Sur les formes quadratiques positives quaternaires.

Par A. Korkine et G. Zolotareff.

La recherche des limites précises des minima des formes quadratiques positives de déterminant donné, les variables étant des nombres entiers, présente des grandes difficultés et constitue un des points les plus importants dans la théorie de ces formes. Jusqu'à présent on ne connaît les limites précises des minima que pour les formes binaires et ternaires. Dans nos efforts de trouver ces limites pour des formes avec un nombre plus grand des variables nous avons obtenu quelques résultats non sans importance pour la solution du problème, que nous nous sommes proposé, résultats, que nous fairons connaître dans un autre mémoire.

Dans cette note nous allons nous occuper des formes quaternaires, et comme premier résultat de nos recherches nous allons démontrer la limite précise de leurs minima. Il est très-remarquable qu'elle suit immédiatement de la limite connue pour les formes ternaires.

Soit
$$f = \sum_{i=1,\, k=1}^{i=4,\, k=4} a_{ik}\, x_i x_k$$
une forme quaternaire positive de déterminant $-D$.

Il est permis de supposer que le coefficient a_{11} soit le minimum de f, car dans le cas contraire on peut trouver une forme équivalente à f, qui satisfait à cette condition.

Cela posé, considérons la forme
$$F(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$$
qui se déduit de f par la substitution
$$\begin{aligned}
x_1 &= X_1 + l X_2 + m X_3 + n X_4 \\
x_2 &= \phantom{X_1 +{}} l_1 X_2 + m_1 X_3 + n_1 X_4 \\
x_3 &= \phantom{X_1 +{}} l_2 X_2 + m_2 X_3 + n_2 X_4 \\
x_4 &= \phantom{X_1 +{}} l_3 X_2 + m_3 X_3 + n_3 X_4 .
\end{aligned}$$

Les coefficients de cette substitution l, m ..... sont des entiers, qui ne sont assujetties qu'à la seule condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Il est évident, que le minimum commun a_{11} de f et F figure dans F comme le coefficient de X_1^2.

Faisons dans F
$$X_1 = 0,$$
en laissant les autres variables quelconques, et désignons par $-\Delta$ le déterminant de la forme ternaire
$$F(X_1, X_2, X_3, 0).$$

Il est facile de voir que le minimum de cette forme est aussi a_{11}, et par conséquent en vertu de la limite connue des minima des formes ternaires nous aurons

$$(2) \qquad a_{11} \leqq \sqrt[3]{2\Delta}.$$

Soient maintenant
$$y_1, y_2, y_3, y_4$$
les variables de la forme
$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$$
adjointe à f, respectivement correspondantes à x_1, x_2, x_3, x_4, c'est à dire, soit $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ le produit $Df(x_1, x_2, x_3, x_4)$ transformé par la substitution:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},\; y_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},\; y_3 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3},\; y_4 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Le nombre Δ est representé*) par la forme φ en y faisant

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= m_2 l_3 - m_3 l_2 \\ y_3 &= m_3 l_1 - m_1 l_3 \\ y_4 &= m_1 l_2 - m_2 l_1 \end{aligned}$$

où les quantités
$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$$
ne sont assujetties qu'à la condition (1), à laquelle on peut évidemment satisfaire par le choix convenable de n_1, n_2, n_3, si les nombres

$$\begin{aligned} &m_2 l_3 - m_3 l_2 \\ &m_3 l_1 - m_1 l_3 \\ &m_1 l_2 - m_2 l_1 \end{aligned}$$

n'ont point de diviseur commun.

---

*) Mathematische Werke von Jacobi. 2. Band. — Hermite, première lettre sur la théorie des nombres. p. 223.

Nous disposerons de $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ de sorte que la forme ternaire

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4)$$

reçoive la valeur minimum en y posant

$$\begin{aligned} y_2 &= m_2 l_3 - m_3 l_2 \\ y_3 &= m_3 l_1 - m_1 l_3 \\ y_4 &= m_1 l_2 - m_2 l_1 . \end{aligned}$$

Cela est toujours possible en vertu du théorème connu*), et les nombres y_2, y_3, y_4 qui donnent le minimum de φ n'ayant point de diviseur commun, la condition unique pour les entiers

$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$$

est satisfaite.

Ainsi le minimum de

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4) \tag{3}$$

sera précisement la quantité Δ et par conséquent en ayant égard à ce que le déterminant de la forme (3) est $-D^2 a_{11}$, il viendra

$$\Delta \leqq \sqrt[3]{2 D^2 a_{11}} . \tag{4}$$

Les inégalités (2) et (4) donnent

$$a_{11} \leqq \sqrt[4]{4D} .$$

La limite $\sqrt[4]{4D}$ est précise, car il est le minimum de la forme positive

$$\sqrt[4]{4D}\,[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4]$$

de déterminant $-D$.

Nous avons donc le théorème suivant: *On peut assigner aux variables de toute forme quadratique positive quaternaire de déterminant* $-D$ *des valeurs entiers telles que la valeur de la forme ne surpasse point la quantité*

$$\sqrt[4]{4D},$$

et il existe de telles formes dont les minima sont égaux à

$$\sqrt[4]{4D}.$$

---

*) Gauss: Disquisitiones Arithmeticae, art. 279.