

noch von ihm besorgt werden. Hingegen bürgen Reichtum des Inhalts und systematischer Aufbau des Werkes dafür, daß sich der Wunsch und die Hoffnung des Verfassers, es möge auch weiterhin zur Verbreitung und Förderung der graphischen Methoden geeignet befunden werden, sicherlich erfüllen wird.

Wien, im September 1904.

E. Müller.

Vorlesungen über technische Mechanik von Dr. Aug. Föppl Prof. a. d. techn. Hochschule in München. Zweiter Band: **Graphische Statik**. Mit 176 Figuren im Text. Zweite Auflage, Leipzig 1903, B. G. Teubner. XII u. 471 Seiten gr. 8°. — Preis geb. M. 10.—.

Auch dieser Band des trefflichen Werkes über technische Mechanik erforderte schon nach 3 Jahren eine Neuauflage, obgleich seine erste Auflage in der doppelten Exemplarezahl gedruckt wurde wie die anderen Bände. Das Werk verdankt seine rasche Verbreitung wohl nicht zum geringsten Teile der lebendigen Darstellungsweise, die wie ein mündlicher Vortrag auf den Leser wirkt, ferner der Reichhaltigkeit des Stoffes, der im Hinblick auf die praktische Verwendbarkeit ausgewählt und nach modernen Methoden behandelt ist. Gegenüber der ersten Auflage, über die in den Literaturberichten des XII. Bandes dieser Zeitschrift referiert wurde, sind keine wesentlichen Änderungen zu bemerken. Ein Paragraph über die Zimmermannsche Kuppel wurde eingefügt und sonst Verbesserungen und Zusätze an verschiedenen Stellen angebracht.

E. Müller.

Lehrbuch der analytischen Geometrie, bearbeitet von O. Fort und O. Schlömilch. Erster Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. Siebente Auflage, besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig und Berlin 1904, B. G. Teubner. XVII u. 268 S. gr 8°. Preis: geh. M. 4.—, geb. M. 4.80.

Da das Buch sich beinahe ein halbes Jahrhundert lang, selbst nach dem Tode der Bearbeiter, zur Einführung in die analytische Geometrie der Ebene bewährt hat, so ist es begreiflich, daß der jetzige Herausgeber nur wenige Veränderungen daran angebracht, ja sogar die Behandlung eines Paragraphen im Sinne der älteren Auflagen wieder umgearbeitet hat. Willkommen wird die ausführliche Inhaltsangabe sein, die an Stelle der kurzen Übersichten der früheren Auflagen getreten ist. Mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse der Techniker, für die das Buch ursprünglich bestimmt war, wurde von der Verwendung von Linienkoordinaten und homogenen Punktkoordinaten abgesehen. Gerade diese Beschränkung in den Mitteln dürfte mit bewirkt haben, daß das Buch weit über den Kreis der Techniker hinaus Verbreitung gefunden hat und wohl auch weiter finden wird.

E. Müller.

Vorlesungen über projektive Geometrie von Federigo Enriques, ord. Professor an der Universität Bologna. Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Fleischer. Mit einem Einfüh-

rungsworte von Felix Klein und 187 Figuren im Text. Leipzig 1903, B. G. Teubner, gr. 8^o, XIV + 374 S. — Preis geh. M. 8.— geb. M. 9.—.

Wie F. Klein im Einführungsworte hervorhebt, ist Italien seit zwei Jahrzehnten nicht nur „das eigentliche Zentrum fortschreitender Arbeiten auf dem Gebiete der projektiven Geometrie“, sondern die Forscher dieses Landes haben die Ergebnisse ihrer Forschungen auch pädagogisch verwertet, indem sie eine Reihe tüchtiger Lehrbücher geschaffen, die dem jetzigen Stande der Wissenschaft gerecht werden. Hierzu gehört das im Jahre 1898 erschienene Original der vorliegenden deutschen Ausgabe, die übrigens gegenüber jenem durch den Verfasser selbst einige Erweiterungen erfahren hat. Das Werk entsprang aus dem Gedanken, die Elemente der projektiven Geometrie im Sinne der v. Staudtschen Richtung zu entwickeln, aber unter Zugrundelegung eines Systems von ausdrücklich ausgesprochenen visuellen (graphischen, deskriptiven) Axiomen. Die metrischen Anwendungen sollten nicht verbannt aber doch getrennt behandelt werden.

