

theoretische Betrachtungen. Hier ist nicht der Ort, den Kern der Schwierigkeit darzulegen; aber das sieht man ohne weiteres: die Widersprüche treffen nicht den Theil ΔV der Volta'schen Potentialdifferenz, sondern den anderen ΔU . Jener ist so klein, dass die Erfahrung ihn direct kaum wahrnehmen würde; er spielt in der Theorie eine vollkommen klare Rolle, und das thermische Aequivalent seiner Arbeit wird im Peltier'schen Phänomen bestimmt und quantitativ richtig beobachtet. ΔU ist unsicher, was Existenz, Grösse und Arbeit in reinen, nicht oxydirten Metallen angeht. ΔV misst hiernach nicht die Volta'sche Contactkraft zwischen Metallen, sondern einen sicher gestellten Bestandtheil derselben; wie es um ΔU bestellt ist, das muss erforscht werden, wenn man über die ganze Contactkraft eine sichere Ansicht haben will.

Noch ist zu bemerken, dass ΔU , wenn es in merklicher Grösse existirt, möglicherweise auch eine Temperaturfunction ist, da ja alle charakteristischen Coëfficienten der Metalle von der Temperatur abhängen. Dann kann auch ΔU am warmen Ende eines Drahtes einen anderen Werth haben, als am kalten, und wenn man an einem ungleich temperirten Draht die vorhandenen Potentialdifferenzen direct electrostatisch beobachtet, so hat man keineswegs die Sicherheit, dass dieselben wirklich bloss eine Arbeit der Wärme sind; sie können auch eine Arbeit fremder Kräfte sein, welche nur indirect durch die Wärme modificirt werden.

V. Ueber Electrostriction; von H. Lorberg.

§ 1. Einleitung.

Die von Quincke über die electrische Ausdehnung von kugelförmigen und cylindrischen Glascondensatoren angestellten, sehr umfangreichen Beobachtungen¹⁾ sind von Quincke selbst und von Boltzmann mit der Theorie verglichen worden; indessen stimmt die Rechnung durchaus nicht mit den

1) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 161. 1880; 19. p. 545. 1883.

Beobachtungen überein; die von Quincke aufgestellte Formel gibt in den meisten Fällen das Doppelte bis Dreifache, die Boltzmann'sche in dem einzigen von ihm berechneten Beispiel das Doppelte, in den Fällen, in denen ich nach derselben die Rechnung ausgeführt habe, das Drei- bis Siebenfache des beobachteten Werthes, je nach dem Werth, welchen man den nur sehr unsicher bekannten elastischen Constanten des Glases beilegt. Obwohl nun die Beobachtungen zu einer genauen Vergleichung mit der Theorie wohl kaum geeignet sind, einestheils wegen der bei diesen höchst schwierigen Untersuchungen sehr bedeutenden Fehlerquellen der Beobachtungen selbst, welche in ihrer mangelhaften Uebereinstimmung unverkennbar zu Tage treten, anderentheils wegen der nur höchst unsicher bestimmten Werthe mehrerer in die Berechnung eingehender Constanten: so genügen diese Umstände doch nicht, um Abweichungen von solchem Betrage zu erklären, und man könnte versucht sein, daraus einen Schluss auf die Unrichtigkeit der von Korteweg und v. Helmholtz aufgestellten Theorie der Electrostriction zu ziehen, wenn die der Berechnung zu Grunde gelegten Formeln als einwurfsfreie Consequenzen jener Theorie betrachtet werden könnten. Das ist indessen keineswegs der Fall.

Was zunächst die von Quincke aufgestellten Formeln für cylindrische und kugelförmige Condensatoren¹⁾ betrifft, so identificirt Quincke die Constante K in dem Ausdruck:

$$\frac{K}{8\pi} R^2,$$

welcher die parallel der resultirenden electricischen Kraft R auf die Flächeneinheit wirkende electricische Zugkraft angibt, nach Maxwell einfach mit der Dielectricitätsconstante²⁾, was nach der oben erwähnten Theorie nicht allgemein zulässig ist; wenn er daher die mit diesem Werth von K berechnete Volumenänderung von der beobachteten abweichend findet, so beweist das nichts gegen die Richtigkeit der Theorie. Ferner nimmt er blos einen auf die Oberfläche des Dielectricums wirkenden electricischen Druck an und ver-

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 570 u. p. 574. 1883.

2) Quincke, l. c. p. 569.

nachlässigt die veränderlichen electrischen Druckkräfte im Inneren, womit es zusammenhängt, dass er den auf die den Kraftlinien parallelen Flächenelemente wirkenden Druck nicht berücksichtigt. Ferner ist die von ihm der Berechnung für Cylindercondensatoren zu Grunde gelegte Lamé'sche Formel auf den vorliegenden Fall nicht ohne Modification anwendbar. Lamé¹⁾ betrachtet nämlich einen an den Enden durch beliebig gekrümmte Flächen geschlossenen Hohlcyylinder von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 , auf welchen innen und aussen gleichförmige normale Druckkräfte, p_1 und p_2 wirken; dabei resultirt dann aus der der Axe parallelen Druckcomponente $\pi r_1^2 p_1 - \pi r_2^2 p_2$ ein auf die Flächeneinheit des ringförmigen Querschnittes der Röhrensubstanz wirkender axialer Zug:

$$F = \frac{\pi r_1^2 p_1 - \pi r_2^2 p_2}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Dieser Ausdruck für den axialen Zug gilt aber in dem vorliegenden Falle offenbar nicht; dies ergibt sich auch schon daraus, dass bei dem vorliegenden Problem die electrischen Druckkräfte die Form:

$$p_1 = \frac{a}{r_1^2}, \quad p_2 = \frac{a}{r_2^2}$$

haben, woraus $F = 0$ folgt; danach aber ergeben die Lamé'schen Formeln für die lineare Dilatation nach der Axe den Werth 0, während doch Quincke's eigene Beobachtungen dieselbe ungefähr $= \frac{1}{3}$ der Volumendilatation ergeben. Schliesslich ist auch Quincke's Annahme, dass für Glas — d. h. für die von ihm benutzten Gefässe — das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation $= \frac{1}{3}$ sei, durchaus unsicher und wird durch seine eigenen Versuche über die durch Druckänderung hervorgebrachte Volumenänderung von Hohlkugeln widerlegt.

Was die von Boltzmann für cylindrische und kugelförmige Condensatoren aufgestellten Formeln anlangt, so beruhen dieselben auf einem Ausdruck für die electrische Zugkraft — und zwar für die den Kraftlinien parallele, da ein Druck senkrecht gegen die Kraftlinien nach ihm nicht

1) Lamé, Elasticité des corps solides, p. 190.

existirt — welcher von dem von v. Helmholtz nach Maxwell aufgestellten Ausdruck vollständig verschieden ist, nämlich¹⁾:

$$(a) \quad p = \vartheta (1 + 2\pi \vartheta) R^2 = \vartheta (1 + 2\pi \vartheta) \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \dots \right],$$

wo R die resultirende electrische Kraft, ϑ die durch die Gleichung:

$$\lambda = - \vartheta \frac{d\varphi}{dx}$$

definierte Dielectrisirungsconstante bezeichnet; dabei sind λ, μ, ν die Componenten des dielectrischen Momentes der Volumeneinheit, $\varphi = V + U$ das Potential der ganzen freien Electricität, U das dielectrische Potential, also:

$$\begin{aligned} U &= \int \left(\lambda' \frac{d}{dx'} + \dots \right) d\tau' = - \int \left(\frac{d\lambda'}{dx} + \dots \right) \frac{d\tau'}{r} - \int [\lambda' \cos(N'x) + \dots] \frac{d\sigma'}{r} \\ &= \vartheta \int \frac{d\varphi'}{r} d\tau' + \vartheta \int \frac{d\varphi'}{dN'} \frac{d\sigma'}{r} = \vartheta \int \frac{d\varphi'}{dN'} \frac{d\sigma'}{r}, \end{aligned}$$

wenn im Inneren des Dielectricums ausser der dielectrischen Vertheilung keine freie Electricität vorhanden, also $d\varphi = 0$ ist.

