Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens.

(Par M. *Camille Jordan* à Châlon s. Saône.)

Une surface sera dite d'espèce (m, n) si elle est limitée par m contours fermés et si l'on peut d'autre part y tracer n contours fermés ne se coupant eux-mêmes ni mutuellement, sans la partager en deux régions distinctes.

L'importance des deux paramètres m et n ressort des propositions suivantes:

1°. Une surface d'espèce (m, n) est $m+2n$ fois continue (*zusammenhängend*), en donnant à ce terme la même définition que M. *Riemann* (tome 54 de ce Journal). On doit excepter le cas où $m=0$: la surface est alors non plus $2n$ fois, mais $2n+1$ fois continue.

2°. Tout contour tracé sur une surface d'espèce (m, n) peut être réduit par une déformation progressive à une combinaison de certains contours simples, en nombre $m+2n$.

3°. Pour que deux surfaces *flexibles* et *extensibles à volonté* soient applicables l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles soient de même espèce.

4°. On a dans toute surface polyédrique d'espèce (m, n) entre le nombre F des faces, celui S des sommets et celui A des arêtes, la relation

$$F+S = A+2-m-2n$$

qui n'est autre que le théorème d'*Euler* généralisé.

En posant $m=0$ et faisant varier n, on aura les diverses espèces de polyèdres fermés.

Les polyèdres de l'espèce $(0, 0)$ ne sont autres que ceux que j'ai appelés *eulériens* dans le mémoire précédent. Le problème de la symétrie se pose d'une manière analogue dans les autres espèces de polyèdres: mais les résultats obtenus sont essentiellement différents d'une espèce à l'autre.

Prenons par exemple les polyèdres de l'espèce $(0, 1)$. (Un polyèdre présentant l'aspect général d'un tore appartiendrait à cette espèce). Il résulte de mon analyse que ces polyèdres peuvent offrir trois sortes différentes de symétrie.

1°. Symétrie mn-quaternaire. Polyèdres offrant deux systèmes distincts de mn éléments à rotation quaternaire et un système de $2mn$ éléments à rotation binaire (ou d'arêtes à retournement). Les autres éléments et arêtes sont $4mn$ fois répétés. Les entiers m et n peuvent être quelconques, sauf cette restriction que si l'un d'eux se réduit à l'unité, l'autre doit se réduire à 1, ou à 2.

2°. Symétrie mn-binaire. Polyèdres offrant quatre systèmes distincts de mn éléments à rotation binaire, (chacun de ces systèmes pouvant être remplacé par un système d'arêtes à retournement). Les autres éléments et arêtes sont $2mn$ fois répétés. Les entiers m et n sont absolument quelconques.

3°. Symétrie mn-aire. Polyèdres présentant mn aspects semblables: chaque élément ou arête étant mn fois répété. Les entiers m et n sont quelconques.

Dans les trois cas ci-dessus, les entiers m et n pouvant être pris aussi grands que l'on veut, on peut toujours construire un polyèdre de l'espèce $(0, 1)$ qui soit pareil à lui-même sous un nombre d'aspects qui dépasse toute limite assignée *a priori*. La même circonstance se présentait pour les polyèdres eulériens, qui sont susceptibles d'offrir une symétrie de rotation dont l'ordre reste arbitraire. Mais il est digne de remarque que les polyèdres appartenant à ces deux espèces sont les seuls polyèdres fermés qui jouissent de cette propriété: cela résulte de la proposition suivante:

Théorème. *Le nombre K des aspects sous lesquels un polyèdre d'espèce $(0, n)$ peut être pareil à lui-même est nécessairement limité, si $n > 1$.*

La démonstration de cette proposition générale est assez délicate: en voici l'abrégé.

On peut supposer qu'aucune face du polyèdre considéré n'est sa propre homologue sous plusieurs aspects différents: car si cela avait lieu, on pourrait prendre un point dans l'intérieur de la face et le joindre aux divers sommets de son contour, de manière à remplacer la face par un système de facettes triangulaires: en opérant de même sur les faces semblables, on aura un nouveau polyèdre d'espèce $(0, n)$ jouissant des mêmes symétries, et où aucune face ne sera sa propre homologue: on pourra étudier ce polyèdre au lieu du primitif.

Cela posé, soient f une face, f_1, f_2, ... les faces pareilles: s'il en existe d'autres, l'une d'elles, g, sera contigue suivant une arête à l'une des précédentes, à f par exemple: ses homologues g_1, g_2, ... sont respectivement contigues à f_1, f_2 etc. .... Si le polyèdre contient d'autres faces, l'une d'elles h est contigue suivant une arête à quelqu'une des précédentes, à g par exemple: ses homologues h_1, h_2 ... seront respectivement contigues à g_1, g_2 ... etc. On peut épuiser ainsi toutes les faces du polyèdre: alors les faces f, g, h ... etc. d'une part, f_1, g_1, h_1 ... etc., f_2, g_2, h_2 ... etc., d'autre part, forment des régions R, R_1, R_2 ... pareilles entre elles, en nombre K, et qui par leur réunion constituent le polyèdre.

