ist  $\Phi(x, 0 \dots 0)$  in  $ab$  nirgends Null, so besteht immer eine Zahl  $\varepsilon < 0$ , so dass auch  $\Phi(x, v_1, \dots, v_n)$  nicht Null wird, für alle Punkte von  $(\mathfrak{B})$ , in denen  $|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n| < \varepsilon$  ist. Setzt man  $v_k = \chi_k(x)$  ( $k=1, 2 \dots n$ ), einer in  $ab$  stetigen Function von  $x$ , so wird auch  $\Phi(x, \chi_1(x), \dots, \chi_n(x))$  in  $ab$  nicht Null, wenn daselbst

$$|\chi_k(x)| < \varepsilon \quad (k=1, 2 \dots n)$$

bleibt.

Existirt insbesondere zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $a \leq x \leq b$ :  $|\Phi(x, \chi_1(x) \dots \chi_n(x)) - \Phi(x, 0 \dots 0)| < \varepsilon$ , sobald in  $ab$  überall  $|\chi_k(x)| < \delta$  ( $k=1, 2 \dots n$ ) ist, und verschwindet die stetige Function von  $x$ :  $\Phi(x, 0 \dots 0)$  in  $ab$  nicht, so wird daselbst auch  $\Phi(x, \chi_1(x) \dots \chi_n(x))$  nicht Null, wenn  $\delta$  unter einer von Null verschiedenen, oberen Grenze bleibt.

2) Es seien  $f_k(x, w_1 \dots w_m, y_1, \dots, y_n)$  ( $k=1, 2 \dots n$ ) sammt ihren ersten partiellen Ableitungen nach den  $w$  und  $y$  in einen homogenen Continuum  $(\mathfrak{B})$ , dem die Stellen  $x_0, 0, \dots, 0, y_1^0, \dots, y_n^0$  und  $x_0, w_1^0, \dots, w_m^0, Y_1^0, \dots, Y_n^0$  angehören, eindeutige stetige Functionen von  $x, w_1, \dots, w_m, y_1, \dots, y_n$  und die in einer Umgebung von  $x_0$  stetigen Functionen des  $x$ :  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , die in  $x_0$  bez. die Werthe  $w_1^0, \dots, w_m^0$  annehmen, lägen in  $(\mathfrak{B})$ . Construiert

man dann — etwa nach der Cauchy-Picard'schen Methode — für das Normalsystem

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, 0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

aus  $y_1^0, \dots, y_n^0$  und für

$$\frac{dY_k}{dx} = f_k(x_1, u_1, \dots, u_m; Y_1, \dots, Y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

aus  $Y_1^0, \dots, Y_n^0$  als Anfangswerthen in  $x_0$  die Lösungen, so wird, wenn  $|Y_k^0 - y_k^0|$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) und  $|u_1|, |u_2|, \dots, |u_m| < \delta$  sind, in der beiden Lösungen gemeinsamen Umgebung von  $x_0$ , deren Radius  $h$  sei,

$$|Y_k^0 - y_k^0| < (e^{(n+m)M|x-x_0|} - 1)\delta < (e^{(n+m)Mh} - 1)\delta, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

wo  $M$  eine positive Zahl bedeutet, nicht kleiner als die absoluten Beträge der ersten Derivirten der Functionen  $f_k$  nach den  $w_1, \dots, w_m, y_1, \dots, y_n$  in  $(\mathfrak{B})$ . Wie die Formel lehrt, sind die  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  auch stetige Functionen der  $w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0, u_1, u_2, \dots, u_n$  in  $(\mathfrak{B})$ .

Sind speciell die Differentialgleichungen linear, so kann für  $h$  das Intervall genommen werden, in dem die Coefficienten beider Gleichungen stetig nach  $x$  bleiben\*).