Boltzmann's Ableitung des Ausdruckes (a) lässt sich kurz folgendermassen darstellen. Ist m das resultirende dielectrische Moment der Volumeneinheit, so sind zwei auf den Kraftlinien senkrechte benachbarte Flächenelemente a und b mit den electrischen Dichtigkeiten $+m$ und $-m$ belegt, und auf ein electrisches Theilchen ϵ der Fläche a wirkt der zunächstliegende Theil der Fläche b , den man als eine unendliche Ebene betrachten kann, in der Richtung der Kraftlinien, d. h. von a nach b , mit der Kraft $2\pi m\epsilon$, der umgebende Theil der Fläche a mit der Kraft o , während die Kräfte der entfernteren Theile der Flächen a und b sich gegenseitig aufheben. Daraus resultirt auf die Flächeneinheit von a die Kraft $2\pi m^2$ nach der Richtung der Kraftlinien, während der von der resultirenden Kraft R der ganzen „Oberflächenelectricität“ ausgehende Druck nach derselben Richtung $= mR$ ist; dies gibt:

$$p = 2\pi m^2 + mR = 2\pi \vartheta^2 R^2 + \vartheta R^2 = \vartheta (1 + 2\pi \vartheta) R^2$$

1) Boltzmann, Wien. Ber. 2. Separatabdruck. 1880. p. 9.

wie in (a). Hierbei scheint mir aber übersehen zu sein, dass nach dem obigen Ausdruck für UR die ganze electricische Kraft bedeutet, dass also das erste Glied des obigen Ausdruckes von p schon in dem zweiten enthalten ist und also wegfallen muss. Auch müsste, wenn die Kraft p den Charakter einer elastischen Zugkraft, d. h. einer von dem auf der einen Seite der Fläche a liegenden Theil des Körpers herrührenden Kraft haben sollte, wie Boltzmann (p. 9) behauptet, die von dem auf der anderen Seite liegenden Theil herrührende Kraft $= -p = -2\pi m^2 - mR$ sein, während dieselbe doch $= -2\pi m^2 + mR$ ist. Ausserdem genügt die Boltzmann'sche Formel dem Princip nicht, dass die bei elastischen Verschiebungen des Dielectricums gegen die electricischen Kräfte geleistete Arbeit gleich dem Zuwachs der potentiellen Energie der electricischen Vertheilung ist: ein Princip, welches an sich durchaus plausibel ist, und welches sich auch in der von Korteweg angegebenen Weise begründen lässt. Ferner führt die Boltzmann'sche Betrachtungsweise für die an der Oberfläche des Dielectricums wirkenden Kräfte auf ganz andere Ausdrücke, als für die im Inneren wirkenden¹⁾: eine Discontinuität innerhalb des Dielectricums, welche an sich höchst unwahrscheinlich ist, und durch welche namentlich die nach Maxwell stattfindende und auch von Boltzmann behauptete Analogie der electricischen Druckkräfte mit elastischen Kräften verloren geht.

Ausdrücke für die electricischen Druckkräfte, welche diesen Bedenken nicht unterliegen, sind von Korteweg²⁾ und v. Helmholtz³⁾ abgeleitet worden. Dieselben unterscheiden sich dadurch voneinander, dass v. Helmholtz nur eine, Korteweg zwei Constanten einführt; mit einer naheliegenden Verallgemeinerung aber führt die Theorie von v. Helmholtz im allgemeinen Falle genau zu demselben Ausdruck, welcher sich aus dem Korteweg'schen Ausdruck für die an einer deformirten Kugelschale geleistete Arbeit⁴⁾

1) Boltzmann, l. c. p. 11 u. 12.

2) Korteweg, Wied. Ann. 9. p. 48. 1880.

3) v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 385. 1881.

4) Korteweg, l. c. p. 55.

ergibt. Dagegen stimmen die von Korteweg für den allgemeinen Fall aufgestellten Ausdrücke (die Werthe von p_1 und p_2 p. 52 und 53) hiermit nicht überein, da sie sich nur auf den fingirten Fall eines isolirten dielectricischen Moleculs beziehen, wobei die Wirkung des übrigen Dielectricums nicht berücksichtigt ist.

Hiernach dürfte es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, wenn ich vor näherem Eingehen auf die Quincke'schen Beobachtungen zuerst die nach Korteweg verallgemeinerten Ausdrücke für die in einem Dielectricum wirkenden electricischen Druckkräfte nach der von v. Helmholtz angewandten allgemeinen Methode ableite.

§ 2. Ableitung des Ausdruckes für die in einem Dielectricum wirkenden Druckkräfte nach v. Helmholtz und Korteweg.

Es seien ϵ , ϵ_1 und $\epsilon_0 = \epsilon + \epsilon_1$ die Raumdichtheiten der von aussen zugeleiteten, der durch die dielectricische Polarisation erzeugten und der ganzen freien Electricität; e , e_1 und $e_0 = e + e_1$ die entsprechenden Flächendichtheiten auf einer Discontinuitätsfläche, d. h. der Trennungsfläche zweier verschiedener Dielectrica oder eines Dielectricums und eines Leiters; N die in das erste Medium hinein gerichtete Normale einer solchen Fläche, a , b , c ihre Richtungscosinus; φ (resp. φ_1) das Potential der ganzen freien Electricität im ersten (resp. zweiten) Medium; ϑ die Dielectrisirungsconstante, $D = 1 + 4\pi\vartheta$ die gewöhnlich als „Dielectricitätsconstante“ bezeichnete Grösse; λ , μ , ν die Componenten des dielectricischen Momentes der Volumeneinheit. Es ist dann bekanntlich:

$$\epsilon_1 = - \left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} \right),$$

$$e_1 = - [(\lambda - \lambda_1)a + (\mu - \mu_1)b + (\nu - \nu_1)c],$$

es gelten daher die Gleichungen:

$$(1) \quad \epsilon_0 = \epsilon - \left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} \right),$$

$$(1_a) \quad e_0 = e - [(\lambda - \lambda_1)a + (\mu - \mu_1)b + (\nu - \nu_1)c],$$

$$(2) \quad \Delta\varphi = -4\pi\epsilon_0, \quad (2_a) \quad \frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN} = -4\pi e_0.$$

Diese Gleichungen gelten für eine ganz beliebige Vertheilung, wobei die dielectrischen Momente ganz beliebige sein können; entsprechen letztere dagegen der augenblicklich wirkenden Kraft — ein Zustand, den ich nach v. Helmholtz als den „electrischen Gleichgewichtszustand des Dielectricums“ bezeichnen will —, so treten dazu die Gleichungen:

$$(3) \quad \lambda = -\partial \frac{d\varphi}{dx}, \quad \mu = -\partial \frac{d\varphi}{dy}, \quad \nu = -\partial \frac{d\varphi}{dz},$$

aus denen in Verbindung mit (1) und (2) folgt:

$$(3_a) \quad -4\pi\epsilon = \frac{d}{dx} \left(D \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(D \frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(D \frac{d\varphi}{dz} \right),$$

$$(3_b) \quad -4\pi e = D \frac{d\varphi}{dN} - D_1 \frac{d\varphi_1}{dN}.$$

Bekanntlich ist bei einer Verschiebung starrer geladener Leiter im Luftraum die gegen die electrischen Kräfte geleistete Arbeit gleich der Aenderung, welche durch diese Verschiebung, wobei die Electricität als an den ponderablen Moleculen fest haftend betrachtet wird, in dem Werth der electrischen Energie eintritt, d. h. in dem Werth der bei Ladung der Körper gegen die electrischen Kräfte verbrauchten Arbeit. Dieses Princip dehnen v. Helmholtz und Korteweg auch auf solche Verschiebungen aus, welche mit elastischen Deformationen der Leiter und Dielectrica verbunden sind, wobei zu der Aenderung der Energie durch die Verschiebungen und Deformationen noch die durch Aenderung der Dielectricitätsconstante hinzutritt; sie setzen nämlich die dabei gegen die ponderomotorischen electrischen Kräfte geleistete Arbeit gleich der Aenderung desjenigen Theiles W der electrischen Energie, welcher der Vertheilung der zugeleiteten Electricität entspricht, während in dem Dielectricum der Gleichgewichtszustand als sich beständig von selbst herstellend angenommen wird. Um diesen Theil der Energie zu finden, denken wir uns die schliessliche Ladung mit den Dichtigkeiten ϵ und e und den dielectrischen Momenten λ , μ , ν in der Weise ausgeführt,

dass wir zuerst die Electricitätsmengen $n\varepsilon$ und ne (wo n einen für den ganzen Raum constanten Factor < 1 bezeichnet) aus unendlicher Entfernung heranbringen und in dem Dielectricum den Gleichgewichtszustand sich herstellen lassen, wodurch wir das Gesammtpotential $n\varphi$ und die dielectricischen Momente $n\lambda$ erhalten, und dass wir dazu die aus unendlicher Entfernung herangebrachten unendlich kleinen Electricitätsmengen εdn und $e dn$ hinzufügen, wodurch auch $n\varphi$ und $n\lambda$ um φdn und λdn wachsen. Die zu der Ladung εdn und $e dn$ verbrauchte Arbeit ist:

$$dA = \int n\varphi \cdot \varepsilon dn d\tau + \int n\varphi \cdot e dn d\sigma,$$

wo $d\tau$ ein Volumenelement, $d\sigma$ ein Element einer Discontinuitätsfläche bezeichnet; mithin der ganze oben mit W bezeichnete Theil der schliesslichen Ladungsarbeit:

$$(4) \quad W = \int_0^1 \frac{dA}{dn} dn = \frac{1}{2} \int \varphi \varepsilon d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi e d\sigma.$$