Supposons que chacune de ces régions soit de l'espèce (μ, ν). Soient F, S, A les nombres des faces, sommets et arêtes de chacune d'elles: on a:

$$F+S = A+2-\mu-2\nu$$

ou en ajoutant les résultats relatifs aux K faces

$$(1.) \qquad KF+KS = KA+(2-\mu-2\nu)K.$$

Soient F', S', A' les nombres des faces, sommets et arêtes du polyèdre: on a $F' = KF$. D'autre part toute arête contenue sur le contour d'une région se trouve sur celui d'une autre région: elle est par suite comptée deux fois dans KA: on a donc en désignant par α le nombre des arêtes situées sur le contour de R

$$KA = A'+\tfrac{1}{2}\alpha K.$$

Enfin les sommets situés sur le contour de R sont tous situés sur le contour de deux ou d'un plus grand nombre de régions: soit en général β_λ le nombre de ceux qui sont situés sur λ régions: on aura:

$$KS = S'+\left(\tfrac{1}{2}\beta_2+\tfrac{2}{3}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-1}{\lambda}\beta_\lambda\right)K.$$

Substituant ces valeurs dans (1.) il vient

$$(2.) \qquad \left(2-\mu-2\nu+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta_2-\tfrac{2}{3}\beta_3-\cdots-\frac{\lambda-1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = F'+S'-A' = 2-2n.$$

Dans chacun des contours qui bordent R le nombre des arêtes est égal au nombre des sommets: on aurait donc en additionnant les résultats relatifs à ces divers contours

$$\alpha = \beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda+\cdots$$

si ces contours ne se touchaient nulle part: mais si γ_2 sommets appartiennent à deux des contours limites, γ_3 à trois d'entre eux etc. ... on aura plus généralement

$$\alpha = \beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda+\cdots+\gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s.$$

D'autre part les diverses faces de R étant contigues entre elles suivant des arêtes, on peut passer d'un point quelconque de R à un autre sans toucher les contours limites. Si donc on suppose la continuité de R détruite aux sommets où les contours se rejoignent, ce qui demandera $\gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s\ldots$ transversales infiniment petites, R restera encore d'une seule pièce: d'où la relation

$$\mu+2\nu \geqq \gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s+\cdots+1.$$

Posons

$$\mu+2\nu-\gamma_2-2\gamma_3-\cdots-(s-1)\gamma_s-1 = \varphi:$$

l'équation (2.) deviendra

$$(3.)\qquad \left\{-1+\varphi+\tfrac{1}{2}\gamma_2+\cdots+\frac{s-1}{2}\gamma_s+\cdots+\tfrac{1}{6}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-2}{2\lambda}\beta_\lambda\right\}K = 2n-2.$$

Cela posé, $\varphi+\frac{1}{2}\gamma_2+\cdots+\frac{s-1}{2}\gamma_s=\frac{N}{2}$, N étant un entier positif ou nul.

Si $N>2$ le multiplicateur de K est $\geqq\frac{1}{2}$: donc la valeur de K donnée par l'équation (3.) ne peut dépasser $2(2n-2)$.

Si $N=2$, le multiplicateur de K est égal à

$$\tfrac{1}{6}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-2}{2\lambda}\beta_\lambda\cdots \geqq \tfrac{1}{6}(\beta_3+\cdots+\beta_\lambda)\geqq\tfrac{1}{6};$$

car on ne peut avoir à la fois $\beta_3=0, \ldots \beta_\lambda=0$, ce qui donnerait $2n-2=0$ ou $n=1$, cas rejeté de nos hypothèses. On aura donc $K\leqq 6(2n-2)$.

Enfin si $N=1$, ou $=0$, l'équation (3.) donnera

$$\left(\frac{N-2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda}{2}-\tfrac{1}{3}\beta_3-\cdots-\frac{1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = 2n-2.$$

D'ailleurs le multiplicateur de K est $\geqq\frac{N-2}{2}+\frac{\beta_3+\cdots+\beta_\lambda}{6}$; d'autre part, pour que K soit entier et >1, il faut que ce multiplicateur ne dépasse pas $n-1$: on a donc $\beta_3+\cdots+\beta_\lambda\ldots<6n-3N+1$, limite que nous désignerons par M.