#### § 4.

1) Bildet man  $R(\lambda)$  aus  $R$  (§ 1, 1)), indem man darin für  $a_{ii}$ :  $a_{ii} - \lambda$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) setzt, so hat bekanntlich die Gleichung  $R(\lambda) = 0$  lauter reelle Wurzeln. Wenn diese (von Null verschieden und) gleich bezeichnet sind, aber auch nur dann ist die quadratische Form (10) an der betreffenden Stelle  $x$  definit, wobei sie das Zeichen der Wurzeln hat. Der absolute Betrag des Coefficienten von  $\lambda^{n-m}$ , des höchsten Gliedes der Gleichung:  $M^2$  (§ 1, 1)) und ihr absolutes Glied  $R(0) = R$  stehen in dem Zusammenhang, dass das erstere ohne das letztere nicht verschwindet. Da nach Voraussetzung dieses in  $ab$  nicht verschwindet, so wird daselbst auch jenes nicht Null. Sind in  $x$  die Zahlen  $\mu$  und  $\mu'$  bezüglich nicht kleiner als die absoluten Beträge der dem ersten nachfolgenden und dem letzten vorangehenden Coefficienten im nach fallenden Potenzen geordneten  $R(\lambda)$ , so liegen die absoluten Beträge der Wurzeln zwischen den Zahlen  $\frac{|R|}{\mu' + |R|} < \frac{M^2 + \mu}{M^2}$ . Ist daher  $r_0$  das Minimum von  $|R|$  und  $\mu_0$ , jenes von  $M^2$  in  $ab$  und behalten  $\mu$  und  $\mu'$  ihre Bedeutung für alle  $x$  in  $ab$  bei, so liegen die absoluten Beträge sämtlicher Wurzeln von  $R(\lambda) = 0$  für alle  $x$  von  $ab$  zwischen den Grenzen  $\frac{r_0}{\mu' + r_0} < \frac{\mu_0 + \mu}{\mu_0}$ , wo  $\mu_0$  und  $r_0 > 0$  sind.

\*) Picard, Traité t. III, p. 92.



Ändern sich in (10) die Coefficienten der quadratischen Form und der Bedingungsgleichungen stetig, so ist dies auch mit den Coefficienten der Gleichung  $R(\lambda) = 0$  und daher auch mit ihren Wurzeln der Fall. War also die Form anfänglich definit, so wird sie bei dieser Änderung mit demselben Zeichen definit bleiben, so lange keine Wurzel Null oder unendlich wird, somit, da  $m_0$  nur mit  $r_0$  verschwinden kann, gewiss so lange  $R(0)$  nicht Null wird. Die sämtlichen  $\bar{a}_{ik}$  und  $\bar{\alpha}_{ik}$  sind nun stetige Functionen der  $x$ ,  $\eta$  und  $\eta'$ , die für  $\lim \eta = \lim \eta' = 0$  bez. in  $a_{ik}$  und  $\alpha_{ik}$  übergehen. Bezeichnet daher  $\bar{R}(0)$  die Determinante, die aus  $R$  entsteht, wenn darin die Buchstaben überstrichen werden, so existirt (§ 3, 1)), da  $R$  in  $ab$  nicht Null wird und  $\bar{R}(0)$  stetig nach  $x$ ,  $\eta$  und  $\eta'$  ist, ein  $\delta' > 0$  derart, dass auch  $\bar{R}(0)$  in  $ab$  nicht verschwindet, wenn  $|\eta|$  und  $|\eta'| < \delta'$  sind. Die quadratische Form in (7\*) ist demnach für alle zulässigen  $\eta$  und  $\eta'$ , welche dieser Bedingung genügen, definit vom selben Zeichen wie (10).

2) Da  $\bar{R}(0)$  für jedes derartige Werthesystem der  $\eta$  und  $\eta'$ , ebenso wie  $R$ , in  $ab$  nicht verschwindet, so haben die Systeme (5) und (5\*) alle Eigenschaften gemein, die eine Folge dieser Voraussetzung sind.