Bei der gleichzeitig von selbst eintretenden Vermehrung λdn der dielectricischen Polarisation leisten die electricischen Kräfte eine Arbeit; wird hierbei aus dem Inneren eines Volumenelementes $dx dy dz$ die Electricitätsmenge $+\lambda dy dz dn$ um die Strecke δ auf die eine Fläche $dy dz$ verschoben, die Menge $-\lambda dy dz dn$ um die Strecke δ_1 auf die gegenüberliegende Fläche, so ist die hierbei geleistete Arbeit, wenn wir $\delta + \delta_1 = dx$ setzen,

$$\lambda dy dz dn \cdot \left(-n \frac{d\varphi}{dx} \delta\right) - \lambda dy dz dn \cdot \left(n \frac{d\varphi}{dx} \delta_1\right) = -\lambda d\tau n \frac{d\varphi}{dx} dn,$$

und die hierbei während der ganzen Ladung geleistete Arbeit ist:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} -V &= - \int_0^1 n dn \int \left(\lambda \frac{d\varphi}{dx} + \mu \frac{d\varphi}{dy} + v \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau \\ &= - \frac{1}{2} \int \left(\lambda \frac{d\varphi}{dx} + \dots \right) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Die ganze electricische Energie ist also:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} W + V &= \frac{1}{2} \int \varphi \varepsilon d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi e d\sigma + \frac{1}{2} \int \left(\lambda \frac{d\varphi}{dx} + \dots \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int \varphi \varepsilon_0 d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi e_0 d\sigma = \frac{1}{8\pi} \int R^2 d\tau = P, \end{aligned} \right.$$

wo P das Potential der ganzen freien Electricität auf sich selbst, und $R = \sqrt{(d\varphi/dx)^2 + (d\varphi/dy)^2 + (d\varphi/dz)^2}$ die resultierende electricische Kraft bezeichnet. Das obige Princip lässt sich nun mit einer gewissen Modification des von Korteweg¹⁾ gegebenen Beweises folgendermassen begründen. Werden die Körper electricisch geladen, so wird dazu gegen electricische Kräfte eine Arbeit P_1 verbraucht, wo P die vorstehende Grösse ist; werden sie darauf durch beliebige Verschiebung und Deformation in einen zweiten Zustand übergeführt, so ist dazu eine mechanische Arbeit A_1 gegen elastische und Verschiebungskräfte nöthig; werden sie darauf entladen, so wird dabei eine electricische Arbeit P_2 gewonnen; werden sie schliesslich in den ersten mechanischen Zustand zurückgeführt, so wird eine mechanische Arbeit A_2 gewonnen. Da dies ein Kreisprocess ist, so muss die ganze Arbeit = 0 sein, also:

$A_1 - A_2 = P_2 - P_1 = (W_2 - W_1) + (V_2 - V_1)$ nach Gl. (b). Die mechanische Arbeit $A_1 - A_2$, welche im geladenen Zustand mehr zu der Deformation verbraucht wird als im ungeladenen, muss nun gegen die ponderomotorischen und electromotorischen electricischen Kräfte verbraucht sein; der letztere (zu electro-kinetischer Energie verbrauchte) Theil ist nach dem Obigen = $V_2 - V_1$, mithin ist die bei der Deformation gegen die electricischen Kräfte verbrauchte ponderomotorische Arbeit = $W_2 - W_1$. Zugleich ergibt sich aus der vorstehenden Ableitung, dass bei Berechnung der durch Verschiebung und Deformation eintretenden Aenderung von W , in dem Dielectricum der jedesmalige Gleichgewichtszustand als sich immer gleichzeitig herstellend angenommen werden muss, dass also nur die zugeleitete Electricität, nicht aber die dielectricische Polarisation als während der Deformation an den ponderablen Molecülen fest haftend zu betrachten ist, dass mithin während der Variation beständig die Gl. (3), (3_a), (3_b) gelten; mittelst derselben ergibt sich:

1) Korteweg, l. c. p. 49.

$$(5) \quad \begin{cases} W = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \left[\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\varphi}{dx} \right) + \dots \right] d\tau \\ -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \left(D \frac{d\varphi}{dN} - D_1 \frac{d\varphi_1}{dN} \right) d\sigma = \frac{1}{8\pi} \int D R^2 d\tau. \end{cases}$$

Nach Gl. (4) und (5) lässt sich W auch in die Form bringen:

$$(6) \quad W = \int \left(\varphi \varepsilon - \frac{D}{8\pi} R^2 \right) d\tau + \int \varphi e d\sigma,$$

und dies ist die von v. Helmholtz¹⁾ angewandte Form; dieselbe bietet den Vortheil, dass man, um die von den im Inneren des Dielectricums eintretenden Aenderungen herührende Variation von W zu berechnen, die Aenderung von φ nicht zu berücksichtigen braucht; denn die von $\delta\varphi$ herührenden Glieder ersten Grades in δW sind:

$$\delta_\varphi(W) = \int \varepsilon \delta\varphi d\tau - \frac{1}{4\pi} \int D \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\delta\varphi}{dx} + \dots \right) d\tau + \int e \delta\varphi d\sigma$$

oder:

$$(e) \quad \begin{cases} \delta_\tau(W) = \int \left\{ \varepsilon + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\varphi}{dx} \right) + \dots \right] \right\} \delta\varphi d\tau \\ + \int \left[e + \frac{1}{4\pi} \left(D \frac{d\varphi}{dN} - D_1 \frac{d\varphi_1}{dN} \right) \right] \delta\varphi d\sigma = 0 \end{cases}$$

nach (3_a) und (3_b). Der Ausdruck (4) stimmt auch mit dem von Korteweg für den Fall eines Leiters angewandten überein; Korteweg setzt nämlich die Arbeit, welche bei der Deformation eines mit der Electricitätsmenge E geladenen Leiters und des umgebenden Dielectricums von den electrischen Kräften geleistet wird, $= \frac{1}{2} E(\varphi_1 - \varphi_2)$, wo φ_1 und φ_2 die Werthe des (theils von der Ladung des Leiters selbst, theils von dem Dielectricum herrührenden) Potentials auf dem Leiter vor und nach der Deformation bezeichnen.

Um nun die Variation δW des Ausdruckes W in Gl. (6) zu bilden, bezeichnen wir mit ξ , η , ζ die Componenten der Verschiebung in irgend einem Punkt des Raumes und betrachten dieselben als continuirliche Functionen der Coor-

1) v. Helmholtz, l. c. p. 396, wo das letzte Glied aus Versehen weggelassen ist.

dinaten x, y, z dieses Punktes; die Verschiebung eines Punktes einer Discontinuitätsfläche bestehe aus zwei aufeinander senkrechten tangentialen Verschiebungen δs und $\delta s'$, und aus einer normalen Verschiebung $\delta N = \xi a + \eta b + \zeta c$, welche letztere wir der Einfachheit halber als überall positiv, d. h. in das erste Medium hinein gerichtet annehmen wollen. Die Aenderung $\delta \varepsilon$ in einem festen (d. h. an der Verschiebung nicht theilnehmenden) Raumelement $d\tau$ besteht aus einem von der Verschiebung der Electricität herrührenden Theil:

$$\delta' \varepsilon = - \left(\xi \frac{d\varepsilon}{dx} + \eta \frac{d\varepsilon}{dy} + \zeta \frac{d\varepsilon}{dz} \right)$$

und aus einem von der räumlichen Dilatation

$$\alpha = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

herrührenden Theil, nämlich:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\varepsilon d\tau}{d\tau(1 + \alpha)} - \varepsilon = -\alpha \varepsilon = -\varepsilon \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right);$$

es ist also:

$$(d) \quad \delta \varepsilon = - \left[\frac{d(\varepsilon \xi)}{dx} + \frac{d(\varepsilon \eta)}{dy} + \frac{d(\varepsilon \zeta)}{dz} \right].$$

ϑ , welches wir als eine innerhalb eines Dielectricums continuirliche Function der Coordinaten betrachten, ändert sich zunächst durch die Verschiebung um:

$$\delta' \vartheta = - \left(\xi \frac{d\vartheta}{dx} + \eta \frac{d\vartheta}{dy} + \zeta \frac{d\vartheta}{dz} \right).$$

Was die Aenderung von ϑ durch die elastische Deformation betrifft, so machen wir mit Korteweg die Annahme, dass sich das resultirende dielectricische Moment $m = \vartheta R$ bei ungeänderter Kraft R sowohl durch eine lineare Dilatation g_1 in der Richtung der Kraftlinien, als auch durch zwei Dilatationen g_2 und g_3 nach zwei aufeinander und auf den Kraftlinien senkrechten Richtungen ändert, und zwar setzen wir:

$$\begin{aligned} \delta'' \vartheta &= -\alpha g_1 - \beta (g_2 + g_3) = -\beta (g_1 + g_2 + g_3) - (\alpha - \beta) g_1 \\ &= -\beta \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) - (\alpha - \beta) g_1, \end{aligned}$$

wo die Coëfficienten α und β im allgemeinsten Falle Functionen der Coordinaten sein können. Dies gibt:

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \vartheta = - \left(\xi \frac{d\vartheta}{dx} + \eta \frac{d\vartheta}{dy} + \zeta \frac{d\vartheta}{dz} \right) \\ - \beta \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) - (\alpha - \beta) g_1. \end{array} \right.$$

Dabei ist, wenn $\cos Rx$ etc. die Richtungscosinus von R bezeichnen¹⁾:

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{d\xi}{dx} \cos^2 Rx + \frac{d\eta}{dy} \cos^2 Ry + \frac{d\zeta}{dz} \cos^2 Rz \\ + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) \cos Rx \cos Ry + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) \cos Rx \cos Rz \\ + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \cos Ry \cos Rz. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir nun mit $\delta' W$ die Variation von W , wenn zunächst φ in jedem Raumpunkt ungeändert bleibt, so ist nach (d) (e) (f), indem wir zugleich berücksichtigen, dass in dem Raum zwischen zwei successiven Lagen einer Discontinuitätsfläche, dessen Element $= \delta N d\sigma$ ist, das erste Medium durch das zweite ersetzt wird:

$$(g) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \int \varphi \varepsilon d\tau = \int \varphi \delta \varepsilon d\tau + \int \varphi (\varepsilon_1 - \varepsilon) \delta N d\sigma \\ = - \int \varphi \left[\frac{d(\varepsilon \xi)}{dx} + \dots \right] d\tau + \int \varphi (\varepsilon_1 - \varepsilon) \delta N d\sigma \\ = \int \varepsilon \left(\xi \frac{d\varphi}{dx} + \dots \right) d\tau + \int \varphi (\varepsilon - \varepsilon_1) \delta N d\sigma + \int \varphi (\varepsilon_1 - \varepsilon) \delta N d\sigma \\ = \int \varepsilon \left(\xi \frac{d\varphi}{dx} + \dots \right) d\tau. \end{array} \right.$$

Ferner:

$$(h) \quad \delta' \int \varphi e d\sigma = \int e \left(\frac{d\varphi}{dN} \delta N + \frac{d\varphi}{ds} \delta s + \frac{d\varphi}{ds'} \delta s' \right) d\sigma.$$

Ferner:

$$- \delta' \int \frac{D}{8\pi} R^2 d\tau = - \frac{1}{8\pi} \int (D_1 - D) R^2 \delta N d\sigma - \frac{1}{2} \int R^2 \delta \vartheta d\tau$$

1) Lamé, l. c. p. 46.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\pi} \int (D_1 - D) R^2 \delta N d\sigma + \frac{1}{2} \int R^2 \left[\left(\xi \frac{d\vartheta}{dx} + \dots \right) + \beta \left(\frac{d\xi}{dx} + \dots \right) \right] d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int (\alpha - \beta) \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \frac{d\eta}{dy} + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dz} \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\varphi}{dz} \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] d\tau,
\end{aligned}$$

oder wenn wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
A &= -R^2 \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d(\beta R^2)}{dx} + \frac{d}{dx} \left[(\alpha - \beta) \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{d}{dy} \left[(\alpha - \beta) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \right] + \frac{d}{dz} \left[(\alpha - \beta) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dz} \right]
\end{aligned}$$

setzen, die analogen Grössen für die y - und z -Axe mit B und C bezeichnen und beachten, dass an einer Discontinuitätsfläche:

$$\frac{d\varphi}{dx} \xi + \frac{d\varphi}{dy} \eta + \frac{d\varphi}{dz} \zeta = \frac{d\varphi}{dN} \delta N + \frac{d\varphi}{ds} \delta s + \frac{d\varphi}{ds'} \delta s' \text{ ist,}$$

$$(i) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\delta' \int \frac{D}{8\pi} R^2 d\tau = -\frac{1}{2} \int (\xi A + \eta B + \zeta C) d\tau \\ & -\frac{1}{2} \int \left[\frac{D_1 - D}{4\pi} R^2 + \beta R^2 - \beta_1 R_1^2 \right. \\ & \quad \left. + (\alpha - \beta) \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)^2 - (\alpha_1 - \beta_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dN} \right)^2 \right] \delta N d\sigma \\ & -\frac{1}{2} \int \left[(\alpha - \beta) \frac{d\varphi}{dN} - (\alpha_1 - \beta_1) \frac{d\varphi_1}{dN} \right] \left(\frac{d\varphi}{ds} \delta s + \frac{d\varphi}{ds'} \delta s' \right) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Geht nun noch φ in jedem Raumpunkt in den der neuen Vertheilung entsprechenden Werth über, und verwandelt sich dadurch $W + \delta' W = W'$ in $W' + V = W''$, so ist $V = -(W' - W'') = -\delta_\varphi(W'')$, wo W'' den Werth von W in (6) für die neue Vertheilung bezeichnet. Da nun nach Gl. (c) die Glieder erster Ordnung in $\delta_\varphi(W'') = 0$ sind, so ist:

$$V = \frac{1}{8\pi} \delta \int D_1 R_1^2 \delta N d\sigma,$$

in welchem Ausdruck nur das mit $(\delta \varphi_1)^2$ behaftete Glied zu berücksichtigen ist; da in dem Raum des vorstehenden Integrals R_1^2 in R^2 übergeht, so ist $\delta(R_1^2)$ endlich, und zwar:

$$\begin{aligned}\delta(R_1^2) &= R^2 - R_1^2 = \left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 = \left[\frac{d\varphi_1}{dN} + \delta\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)\right]^2 - \left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 \\ &= 2\frac{d\varphi_1}{dN}\delta\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right) + \left(\delta\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 = 2\frac{d\varphi_1}{dN}\delta\frac{d\varphi_1}{dN} + \left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2,\end{aligned}$$

also:

$$(k) \quad V = \frac{1}{8\pi} \int D_1 \left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN} \right)^2 \delta N d\sigma.$$

Hiernach ist die vollständige Variation von W :

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= \delta' W + V = - \int \left[\xi \left(-\varepsilon \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} A \right) \right. \\ &\quad + \eta \left(-\varepsilon \frac{d\varphi}{dy} + \frac{1}{2} B \right) + \zeta \left(-\varepsilon \frac{d\varphi}{dz} + \frac{1}{2} C \right) \Big] d\tau \\ &\quad - \int \left[-e \frac{d\varphi}{dN} + \frac{D_1 - D}{8\pi} R^2 - \frac{D_1}{8\pi} \left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN} \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{\beta}{2} R^2 - \frac{\beta_1}{2} R_1^2 + \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)^2 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dN} \right)^2 \Big] \delta N d\sigma \\ &\quad \left. - \int \left(-e + \frac{\alpha - \beta}{2} \frac{d\varphi}{dN} - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \frac{d\varphi_1}{dN} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \delta s + \frac{d\varphi}{ds'} \delta s' \right) d\sigma. \right\} \end{aligned}$$

Sind nun X, Y, Z die Componenten der auf die Volumeneinheit des Inneren wirkenden electrischen Druckkraft, $\mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ die Componenten der an einer Discontinuitätsfläche auf die Flächeneinheit nach den Richtungen $\delta N, \delta s, \delta s'$ wirkenden Druckkraft, so ist nach dem obigen Princip:

$$(m) \quad \delta W = - \int (X\xi + Y\eta + Z\zeta) d\tau - \int (\mathfrak{N}\delta N + \mathfrak{S}\delta s + \mathfrak{S}'\delta s') d\sigma,$$

und die Vergleichung der Coefficienten von ξ, η, ζ gibt:

$$X = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} A \text{ etc.}$$

Aus Gl. (3_a) folgt aber:

$$\begin{aligned}-\varepsilon \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{D}{4\pi} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{D}{4\pi} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dz} \left(\frac{D}{4\pi} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{D}{8\pi} R^2 \right) + \frac{1}{2} R^2 \frac{d\vartheta}{dx},\end{aligned}$$

wodurch der vorstehende Werth von X die Form des Ausdrucks einer elastischen Zugkraft erhält, nämlich:

$$(A) \quad X = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}, \text{ analog } Y \text{ und } Z, \text{ wo:}$$

$$(B) \quad \begin{cases} X_x = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 + \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2, \text{ analog } Y_y \text{ und } Z_z, \\ X_y = Y_x = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy}, \quad X_z = Z_x = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dz}. \end{cases}$$

Hiernach wirkt auf die Einheit eines auf irgend einer Richtung n senkrechten Flächenelementes ein normaler Druck:

$$(7) \quad A_n = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2$$

und eine Zugkraft mit den Componenten:

$$X'_n = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) R^2 \cos Rn \cos Rx \text{ etc.,}$$

d. h. eine den Kraftlinien parallele Zugkraft:

$$(8) \quad B_n = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) R^2 \cos Rn.$$

Auf ein auf den Kraftlinien senkrechtes Flächenelement wirkt also ein normaler Zug:

$$(9) \quad K_p = A_n + B_n = \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2}\right) R^2 = \kappa_p R^2,$$

und auf jedes den Kraftlinien parallele Flächenelement wirkt (je nachdem $D/8\pi - \beta/2 > 0$ oder < 0 ist) ein normaler Druck oder Zug:

$$(10) \quad K_s = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 = -\kappa_s R^2.$$

Weiter gibt die Vergleichung der Coëfficienten von $\delta N, \delta s, \delta s'$ in den Gl. (l) und (m), mit Berücksichtigung der Gl. (3_b):

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 + \left(\frac{D_1}{8\pi} - \frac{\beta_1}{2}\right) R_1^2 \\ &+ \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\right) \left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 \\ \mathfrak{S} &= \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\varphi}{ds} - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\right) \frac{d\varphi_1}{dN} \frac{d\varphi}{ds} \\ \mathfrak{S}' &= \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\varphi}{ds'} - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\right) \frac{d\varphi_1}{dN} \frac{d\varphi}{ds'}, \end{aligned}$$

es wirkt also auf ein Element $d\sigma$ einer Discontinuitätsfläche

von der Seite des ersten, resp. zweiten Mediums aus ein normaler Druck, welcher für das erste Medium den Werth hat:

$$-\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right)R^2,$$

und ein der Kraftlinie paralleler Zug, welcher für das erste Medium den Werth:

$$\left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)R^2 \cos RN$$

besitzt. Dies sind aber dieselben Kräfte, welche nach Gl. (7) und (8) auf ein beliebiges Flächenelement im Inneren wirken, wodurch die Analogie der electrischen mit elastischen Druckkräften vervollständigt wird.