Or soit donné en général un système de solutions entières de l'équation

$$(4.)\qquad \left(\frac{a}{b}-\tfrac{1}{3}\beta_3-\cdots-\frac{1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = L$$

jointe à l'inégalité

$$\beta_3+\cdots+\beta_\lambda\cdots<M,$$

et désignons par β_{λ_1}, β_{λ_2} ... celles des inconnues β qui ne sont pas nulles: on peut assigner une limite supérieure à chacun des indices λ_1, λ_2 ....

Car soit λ_1 le plus petit de ces indices: posons $\frac{1}{\lambda_1}\beta_1+\frac{1}{\lambda_2}\beta_2+\cdots=\frac{p}{q}$, cette fraction étant supposée réduite à sa plus simple expression, ainsi que $\frac{a}{b}$: On aura $\left(\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right)K=L$, d'où $K=\frac{Lbq}{aq-bp}=\frac{Lbe}{ae-dp}$, en posant $b=d\delta$, $q=e\delta$, δ étant le plus grand commun diviseur de b et de q.

K étant entier, $ae-dp$ divise Lbe: mais il est premier à e: donc il divise Lb: on a donc $ae-dp \overline{\overline{<}} Lb$ ou en multipliant par δ,

$$aq-bp \overline{\overline{<}} Lb\delta \overline{\overline{<}} Lb^2. \qquad \text{Mais} \qquad \frac{p}{q} \overline{\overline{<}} \frac{\beta_{\lambda_1}+\beta_{\lambda_2}+\cdots}{\lambda_1} < \frac{M}{\lambda_1}$$

d'où $q>\frac{\lambda_1}{M}p$: donc enfin

$$\left(\frac{a\lambda_1}{M}-b\right)p \overline{\overline{<}} Lb^2,$$

d'où $\lambda_1<\frac{M}{a}\left\{\frac{Lb^2}{p}+b\right\}<\frac{M}{a}(Lb^2+b)$.

La quantité λ_1 étant ainsi limitée, de même que β_{λ_1} qui est au plus égal à M, $\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}$ ne sera susceptible que d'un nombre fini de valeurs: prenons l'une d'elles à volonté et posons $\frac{a}{b}-\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}=\frac{a'}{b'}$: on aura

$$\left(\frac{a'}{b'}-\frac{1}{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_3}\beta_{\lambda_3}\ldots\right)K = L$$

avec

$$\beta_{\lambda_2}+\beta_{\lambda_3}+\cdots<M-\beta_{\lambda_1};$$

on en conclut comme tout à l'heure l'inégalité

$$\lambda_2<\frac{M-\beta_{\lambda_1}}{a'}(Lb'^2+b'),$$

λ_2 est ainsi limité, de même que β_{λ_2}: on reconnaît de même que λ_3 etc. sont limités.

Tous les entiers λ_1, λ_2, λ_3 . . . β_{λ_1}, β_{λ_2}, β_{λ_3} . . . étant ainsi renfermés dans certaines limites, le multiplicateur de K, $\frac{a}{b}-\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\ldots$ n'est susceptible que d'un nombre limité de valeurs: en les substistuant successivement dans l'équation (4.), on aura les valeurs correspondantes de K, en nombre limité.

La considération des aspects peut s'étendre aux surfaces polyédriques non fermées: soit P une semblable surface, d'espèce (m, n): ajoutons-y m faces auxiliaires ayant respectivement pour contour les m contours limites de P: on aura une nouvelle surface Q d'espèce $(0, n)$: et si P est pareil à lui-même sous plusieurs aspects, Q le sera sous ces mêmes aspects: et de plus les m faces auxiliaires seront leurs propres homologues sous tous ces aspects.

Si l'on veut que P soit pareil à lui-même sous un nombre d'aspects illimité, K, il en sera de même de Q: donc $n < 2$ comme on vient de le voir. D'ailleurs on ne peut avoir $n = 1$, car dans ce cas aucun élément de Q ne pouvant être doué d'une rotation plus que quaternaire, les m faces auxiliaires ne peuvent être leurs propres homologues sous plus de $4m$ aspects: d'où $K \leqq 4m$. Enfin si $n = 0$, comme tous les éléments de Q, excepté un, ou deux au plus, ne peuvent être leurs propres homologues que sous un nombre limité d'aspects, cinq au plus, on ne peut avoir $m > 2$: car si $m = 3$ l'une au moins des trois faces auxiliaires ne pourrait être son homologue sous plus de cinq aspects et par suite aurait au moins $\frac{1}{5}K$ homologues distinctes relativement aux K aspects considérés. On aurait donc $m \geqq \frac{1}{5}K$, d'où $K \leqq 5m$; K serait donc limité.

Ainsi les seules surfaces polyédriques qui puissent être pareilles à elles-mêmes sous un nombre illimité d'aspects sont (avec celles des espèces $(0, 0)$ et $(0, 1)$ déjà trouvées) celles des espèces $(1, 0)$ et $(2, 0)$.

Châlon sur Saône 1866.