Da bisher keine pädagogische Durchführung des axiomatischen Aufbaues der projektiven Geometrie ohne Benützung metrischer Begriffe, noch dazu in solch durchsichtiger Form, existierte, so soll auf diesen Teil des Buches, den der Verfasser selbst als den originellsten bezeichnet (p. VI), näher eingegangen werden. Den streng wissenschaftlichen Standpunkt des Buches kennzeichnet schon das in der (beachtenswerten) Einleitung (p. 2) ausgesprochene Prinzip: „Jedesmal, wenn man annimmt, daß eine geometrische Eigenschaft durch die Anschauung gegeben ist, spreche man sie ausdrücklich als ein Axiom aus; jede andere geometrische Eigenschaft muß durch logische Schlußfolgerungen aus den bereits angeführten Axiomen hergeleitet werden.“

Die Axiome werden jedoch nicht dogmatisch hingestellt, sondern die Zweckmäßigkeit oder Notwendigkeit ihrer Annahme wird anschaulich entwickelt, ein methodischer Vorgang, wie ihn schon vorher M. Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ (Leipzig 1882) befolgt hat. Der Verfasser geht von Punkten, Geraden und Ebenen als den nicht definierbaren Grundelementen der Geometrie aus und führt dann jene neun Gruppierungen dieser Elemente ein, die man als geometrische Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe bezeichnet. Unter Grundgebilden dritter Stufe versteht er nur das räumliche Punktsystem und Ebenensystem, nicht das räumliche Geradensystem. Rein anschauungsmäßig werden dann die uneigentlichen (unendlich fernen) Elemente definiert und die Definitionen der Grundgebilde dementsprechend erweitert. Die aus der Anschauung unmittelbar folgenden Sätze über die Lagenbeziehungen zwischen den Grundelementen (einschließlich der uneigentlichen) faßt er in die folgenden drei Axiome zusammen, die sich mit den „Axiomen der Verknüpfung“ D. Hilberts (Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, 2. Aufl. 1903) im wesentlichen decken. In einem Gebilde dritter Stufe bestimmen:

- I. Zwei Grundelemente ein Gebilde erster Stufe, dem sie angehören;
- II. Drei Grundelemente, die nicht einem Gebilde der ersten Stufe angehören, ein Gebilde der zweiten Stufe, dem sie angehören;

III. Ein Grundelement und ein Gebilde erster Stufe, die nicht einander angehören, ein Gebilde zweiter Stufe, dem sie angehören.

Diese Axiome gestatten, die Operationen des Projizierens und Schneidens zu definieren.

Zwei weitere Axiome, die den Hilbertschen Axiomen der Anordnung entsprechen, müssen eingeführt werden, um die anschaulichen Tatsachen zu vertreten, daß sich jedes Grundgebilde erster Stufe (die Punktreihe im Unendlichen geschlossen gedacht) durch Bewegung eines Elementes erzeugen läßt und daß diese Bewegung bei einer Projektion oder einem Schnitt wieder in eine solche für das neue Gebilde übergeht. Sie lauten:

IV. Die Elemente eines Gebildes erster Stufe können in einer natürlichen zyklischen Anordnung in dem einen oder anderen Sinn vorgestellt werden. . . . (Zur näheren Bestimmung dieser Vorstellungsweise folgt eine Reihe von Forderungen, die erfüllt sein müssen.)

V. Wenn zwei Gebilde erster Stufe projektiv sind und ein Element sich auf dem einen bewegt und ein Segment beschreibt, so bewegt sich auch das entsprechende Element auf dem anderen, indem es ein Segment beschreibt. (Die natürliche Anordnung eines Gebildes erster Stufe besitzt also projektiven Charakter.)

Wenn man auf Grund dieser fünf Axiome rein logisch eine Geometrie entwickelt, so ist es gleichgültig, ob man als Grundelement des Raumes den Punkt oder die Ebene betrachtet, da die Axiome sich auf beide in gleicher Weise beziehen. In dieser Geometrie gilt daher das Dualitätsgesetz.