Die Ausdrücke (7) und (8) oder (9) und (10) stimmen mit den v. Helmholtz abgeleiteten überein, wenn man $\alpha = \beta$ setzt, d. h. nach Gleichung (e), wenn man die Dielectricitätsconstante bloß durch eine Volum- oder Dichtigkeitsänderung sich ändernd annimmt; da, wenn ϱ die Dichtigkeit bedeutet:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = -\frac{\delta\varrho}{\varrho}, \text{ so ist } \beta = \varrho \frac{d\vartheta}{d\varrho}.$$

§ 3. Electriche Ausdehnung eines kugelförmigen Condensators.

Wir betrachten eine aus einem Dielectricum bestehende Kugelschale von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 , deren innere und äussere Fläche metallisch belegt oder mit einer leitenden Flüssigkeit in Berührung ist, und auf dem Potential P , resp. 0 erhalten wird; setzen wir:

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \zeta,$$

so ist das Potential im Inneren der Kugelschale in der Entfernung r vom Mittelpunkt:

$$V = \frac{P}{\zeta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right),$$

also die resultirende Kraft:

$$R = \frac{P}{\zeta r^2}.$$

Auf ein auf r senkrechtes Flächenelement wirkt nach Gleichung (9) eine normale electrische Zugkraft:

$$K_p = \kappa_p R^2 = \kappa_p \frac{P^2}{\xi^2 r^4},$$

und auf jedes mit r parallele Flächenelement wirkt nach Gleichung (10) eine normale electrische Zugkraft:

$$K_s = -\kappa_s R^2 = -\kappa_s \frac{P^2}{\xi^2 r^4}.$$

Bezeichnen nun u , v , w die elastischen Verschiebungen eines Punktes der Kugelschale nach dem Radius, nach der Tangente des Meridians und senkrecht gegen den Meridian, so ist in unserem Falle offenbar $v = w = 0$, u eine blosse Function von r ; sind R_1 , Φ_2 , Ψ_3 die normalen Zugkräfte auf drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, von denen das erste senkrecht auf dem Radius, das zweite senkrecht auf der Tangente ist, während das dritte im Meridian liegt, so ist¹⁾:

$$R_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + 2\lambda \frac{u}{r} + \kappa_p \frac{P^2}{\xi^2 r^4},$$

$$\Phi_2 = \Psi_3 = \lambda \frac{du}{dr} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} - \kappa_s \frac{P^2}{\xi^2 r^4},$$

während die übrigen Spannungen = 0 sind; die Bedingungen des elastischen Gleichgewichtes reduciren sich auf die eine Gleichung:

$$\frac{dR_1}{dr} + \frac{2(R_1 - \Phi_2)}{r} = 0, \quad \text{d. h., wenn wir:}$$

$$(11) \quad \kappa_p - \kappa_s = \kappa \quad \text{setzen:}$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{2\kappa}{\lambda + 2\mu} \frac{P^2}{\xi^2 r^5}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn wir mit a und b die Integrationsconstanten bezeichnen:

$$u = ar + \frac{b}{r^2} + \frac{\kappa}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{P^2}{\xi^2 r^3},$$

woraus:

$$(12) \quad R_1 = (3\lambda + 2\mu)a - 4\mu \frac{b}{r^3} + \left(\kappa_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \kappa \right) \frac{P^2}{\xi^2 r^4}.$$

1) Lamé, l. c. p. 199.

Da an den zwei Grenzflächen keine äusseren Kräfte wirken, so muss für $r = r_1$ und $r = r_2$ $R_1 = 0$ sein; daraus ergibt sich:

$$a = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left(x_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)} x \right) \frac{P^2}{\zeta^2} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (r_2^3 - r_1^3)},$$

$$b = \frac{1}{4\mu} \left(x_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)} x \right) \frac{P^2}{\zeta^2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1 r_2 (r_2^3 - r_1^3)}.$$

Wir wollen die Lamé'schen Constanten λ , μ durch den Elasticitätscoefficienten E des Dielectricums und das Verhältniss σ der Quercontraction zur Längendilatation ersetzen; es ist nämlich:

$$(13) \quad \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Setzen wir zugleich:

$$r_2 - r_1 = \delta, \quad \frac{r_2}{r_1} = \varrho, \quad \text{so wird:}$$

$$a = \frac{1 - 2\sigma}{E} \frac{P^2}{\delta^2} \left(x_p - \frac{3 - 5\sigma}{2(1 - \sigma)} x \right) \frac{\varrho(\varrho - 1)}{\varrho^3 - 1},$$

$$\frac{b}{r_1^3} = \frac{1 + \sigma}{2E} \frac{P^2}{\delta^2} \left(x_p - \frac{3 - 5\sigma}{2(1 - \sigma)} x \right) \frac{\varrho(\varrho^4 - 1)}{\varrho^3 - 1}.$$

Die Vergrösserung der Volumeneinheit des Hohlraumes ist:

$$\tau = \frac{d(r_1^3)}{r_1^3} = 3 \frac{dr_1}{r_1} = 3 \frac{u_1}{r_1} = 3 \left(a + \frac{b}{r_1^3} \right) + 3 \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{2E(1 - \sigma)} x \frac{P^2}{\delta^2} \varrho^3.$$

Setzen wir hierin $\varrho = 1 + \delta/r_1$ und berücksichtigen nur die erste Potenz der als sehr klein vorausgesetzten Grösse δ/r_1 , so ergibt sich:

$$(I) \quad \tau = \frac{3}{E} \left[x_p - (1 - \sigma)x + (1 + \sigma) \left(x_p - \frac{x}{2} \right) \frac{\delta}{r_1} \right] \frac{P^2}{\delta^2},$$

oder da nach Gleichung (9) und (10):

$$x_p = \frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2}, \quad x = x_p - x_s = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{ist:}$$

$$(I_a) \quad \tau = \frac{3}{E} \left[\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2} + \sigma \frac{\alpha + \beta}{2} + (1 + \sigma) \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha - \beta}{4} \right) \frac{\delta}{r_1} \right] \frac{P^2}{\delta^2},$$

welche Formel bei Vernachlässigung von δ/r_1 mit der von Korteweg¹⁾ auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt.

1) Korteweg, l. c. p. 57.

§ 4. Electriche Ausdehnung eines cylindrischen
Condensators.

Wir betrachten eine aus einem Dielectricum gebildete cylindrische Röhre, welche an den Enden durch beliebig gekrümmte Flächen geschlossen ist, und deren innere und äussere Fläche von den Radien r_1 und r_2 metallisch belegt oder mit einer leitenden Flüssigkeit in Berührung ist und auf dem Potential P , resp. 0 erhalten wird. Setzen wir:

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \zeta,$$

so ist das Potential im Inneren des Dielectricums in der Entfernung r von der Axe, wenn wir dabei die Wirkung der Endflächen vernachlässigen:

$$V = -\frac{P}{\zeta} \log \frac{r}{r_2},$$

also die resultirende Kraft nach r :

$$R = \frac{P}{\zeta r},$$

und die normalen electriche Zugkräfte auf ein auf r senkrechtes und auf jedes mit r parallele Flächenelement nach Gleichung (9) und (10):

$$K_p = \kappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}, \quad K_s = -\kappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}.$$

Die elastischen Verschiebungen seien u nach r , w parallel der Axe des Cylinders (der z -Axe), v senkrecht gegen beide; dann können wir u als eine blosser Function von r , w als Function von z , $v = 0$ annehmen. Sind R_1 , Φ_2 , Z_3 die normalen Zugkräfte auf drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, von denen das erste senkrecht auf r , das zweite parallel mit r und der Axe, das dritte senkrecht auf der Axe ist, so ist¹⁾:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{dw}{dz} \right) + \kappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^2} \\ \Phi_2 = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{dw}{dz} \right) - \kappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2} \\ Z_3 = (\lambda + 2\mu) \frac{dw}{dz} + \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - \kappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2} \end{array} \right.$$

während die tangentialen Zugkräfte = 0 sind.

1) Lamé, l. c. p. 189.