Construirt man zu jeder Lösung  $(u^k, \rho^k)$  des dem Punkte  $a$  conjugirten Systems  $((u^k, \rho^k))$  von (5) aus den gleichen Anfangswerthen in  $a$  die entsprechende  $(\bar{u}^k, \bar{\rho}^k)$  in (5\*), so bilden diese ein  $a$  conjugirtes System in (5\*); analog erhält man zu dem  $b$  conjugirten Systeme  $((w^k, \sigma^k))$  in (5) ein  $b$  conjugirtes System  $((\bar{w}^k, \bar{\sigma}^k))$  in (5\*). Da  $\Delta(x, a)$  nach Voraussetzung (2) in  $b$  nicht Null ist, so sind die Systeme  $((u^k, \rho^k))$  und  $((w^k, \sigma^k))$  linear unabhängig. Es lassen sich daher die Constanten  $\gamma$  in

$$v^k = \sum_{i=1}^n \gamma_i^k w^i, \quad r^k = \sum_{i=1}^n \gamma_i^k \sigma^i$$

gemäss den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^n \gamma_{\lambda}^k \psi(w^{\lambda}, \sigma^{\lambda}; u^i, \rho^i) = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^n \gamma_{\lambda}^k \psi(w^{\lambda}, \sigma^{\lambda}; u^{n+1-k}, \rho^{n+1-k}) = c_{n+1-k}$$

$$(i = 1, \dots, (n-k), (n-k+2) \dots n),$$

wo  $c_{n+1-k}$  eine beliebige von Null verschiedene Zahl ist, für  $k=1, 2, \dots, n$  bestimmen, da die Determinante  $\left| \psi(w^k, \sigma^k; u^i, \rho^i) \right|_{i=1, 2, \dots, n}^{k=1, 2, \dots, n}$  des Gleichungssystems, die von  $x$  unabhängig ist, nicht verschwindet\*). Die beiden Systeme  $((u^k, \rho^k))$  und  $((v^k, r^k))$  bilden zusammen ein involutorisches Fundamentalsystem\*), denn es ist  $(u^k, \rho^k)$  ausser zu  $(v^{n+1-k}, r^{n+1-k})$  zu jeder anderen unter

\*) Mitt. II, XV, pag. 1301—1307.

den  $2n$  Lösungen conjugirt.\*) Es lassen sich dann (von Null verschiedene) nur den Zeichen nach bedingte Zahlen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  bestimmen, so dass die Determinante des conjugirten Systems

$$(\bar{z}^k = v^k + \mu_k u^{n-k+1}; \bar{r}^k = r^k + \mu_k \varrho^{n-k+1})$$

in  $ab$  nicht verschwindet.\*\*)

Da  $|\eta|$  und  $|\eta'| < \delta'$  in  $ab$  und die Differentialgleichungen (5) und (5\*) linear sind, so wird in  $ab$  (§ 3, 2))  $|\bar{u}^k - u^k|$  und  $|\bar{v}^k - v^k|$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )  $< \nu \delta'$ , wo  $\nu$  eine bestimmte Zahl bedeutet. Nimmt man  $\delta'$  genügend klein, so wird, da  $\Delta(x, a) = \Delta(u^1, u^2, \dots, u^n)$  in  $b$  nicht Null ist, daselbst auch  $\Delta(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n)$  nicht Null sein und es werden also die Systeme  $(\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k)$  und  $(\bar{w}^k, \bar{\sigma}^k)$  linear unabhängig sein. Es lassen sich sonach, wenn mit  $\bar{\psi}$  das Analogon zu (6) im Systeme (5\*) bezeichnet wird, die  $\bar{\gamma}$  in

$$\bar{v}^k = \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^k \bar{w}^i, \quad \bar{r}^k = \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^k \bar{\sigma}^i$$