Nun erfolgt nach v. Staudt die Einführung harmonischer Gruppen von Elementen und der Nachweis, daß in Gebilden, die durch Projektionen und Schnitte auseinander hervorgehen, jeder harmonischen Gruppe des einen eine harmonische Gruppe des anderen entspricht. Dann wird die Frage aufgeworfen, ob eine ein-eindeutige Beziehung zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe, die so beschaffen ist, daß jeder harmonischen Gruppe des einen Gebildes eine harmonische Gruppe des anderen entspricht, stets durch Projektionen oder Schnitte hergestellt werden kann. Es zeigt sich, daß die Bejahung dieser Frage im wesentlichen auf den Beweis des Fundamentalsatzes hinauskommt: „Wenn es in einem Gebilde erster Stufe eine Projektivität mit drei Doppelementen gibt, so sind auch alle anderen Elemente Doppelemente.“ Nach Einführung des Stetigkeitsaxiomes VI in der von Dedekind herührenden Form, (daß, kurz gesagt, „jeder Schnitt“ in einem Segment ein Element bestimmt,) wird der Beweis in der von Klein, Lüroth, Zeuthen und Darboux angegebenen Weise erbracht.

Damit sind die Fundamente zum logischen Aufbau des Gebäudes hergestellt. Es sei hier die Bemerkung gestattet, daß im vorliegenden Falle wie bei jedem axiomatischen Aufbau einer Wissenschaft sich immer die Frage aufdrängt, welche Rolle eigentlich die Logik spielt. Die Mathematik dürfte solche in das Gebiet der Philosophie hinüberreichende Untersuchungen in der Zukunft kaum umgehen können.*)

*) Ein kurzer Vortrag D. Hilberts auf dem III. internationalen Mathematiker-Kongresse in Heidelberg (Aug. 1904) über die axiomatische Begründung der Arithmetik, bildet hiezu einen Anfang.

Aus dem großen Gebiete projektiv-geometrischer Untersuchungen werden nur die projektiven Beziehungen zwischen Grundgebilden erster und zweiter Stufe eingehend besprochen, die Kegelschnitte als Ordnungskurven ungleichförmiger Polaritäten der Ebene definiert und daraus ihre Haupteigenschaften hergeleitet, ferner noch die Kollineationen im Gebilde dritter Stufe studiert. Als duale Gebilde zu den Kegelschnitten ergeben sich die Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung; auf die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung wird nicht eingegangen; die Paare konjugiert imaginärer Elemente finden ziemlich flüchtige Erwähnung (§ 38).

In diesen Untersuchungen tritt aber eine zweite Eigenart des Buches hervor, nämlich die eingehende Betrachtung des Metrischen in besonderen durch ein Sternchen bezeichneten Paragraphen oder Abschnitten. Bei den Verwandtschaften z. B. werden nicht nur die projektiven, sondern auch die metrischen Sonderfälle näher untersucht, was mir von großem pädagogischen Werte erscheint; denn indem der Studierende die Einordnung seines bisherigen geometrischen Wissens in ein umfassenderes, übersichtlicheres System erkennt, erwacht auch die Liebe zu dieser neuen Betrachtungsweise. Vor allem verdient Erwähnung die klare Darlegung der Tatsache, daß alle metrischen Eigenschaften (auch die auf Längen bezüglichen) als visuelle Beziehungen der Figuren zum „Absoluten“ ausdrückbar sind, das in der Ebene aus der absoluten Involution auf der unendlich fernen Geraden, im Raume aus der absoluten Polarität in der unendlich fernen Ebene besteht; ferner der Nachweis, daß das Dualitätsgesetz im Bündel auch für alle metrischen Eigenschaften gilt, hingegen in der Ebene nur für jene, die projektiv sind. Ganz besonders sei jedoch auf das 11. Kapitel hingewiesen, das sich mit den bestimmten Aufgaben der drei ersten Grade beschäftigt. Damit man metrische Aufgaben in der Ebene in gleicher Weise wie visuelle lösen könne, muß das Absolute gegeben sein. Wird z. B. ein Quadrat angenommen, so ist jede metrische Aufgabe ersten Grades mit dem Lineal allein lösbar; wird ein Kreis samt seinem Mittelpunkt angenommen, so ist auch jede Aufgabe zweiten Grades mit dem Lineal allein lösbar. Aus dem letzten (Poncelet-Steinerschen) Satze wird durch duale Übertragung unmittelbar der schöne (Adlersche) Satz gefolgert, daß die Aufgaben zweiten Grades auch allein mittels eines Lineals mit zwei Kanten lösbar sind.