Die Bedingungen des elastischen Gleichgewichtes sind:

$$\frac{dZ_3}{dz} = 0, \text{ d. h. } \frac{d^2 w}{dz^2} = 0, \text{ woraus } w = cz,$$

ferner:

$$\frac{dR_1}{dr} + \frac{R_1 - \Phi_2}{r} = 0,$$

also, wenn wir wieder $\kappa_p - \kappa_s = \kappa$ setzen:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{\kappa}{\lambda + 2\mu} \frac{P^2}{\xi^2 r^3},$$

woraus:

$$(b) \quad u = ar + \frac{b}{r} - \frac{\kappa}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{P^2}{\xi^2 r} (1 + 2 \log r).$$

Hieraus folgt nach (a):

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - 2\mu \frac{b}{r^3} \\ + \frac{P^2}{\xi^2 r^3} \left[\kappa_p - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \kappa + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \log r \right], \end{array} \right.$$

$$(d) \quad Z_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c - \frac{P^2}{\xi^2 r^3} \left[\kappa_p - \frac{\lambda + 4\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \kappa \right].$$

Zur Bestimmung der Constanten a , b , c haben wir zunächst die Bedingung $R_1 = 0$ für $r = r_1$ und $r = r_2$, woraus:

$$(e) \quad b = \frac{P^2}{\xi^2} \left[\frac{1}{2\mu} \left(\kappa_p - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \kappa \right) + \frac{\kappa}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{r_2^2 \log r_1 - r_1^2 \log r_2}{r_2^2 - r_1^2} \right],$$

$$(f) \quad 2(\lambda + \mu)a + \lambda c = - \frac{P^2}{\xi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\kappa \mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Zur Aufstellung einer weiteren Bedingung ist der von aussen her längs der Axe wirkende Zug Z_3 zu bestimmen. In einem Punkt der inneren Fläche der beliebig gekrümmten Kappe, welche das eine Ende der Röhre bildet, sei δ_1 die (als sehr gering angenommene) Wanddicke, ϱ und ϱ' die zwei Krümmungsradien,

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right);$$

dann kann man im Inneren der Kappe in der Entfernung ξ von dieser Fläche das Potential:

$$V = P - P \frac{\xi(1 - \gamma \xi)}{\delta_1(1 - \gamma \delta_1)}$$

setzen ¹⁾, also die nach der äusseren Normale gerichtete resultirende Kraft:

$$R = - \frac{dV}{d\xi} = \frac{P}{\delta_1} \frac{1 - 2\gamma\xi}{1 - \gamma\delta_1}.$$

Die im Inneren der Kappe wirkenden electricischen Zugkräfte sind mit den elastischen Kräften im Gleichgewicht; dagegen geben die auf die innere und äussere Fläche der Kappe nach der Normalen N wirkenden electricischen Zugkräfte $\kappa_p R_1^2$ und $\kappa_p R_2^2$ eine nach der Axe, und zwar nach aussen gerichtete Zugcomponente:

$$A = \kappa_p \int R_1^2 \cos(Nz) d\sigma_1 - \kappa_p \int R_2^2 \cos(Nz) d\sigma_2.$$

Bezeichnen hierin $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ entsprechende, d. h. durch Normalen auf der Innenfläche begrenzte Flächenelemente, so ist $d\sigma_2 = (1 + 2\gamma\delta_1) d\sigma_1$, also:

$$\begin{aligned} A &= \kappa_p \int [R_1^2 - (1 + 2\gamma\delta_1) R_2^2] \cos(Nz) d\sigma_1 \\ &= \kappa_p \int [R_1^2 - (1 + 2\gamma\delta_1) R_2^2] d\sigma, \end{aligned}$$

wo $d\sigma$ das Element des auf der Axe senkrechten inneren Querschnittes der Röhre bezeichnet; oder, wenn wir die Wanddicke des cylindrischen Theiles $r_2 - r_1 = \delta$ setzen:

$$A = \kappa_p P^2 \int \frac{1 - (1 - 2\gamma\delta_1)^2 (1 + 2\gamma\delta_1)}{\delta_1^2 (1 - \gamma\delta_1)^2} d\sigma,$$

oder mit Vernachlässigung von δ_1 gegen 1:

$$A = \kappa_p P^2 \int \frac{2\gamma}{\delta_1} d\sigma = \kappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \int 2\gamma \frac{\delta}{\delta_1} \delta d\sigma = \kappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \cdot 2\delta \sigma M\left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\right),$$

wo $M(x)$ den Mittelwerth der auf der Endfläche stattfindenden Werthe von x bezeichnet; oder da $2\delta\sigma = 2\pi r_1^2 \delta = r_1 F$ ist, wenn F den ringförmigen Querschnitt der cylindrischen Röhrenwand bezeichnet:

$$(g) \quad \frac{A}{F} = \kappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \cdot r_1 M\left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\right) = \kappa_p \frac{P^2}{\delta^2} h^2.$$

Diesem axialen Zug auf die Flächeneinheit muss nun der über den ringförmigen Querschnitt ausgedehnte Mittelwerth von Z_3 gleich sein; dies gibt nach (d):

$$(h) \quad 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = \frac{2P^2}{\xi(r_2^2 - r_1^2)} \left(\kappa_p - \frac{\lambda + 4\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \kappa \right) + \frac{P^2}{\delta^2} h^2 \kappa_p.$$

Hieraus und aus (f) bestimmen sich a und c ; mit Vernachlässigung von $(\delta/r_1)^2$ erhalten wir schliesslich:

1) Vergl. z. B. Mascart, Traité d'Electricité statique 1. p. 244.

$$(14) \left\{ \begin{aligned} 2a &= -\frac{1}{\mu(3\lambda+2\mu)} \left[(1+h^2)\lambda\kappa_p - \frac{\lambda^2+3\lambda\mu-2\mu^2}{2(\lambda+2\mu)}\kappa \right] \frac{P^2}{\delta^2}, \\ c &= \frac{1}{\mu(3\lambda+2\mu)} \left[(1+h^2)(\lambda+\mu)\kappa_p - \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\kappa \right] \frac{P^2}{\delta^2}, \\ \frac{b}{r_1^2} &= \left[\frac{\kappa_p}{2\mu} \left(1 + \frac{\delta}{r_1} \right) + \frac{\kappa}{2(\lambda+2\mu)} \left(1 + \frac{\delta}{r_1} \right) \left(\log r_1 - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{4(\lambda+2\mu)} \right] \frac{P^2}{\delta^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Vergrößerung der Volumenheit des Hohlraumes ist, wenn l die Länge des Cylinders bedeutet:

$$\tau = \frac{D(r_1^2 l)}{r_1^2 l} = 2 \frac{D r_1}{r_1} + \frac{D l}{l} = 2 \frac{u_1}{r_1} + c = 2a + c + 2 \frac{b}{r_1^2} - \frac{\kappa}{2(\lambda+2\mu)} \left(1 + 2 \log r_1 \right) \left(1 + \frac{\delta}{r_1} \right) \frac{P^2}{\delta^2},$$

also nach den obigen Werthen von a , b , c , wenn wir darin wieder E und σ nach Gleichung (13) einführen:

$$(II) \left\{ \begin{aligned} \tau &= \frac{3}{E} \left[\left(1 + \frac{1-2\sigma}{3} h^2 \right) \kappa_p - (1-\sigma)\kappa + \frac{2}{3}(1+\sigma) \left(\kappa_p - \frac{\kappa}{2} \right) \frac{\delta}{r_1} \right] \frac{P^2}{\delta^2}, \\ &= \frac{3}{E} \left[\left(1 + \frac{1-2\sigma}{3} h^2 \right) \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2} \right) - (1-\sigma) \frac{\alpha+\beta}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}(1+\sigma) \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha-\beta}{4} \right) \frac{\delta}{r_1} \right] \frac{P^2}{\delta^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Verlängerung der Längeneinheit der Röhre ist:

$$(II_a) \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{1}{E} [(1+h^2)\kappa_p - (1-\sigma)\kappa] \frac{P^2}{\delta^2} \\ &= \frac{1}{E} \left[(1+h^2) \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2} \right) - (1-\sigma) \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \frac{P^2}{\delta^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Vergleichung der Gl. (I), (II), (II_a) zeigt, dass, wenn man h und δ/r_1 vernachlässigen kann, der Werth von τ für Kugel- und Cylindercondensatoren aus demselben Material und bei demselben Werth von P/δ derselbe ist, und dass unter denselben Voraussetzungen $c = \frac{1}{3}\tau$ ist; letztere Folgerung fand Quincke nahezu bestätigt.¹⁾ Die Voraussetzung eines kleinen Werthes von δ/r_1 war bei den Quincke'schen Beobachtungen in hinreichendem Maasse erfüllt (die Werthe schwankten nach Tab. 42 zwischen 0,07 und 0,1). Was den Werth von:

1) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 518. Tab. 30. 1880.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXI.

$$h^2 = r_1 M \left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1} \right)$$

betrifft, so kann man, indem man mit $M(\delta/\delta_1)$ einen Mittelwerth bezeichnet:

$$(k) \quad h^2 = M \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right) \frac{1}{\pi r_1} \int \gamma d\sigma = M \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right) C$$

setzen, wo $d\sigma$ ein Element des inneren Querschnittes bezeichnet. Die Endfläche wird man als eine Rotationsfläche betrachten dürfen; nimmt man dieselbe z. B. als ein Sphäroid mit der Rotationsaxe a und der Queraxe b an, so ist:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{b^2}{r_1^2} - 1 \right)}},$$

nimmt man sie als ein Rotationsparaboloid mit der Meridiancurve $y^2 = 2px$, so ist:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{r_1^2}}}.$$