aus den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^n \bar{\gamma}_\lambda^k \bar{\psi}(\bar{w}^\lambda, \bar{\sigma}^\lambda; \bar{u}^i, \bar{\varrho}^i) = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^n \bar{\gamma}_\lambda^k \bar{\psi}(\bar{w}^\lambda, \bar{\sigma}^\lambda; \bar{u}^{n+1-k}, \bar{\varrho}^{n+1-k}) = c_{n+1-k}$$

$$(i=1, \dots, n-k, n-k+2, \dots, n)$$

für  $k=1, 2, \dots, n$  bestimmen. Die beiden Systeme  $(\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k)$  und  $(\bar{v}^k, \bar{r}^k)$  bilden dann wieder ein involutorisches Fundamentalsystem, aus dem man das conjugirte System  $(\bar{z}^k = \bar{v}^k + \mu_k \bar{u}^{n+1-k}, \bar{r}^k = \bar{r}^k + \mu_k \bar{\varrho}^{n+1-k})$  herstellt. In dem jetzt angenommenen homogenen Continuum der  $x, \eta$  und  $\eta'$ , dem die Stellen  $a \leq x \leq b$ ,  $\eta = \eta' = 0$  angehören, sind die  $\bar{u}^k, \bar{\varrho}^k, \bar{w}^k, \bar{\sigma}^k, \bar{\gamma}_i^k$  und daher auch  $\bar{z}^k, \bar{r}^k$  stetige Functionen von  $x, \eta$  und  $\eta'$ , die mit unendlich klein werdenden  $\eta$  und  $\eta'$  bez. in  $u^k, \varrho^k, w^k, \sigma^k, \gamma_i^k, z^k, r^k$  übergehen. Die in diesem Continuum somit nach  $x, \eta$  und  $\eta'$  stetige Function  $\Delta(\bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^n)$  geht für  $\eta = \eta' = 0$  in  $\Delta(z^1, z^2, \dots, z^n)$  über, die in  $ab$  nirgends verschwindet. Sonach besteht nach § 3, 1) ein  $\delta'' > 0$ , derart, dass für alle Punkte des Continuum, für welche  $|\eta|$  und  $|\eta'| < \delta''$  ist,  $\Delta(\bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^n)$  in  $ab$  nicht Null wird.

Es besteht somit unter den Voraussetzungen in § 1, 1) und § 2 ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle zulässigen  $\eta$  und  $\eta'$ , deren absolute Beträge kleiner als  $\delta$  in  $ab$  bleiben: 1)  $\Delta J$  in die reducirte Form (7\*) übergeführt

\*) Mitt. II, pag. 1307—1309.

\*\*) Mitt. III, pag. 1412, XIX.

werden kann und 2) die quadratische Form  $\sum_{i,k} \bar{a}_{ik} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k$  definit vom selben Zeichen ist.  $\Delta J$  hat sonach für diese  $\eta$  und  $\eta'$  immer dasselbe Zeichen.

Die Erörterungen in § 2 und § 4, 1 führen noch zu folgender Bemerkung, die mit dem eben bewiesenen Satze eng zusammenhängt:

Ist im homogenen Continuum  $(\mathfrak{C})$  (§ 1, 1) ein zweites  $(\mathfrak{C}')$  enthalten, dem die Curve  $(C)$  sammt den  $y'_1, y'_2, \dots y'_n$  längs derselben angehören und verschwindet darin weder  $\bar{R}(0)$  noch  $\Delta(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots \bar{u}^n)$ , die Determinante des  $a$  conjugirten Systems in (5\*), so hat  $\Delta J$  für alle zulässigen Variationen  $\eta_1 \dots \eta_n, \eta'_1 \dots \eta'_n$ , welche bez. die  $y_1 \dots y_n, y'_1 \dots y'_n$  von  $(C)$  in Punkte von  $(\mathfrak{C}')$  ändern, dasselbe Zeichen.

---