Der streng axiomatische Aufbau der Geometrie dient nicht bloß zur Befriedigung eines logisch-ästhetischen Bedürfnisses, sondern führt mit großer Leichtigkeit zu wichtigen Ergebnissen für diese selbst. Da die Axiome von dem anschaulichen Inhalte der „Elemente“ unabhängig sind, so dürfen darunter irgend welche genau definierte Dinge verstanden werden, wenn zwischen ihnen nur die in den Axiomen festgelegten Beziehungen bestehen. Von diesem Prinzip der Ersetzbarkeit geometrischer Elemente, wie es der Verfasser nennt, das für die moderne Geometrie schon so fruchtbar geworden ist, gibt der Anhang einige schöne Anwendungen. Es lassen sich z. B. die durch einen Punkt gehenden Kugeln als Elemente (Ebenen) eines Gebildes dritter Stufe Σ auffassen, in dem unter gewissen weiteren Festsetzungen die projektive und metrische Geometrie Gültigkeit hat. Legt man nun zwischen Σ und dem gewöhnlichen Ebenenraum eine Ähnlichkeitsverwandtschaft fest, so führt diese auf eine Transformation des Raumes, die Kugeln in Kugeln verwandelt. Ferner

lassen sich die homogenen Gruppen von vier Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 als Punkte, die durch lineare Gleichungen zwischen x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmten Mannigfaltigkeiten solcher Zahlengruppen als Ebenen eines Gebildes 3. St. in obigem Sinne auffassen. Eine Kollineationsverwandtschaft zwischen diesem Gebilde und dem gewöhnlichen Punktraume führt zu den linearen projektiven Punktkoordinaten. Den Schluß des Anhangs bildet eine historisch-kritische Notiz über die Entstehung der Fundamentalbegriffe der projektiven Geometrie.

Vielleicht gibt das Vorhergehende einen ungefähren Einblick in die Reichhaltigkeit des Werkes. Hinzuzufügen wäre noch, daß es trotz seines systematischen Aufbaues und der wissenschaftlichen Höhe, zu der es hinaufführt, leicht verständlich und angenehm lesbar geschrieben ist, so daß es von jedem Studierenden benützt werden kann. Den richtigen Genuß wird das Buch freilich erst solchen bereiten, die schon einen einführenden Kursus der projektiven Geometrie durchgemacht haben. Besonders dürften Lehrer der Mathematik viel Anregung daraus empfangen, denn der Reichtum des Buches an schönen und zum Weiterdenken anregenden Bemerkungen ist auch durch dieses, ohnehin schon zu ausführliche, Referat noch nicht genügend gekennzeichnet.

E. Müller.

Henri Poincaré, membre de l'institut: Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. Leipzig, Teubner 1904. (X + 342 Seiten.

Den Übersetzern dieses interessanten Werkes gebührt rühmlichste Anerkennung. Denn es ist ihnen vortrefflich gelungen, die glänzende Form, in welcher P. seine Ansichten über die philosophisch-mathematischen Probleme entwickelt hat, wiederzugeben. Und es liegt der Wert dieses Werkes sicherlich nicht zum geringsten eben in der eleganten, leichten Darstellungsweise. Nicht nur daß schwierige und trockene Probleme durch diese schöne Form an Reiz gewinnen: Vor allem erweckt die Darstellung Bewunderung, weil aus ihrer spielenden Sicherheit die souveräne Meisterschaft des Autors hervorleuchtet.

Anderseits birgt eben dieser Vorzug allerdings eine Gefahr und mancher wird vielleicht meinen, diese Gefahr sei nicht besiegt worden. Denn die leichte Form enthebe den Autor von der Notwendigkeit, den Fragen und auch seinen Antworten bis auf den Grund zu gehen. Sehr scharf, aber nicht gerade tief seien die Einblicke, die P. in die Geheimnisse des naturwissenschaftlichen Denkens eröffnet. Gewiß — es enthält dieses Werk vielleicht über kein Problem das letzte Wort. Die Nebel, welche auf den Grenzgebieten lagern, scheinen sich zu verschieben, verschwinden aber nicht.

Doch wer wollte darüber die Dankbarkeit vergessen, die er dem Meister dafür schuldet, daß er ihn die Dinge mit seinem scharfen Auge zu sehen erlaubte!

Wer es nicht weiß, den werden es die Anmerkungen des sachkundigen Übersetzers lehren, welches Meer von Gedanken diese scheinbar spielenden Wellen wirft.

A. Gerstel.