In beiden Fällen ist $C \leq 1$, da jedenfalls $b \geq r_1$ ist; ist die tangirende Ebene der Fläche an ihrer Grenzlinie gegen die Cylinderfläche nahezu der Cylinderaxe parallel — wie das die vorstehende Ableitung, genau genommen, voraussetzt, und wie es auch bei den Quincke'schen Röhren nach Fig. 18¹⁾, sowie nach einer brieflichen Mittheilung des Hrn. Quincke der Fall war —, so ist $b/r_1 = 1$ oder p/r_1 sehr klein, also in beiden Fällen nahezu $C = 1$. Ein kleiner Werth von h würde also nach Gl. (k) einen kleinen Werth von $M(\delta/\delta_1)$, d. h. eine bedeutende mittlere Wanddicke der Kappe im Vergleich zu der des cylindrischen Theiles voraussetzen, was durchaus nicht unwahrscheinlich ist. Dagegen würde für $C = 1$ und bei constanter, mit der der cylindrischen Wand übereinstimmender Wanddicke der Kappe $h = 1$ sein. Uebrigens scheinen mir zu einer genaueren Bestimmung des Verhältnisses von c zu τ die oben erwähnten Quincke'schen Beobachtungen wenig geeignet zu sein, da bei denselben sowohl τ als auch c durchaus nicht mit P^2 proportional waren, wie es die Theorie verlangt. Für einen beiderseits offenen Cylinder ist nach Gl. (g) $h = 0$ zu setzen.

1) Quincke, Wied. Ann. 19. Taf. II Fig. 8. 1883.

§ 5. Die Quincke'schen Beobachtungen an gläsernen
Cylindercondensatoren.

Die Hauptquelle der Unsicherheit bei Anwendung der Gl. (I) und (II) scheint in der Unsicherheit der Werthe von E und σ zu liegen. Quincke hat die Werthe von E für die einzelnen Cylindercondensatoren durch besondere Versuche bestimmt; er benutzt dazu eine Formel von Lamé¹⁾, welche sich auf eine von beliebig gekrümmten Endflächen geschlossene cylindrische Röhre von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 bezieht, welche innen und aussen einem gleichförmigen normalen Druck p_1 , resp. p_2 ausgesetzt ist. Setzt man:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = M,$$

so ist nach dieser Formel die Vergrösserung der Volumeneinheit des Hohlraumes:

$$(15) \quad \tau = \frac{3}{E} [(1 - 2\sigma)(Mp_1 - (M+1)p_2) + \frac{2}{3}(1 + \sigma)(M+1)(p_1 - p_2)],$$

also der Werth von τ bei einer Zunahme von p_1 um $\Delta p_1 = p = 1$ Atmosphäre = 0,01034 kg/qmm:

$$\frac{r_1}{p} = \frac{1}{E} [(5 - 4\sigma)M + 2(1 + \sigma)], \quad \text{woraus:}$$

$$(a) \quad E = [(5 - 4\sigma)M + 2(1 + \sigma)] \frac{p}{r_1}.$$

Quincke setzt hierin $\sigma = \frac{1}{4}$; dieser Werth ist indes- sen höchst unsicher; Wertheim²⁾ fand für Glas nahezu $\sigma = \frac{1}{3}$; im folgenden Paragraph zu erwähnende Beobach- tungen Quincke's an gläsernen Kugelcondensatoren ergaben Werthe zwischen 0,209 und 0,347; die Werthe scheinen aber sehr von der Gestalt, den inneren Spannungsverhältnissen u. s. w. der Gefässe abzuhängen, da Quincke auch für E Werthe fand, welche für die einzelnen Cylindercondensatoren zwischen 5000 und 6240, für die Kugelcondensatoren in noch viel weiteren Grenzen schwankten. Aus Gl. (a) ergibt sich z. B. für $\sigma = \frac{1}{3}$ und $\sigma = \frac{1}{4}$, da M sehr gross gegen 1 ist:

1) Lamé, l. c. p. 190.

2) Wüllner, Physik. 1. p. 182.

$$\frac{E_{\frac{1}{2}} - E_{\frac{1}{4}}}{E_{\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}M + M}{\frac{1}{4}M} = -\frac{3}{4},$$

sodass also Schwankungen von σ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ schon eine Unsicherheit von 8% im Werthe von E bedingen; etwa die Hälfte der Schwankungen in den von Quincke berechneten Werthen.

Quincke hat seine Beobachtungen über die electriche Volumenänderung τ von Cylindercondensatoren in den Tabellen 45 und 46¹⁾ zusammengestellt. Nach Gl. (II) sollten dieselben dem Quadrat des auf der Innenfläche herrschenden Potentials P , also in Tab. 45 dem Quadrat der Funkenzahl q der Maassflasche proportional sein. Berechnen wir nun aus den bei $q = 20$, $q = 40$, $q = 60$ beobachteten Werthen von τ diejenigen, welche hiernach bei $q = 20$ stattfinden müssten, für die in der ersten Columne der nachstehenden Tabelle bezeichneten Condensatoren, so ergeben sich folgende Werthe.

	$q = 20$	$q = 40$	$q = 60$
57	—	0,429	0,297
58	0,355	0,244	0,149
54	0,291	0,191	0,152
56	0,129	0,103	0,099

Wie man sieht, stimmen die nebeneinander stehenden Zahlen, welche nach der Theorie unter Voraussetzung einer von der Zeit unabhängigen Polarisirung gleich sein sollten, so wenig überein, dass diese Beobachtungsreihe zu einer Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung durchaus ungeeignet ist.

Besser stimmen die Zahlen der Beobachtungsreihe Tab. 46, bei welcher das Potential P nach einer allem Anschein nach zuverlässigeren Methode durch die Anzahl r der Umdrehungen der Schraube eines Thomson'schen Electrometers bestimmt wurde, und zwar ist nach p. 561 und 564:

$$P = 1,1415 (r + 2,445) \text{ C.-G.-S.}$$

Berechnen wir hiernach die Werthe von $\tau \cdot 10^6$ für das Potential $r = 20$ aus den für $r = 40$ und $r = 60$ gefundenen Werthen, so ergibt sich nachstehende Tabelle.

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 571 bis 573. 1883.

Tabelle I.

 $\tau \cdot 10^6$.

Nr.	$r = 20$	$r = 40$	$r = 60$	Mittel	L
57	0,218	0,808	0,291	0,272	0,0799
58	0,195	0,233	0,247	0,225	0,0922
55	0,208	0,267	—	0,237	0,1251
54	0,204	0,250	0,276	0,243	0,0700
59	0,115	0,154	—	0,134	0,0105

Obwohl auch diese Tabelle das Gesetz der Proportionalität mit P^2 nicht genau bestätigt, sondern die Werthe von τ in einem etwas stärkeren Verhältniss zu wachsen scheinen, so will ich doch die obigen Mittelwerthe als die Werthe von $\tau \cdot 10^6$ für $r = 20$, d. h. für:

$$(b) \quad P = 1,1415 \cdot 22,445$$

annehmen. In dem Ausdruck für τ in Gl. (II) hat es wegen der Unsicherheit des Werthes von σ keinen Zweck, die Grösse δ/r_1 , welche zwischen 0,07 und 0,1 schwankte, zu berücksichtigen; setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1-2\sigma}{3} h^2 = \gamma,$$

so geht die Gl. (II) über in:

$$(16) \quad \tau = \frac{3}{E} \frac{P^2}{\delta^2} \left[(1 + \gamma) \frac{D}{8\pi} + (\sigma + \gamma) \frac{\alpha}{2} - (1 - \sigma) \frac{\beta}{2} \right],$$

oder, wenn wir:

$$(17) \quad \frac{D}{8\pi} - \frac{E}{3} \frac{\delta^2}{P^2} \tau = L \quad \text{setzen,}$$

$$(18) \quad -\gamma \frac{D}{8\pi} - (\sigma + \gamma) \frac{\alpha}{2} + (1 - \sigma) \frac{\beta}{2} = L.$$

Mittelst der Werthe von τ in Tab. I, des Werthes von P in (b), der Werthe von δ , E und D in den von Quincke berechneten Tab. 39 und 42 ergeben sich die in Tab. I aufgeführten Werthe von L . Um daraus nach Gl. (18) α und β selbst zu berechnen, müsste man für die verschiedenen Condensatoren α und β als gleich, dagegen σ und γ (oder wenigstens letzteres) als verschieden und bekannt annehmen dürfen, was beides nicht der Fall ist. Jedenfalls zeigt sich aber, da die Werthe von L positiv sind (ein Resultat, welches auch trotz der in Tab. I sich zeigenden Unsicherheit der

Werthe von τ/P^2 und trotz der Unsicherheit der Werthe von E bestehen bleibt), und da γ nicht negativ ist, dass man den Beobachtungen nicht durch die Annahme Quincke's $\alpha = \beta = 0$, also $x_p = x_s = D/8\pi$ genügen kann. Für flüssige Dielectrica hat Quincke¹⁾ x_p und x_s nahezu gleich und bedeutend grösser als $D/8\pi$ gefunden; dies würde $\alpha > 0$, $\beta = -\alpha$ voraussetzen, was für Glas nach Gl. (18) nicht zulässig ist.

Quincke berechnet τ nach Gl. (15), indem er:

$$p_1 = x_p \frac{P^2}{\zeta^2 r_1^2}, \quad p_2 = x_p \frac{P^2}{\zeta^2 r_2^2}, \quad x_p = \frac{D}{8\pi}$$

setzt, wo nach § 4 $\zeta = \log r_2/r_1$ ist; dies gibt:

$$\tau = \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\zeta^2 r_1^2} = \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\delta^2}$$

oder, wenn man mit Quinke $\sigma = \frac{1}{4}$ setzt:

$$\tau = \frac{5}{2E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\delta^2};$$

dass diese Gleichung auch bei den gemachten Annahmen und für $\gamma = 0$ nicht mit Gl. (16) übereinstimmt, erklärt sich daraus, dass nach dem schon im § 1 Bemerkten die Gl. (15) auf den vorliegenden Fall nicht ohne Modification anwendbar ist.

§ 6. Die Beobachtungen Quincke's an gläsernen Kugelcondensatoren.

Bei diesen Condensatoren hat Quincke sowohl die Volumenänderung τ_1 des Hohlraumes bei einer blos auf das Innere wirkenden gleichförmigen Druckvermehrung, als auch die Volumenänderung τ_2 bei einer auf die innere und äussere Fläche wirkenden gleichen Druckvermehrung durch Vorversuche gemessen; durch Combination dieser beiden Beobachtungen lässt sich sowohl E als auch σ bestimmen. Wirkt nämlich auf eine Kugelschale vom inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 innen und aussen ein Druck p_1 und p_2 , so ist nach Gl. (12), indem wir die dort noch hinzutretenden electrischen Druckkräfte = 0 setzen:

$$R_1 = (3\lambda + 2\mu)a - 4\mu \frac{b}{r^3},$$

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 725. 1883.

und die an den zwei Grenzflächen zu erfüllenden Bedingungen lauten:

$$(3\lambda + 2\mu) a - 4\mu \frac{b}{r_1^3} = -p_1, \quad (3\lambda + 2\mu) a - 4\mu \frac{b}{r_2^3} = -p_2$$

woraus, wenn wir

$$\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} = M \text{ setzen:}$$

$$a = \frac{Mp_1 - (M+1)p_2}{3\lambda + 2\mu}, \quad \frac{b}{r_1^3} = \frac{M+1}{4\mu}(p_1 - p_2),$$

also die Vergrößerung der Volumeneinheit des Hohlraumes:

$$(19) \quad \tau = 3 \left(a + \frac{b}{r_1^3} \right) = 3 \left[\frac{Mp_1 - (M+1)p_2}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{4\mu}(p_1 - p_2) \right].$$

Bei einer Druckzunahme $\Delta p_1 = p = 1$ Atmosphäre ist also:

$$(a) \quad \frac{r_1}{p} = \frac{3M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3(M+1)}{4\mu} = \frac{3}{2E} [3(1 - \sigma)M + 1 + \sigma]$$

und bei einem Druck $p_1 = p_2 = p$ ist:

$$(b) \quad \frac{r_2}{p} = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{3}{E}(1 - 2\sigma).$$

Aus (a) und (b) ergibt sich, wenn wir $-\tau_1/\tau_2 = q$ setzen, und da, wenn $r_2 - r_1 = \delta$, mit hinreichender Annäherung:

$$3M = \frac{r_1}{\delta} - 1.$$

gesetzt werden kann:

$$(c) \quad \sigma = \frac{2q - \frac{r_1}{\delta}}{4q + 2 - \frac{r_1}{\delta}},$$

worauf sich dann E aus Gl. (b) bestimmt. Mittelst der Zahlen der Quincke'schen Tabelle 40 (p. 555) ergeben sich so für die Condensatoren 17, 61, 60 die in der zweiten und dritten Columne der nachstehenden Tabelle aufgeführten Zahlen.

Tabelle II.

$\tau \cdot 10^6.$

Nr.	σ	$E(\text{C.-G.-S.})$	$q = 10$	$q = 20$	$q = 40$	Mittel
17	0,347	$2463 \cdot 10^8$	0,940	0,787	0,801	0,843
61	0,333	$2971 \cdot 10^8$	0,287	0,216	0,218	0,240
60	0,209	$4298 \cdot 10^8$	0,069	0,068	0,071	0,069

Die drei folgenden Columnen enthalten die von Quincke in Tabelle 47 angegebenen beobachteten Werthe der electrischen Volumenänderung τ für die Potentiale (Funkenzahl der Maassflasche) $q = 10$, $q = 20$, $q = 40$, nach dem Gesetz der Proportionalität mit P^2 oder q^2 reducirt auf das Potential $q = 10$; die letzte Columnne die Mittel hieraus, welche wir als die bei $q = 10$ beobachteten Werthe nehmen; das dem Werth $q = 10$ entsprechende Potential berechnet sich aus der von Quincke (p. 575) gegebenen Formel:

$$P = \frac{5,569 \cdot 18,90}{5,569 + c},$$

wo c die in Tabelle 42 angegebene Capacität des Condensators bezeichnet (die Capacität des Condensators 17 als Einheit genommen).

Setzen wir nun, analog wie bei den Cylindercondensatoren:

$$(20) \quad \frac{D}{8\pi} \left[1 + (1 + \sigma) \frac{\delta}{r_1} \right] - \frac{E}{3} \frac{\delta^2}{P^2} \tau = L,$$

so gibt die Gl. (I_a) des § 3:

$$(21) \quad - \left(\sigma + \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\delta}{r_1} \right) \frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sigma + \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\delta}{r_1} \right) \frac{\rho}{2} = L.$$

Die nach Gl. (20) mittelst der in Tabelle II angegebenen Werthe von E und σ berechneten Werthe von L sind in der nachstehenden Tabelle III unter der Rubrik L_{47} aufgeführt.

In Tabelle 49 (p. 577) gibt Quincke für dieselben Condensatoren noch eine zweite Beobachtungsreihe, bei welcher P mittelst des Schraubenelectrometers gemessen wurde; die nachstehende Tabelle gibt die Werthe von $\tau \cdot 10^6$ für $r = 10$, 20, 30, 40, reducirt auf das Potential $r = 10$ nach der Gleichung:

$$P = 1,1415 (r + 2,445).$$

Zur Beurtheilung der Vergleichbarkeit beider Beobachtungsreihen habe ich in den mit:

$$\left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2} \right)_{47} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2} \right)_{49}$$

überschriebenen Columnen die Werthe aus den Tabellen 47 und 49, beide mit den Mittelwerthen von τ für das Potential $q = 10$, resp. $r = 10$ berechnet, neben einander gestellt;

diese Zahlen sollten für denselben Condensator gleich sein, ebenso wie die aus beiden Beobachtungsreihen berechneten, mit L_{47} und L_{49} bezeichneten Werthe von L ; man sieht, dass dies nur annähernd zutrifft, ja dass die Werthe von L für denselben Condensator mehr voneinander abweichen, als die für die verschiedenen Condensatoren.

Tabelle III.

 $\tau \cdot 10^6$.

Nr.	$r=10$	$r=20$	$r=30$	$r=40$	Mittel	$\left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2}\right)_{47}$	$\left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2}\right)_{49}$	L_{47}	L_{49}
17	0,520	0,529	0,547	0,424	0,505	0,003 284	0,002 502	0,227	0,304
61	0,251	0,277	0,285	0,277	0,272	0,000 925	0,001 348	0,288	0,219
60	0,077	0,077	0,081	0,083	0,079	0,000 238	0,000 391	0,262	0,185

Auch diese Beobachtungsreihen gestatten daher keinen weiteren Schluss, als dass α und β nicht beide $= 0$ sind, und geben eine ungefähre Anschauung von dem Werth der in Gl. (21) links stehenden Grösse.

Boltzmann¹⁾ findet aus dem in § 1, Gl. (a) angegebenen Ausdruck der electrischen Druckkraft für einen Kugelcondensator die Formel:

$$\tau = \frac{3}{8\pi E} [1 + (D^2 - 1) \sigma] \frac{P^2}{\delta^2},$$

dieselbe gibt z. B. für den Condensator 17 beim Potential $q=10$ $\tau=6,68 \cdot 10^{-6}$ statt des beobachteten Werthes $0,843 \cdot 10^{-6}$.

Strassburg, December 1883.

VI. Zur Berechnung des Potentials von Rollen; von Bernhard Weinstein.

In der nachfolgenden Arbeit möchte ich Formeln und Methoden zur numerischen Berechnung des magnetischen Potentials coaxialer Rollen aufeinander und auf sich selbst geben und eine Anwendung von denselben auf die infolge ihrer Benutzung zur Bestimmung des Ohms so wichtigen

1) Boltzmann, Wien. Ber. 1. Separatabdr. p. 7. 1880.