

Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare.

(Di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Le relazioni fra i determinanti di una matrice sono state presentate da vari Autori sotto varie forme diverse. Così il VAHLEN ne ha fatto l'argomento di un recente lavoro (*Ueber die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix*. Crelle, v. 112, pag. 306 [1893]); il NETTO ha presentato ultimamente una formola notevole (*Zwei Determinantensätze*, Acta Math., v. 17, pag. 199 [1893]), e l'HUNYADY ha costruito per scopo geometrico una lunga serie di identità relative a questo soggetto (*Ueber einige Determinanten-Gleichungen*. Crelle, v. 94, pag. 171 [1882]).

Ora tali relazioni possono riassumersi tutte in una formola unica di tipo semplice, e che non è altro che una delle notissime identità che occorrono nella teoria del calcolo simbolico delle forme algebriche di specie m ; è formata con una somma algebrica di prodotti di due determinanti di ordine m . Qualunque altra relazione fra determinanti dello stesso ordine, o fra determinanti anche di ordine diverso (particolarizzando alcune delle colonne della matrice, col porre eguali a zero tutti gli elementi, meno uno, che si pone invece eguale ad 1, si hanno relazioni fra determinanti di ordine diverso), non può che essere una conseguenza di identità del tipo indicato. Ciò non è che un caso particolare di un teorema più generale che può dimostrarsi per le combinazioni di tipo invariantivo. (V. per es. la mia Memoria: *Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche di tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche*. Memorie dei Lincei, serie 4.^a, v. V, pag. 374 [1888].)

Sebbene però tutte le altre identità non siano che trasformazioni di quelle indicate, ciò non toglie che queste possono raggrupparsi in maniera da dar luogo a delle formole e dei teoremi notevoli da per sè stessi.

Costruiamo la matrice che ha $m + 1$ colonne della matrice data e propriamente quelle di ordini:

$$i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}.$$

Poniamo poi come ultima linea di questa matrice parziale una linea formata cogli elementi:

$$\begin{pmatrix} i_1 & j_1 j_2 \dots j_{m-1} \\ i_2 & j_1 j_2 \dots j_{m-1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ i_{m+1} & j_1 j_2 \dots j_{m-1} \end{pmatrix},$$

dove $j_1 j_2 \dots j_{m-1}$ rappresentano gli indici di altre colonne della matrice data (in particolare alcune delle j potrebbero essere eguali alle i). Si viene così a formare un determinante di ordine $m + 1$ il quale è identicamente zero, perchè gli elementi dell'ultima linea sono le medesime combinazioni lineari degli elementi delle linee parallele. Sviluppando questo determinante secondo gli elementi dell'ultima linea si ha:

$$\sum \pm (i_1 i_2 \dots i_m) (i_{m+1} j_1 j_2 \dots j_{m-1}) = 0, \quad (\text{A})$$

dove il sommatorio si estende a tutte le permutazioni circolari degli indici i , e i segni dei termini sono alternati se m è dispari, e sono tutti positivi se m è pari. È questa la relazione fondamentale dalla quale tutte le altre possono ricavarsi.

Cominciamo col mostrare come le relazioni di VAHLEN avanti citate si possono ricavare dalle relazioni (A) le quali hanno il vantaggio di essere tutte di 2.^o grado nei determinanti:

Per intenderci più facilmente chiameremo nella relazione (A) elementi circolanti gli indici $i_1 i_2 \dots i_{m-1}$, e elementi fissi gli indici $j_1 j_2 \dots j_{m-1}$. Se tutti gli elementi fissi sono diversi dai circolanti, allora la (A) conterrà $m + 1$ termini; se r elementi fissi sono eguali ad altrettanti circolanti, allora r termini si annullano, e restano solo $m - r + 1$ termini. Nella (A) poniamo in particolare:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1, & i_2 &= 2, \dots & i_m &= m \\ j_2 &= i_1 = 1, & j_3 &= i_2 = 2, \dots & j_{m-1} &= i_{m-2} = m - 2 \\ i_{m+1} &= i, & j_1 &= j. \end{aligned}$$

Allora si ha una relazione a tre termini solo, cioè:

$$\begin{aligned} & (1, 2, \dots, m-2, m-1, m)(i, j, 1, \dots, m-2) + \\ & + (1, 2, \dots, m-2, m, i)(m-1, j, 1, \dots, m-2) + \\ & + (1, 2, \dots, m-2, i, m-1)(m, j, 1, \dots, m-2) = 0. \end{aligned}$$

Questa non è altro che una delle relazioni di 2.^o grado della formola generale di VAHLEN; quella che si ottiene ponendo in essa $i_1 = 1, \dots, i_{m-2} = m-2, i_{m-1} = i, i_m = j$.

Passiamo alle relazioni di 3.^o grado di VAHLEN. Una di esse è per es.:

$$\begin{aligned} & (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_{m-1}, i_m)(1, 2, \dots, m)^2 = \\ = & \begin{vmatrix} (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, m-1, m), (1, 2, \dots, m-2, i_{m-2}, m), (1, 2, \dots, m-1, i_{m-2}), \\ (1, 2, \dots, m-3, i_{m-1}, m-1, m), (1, 2, \dots, m-2, i_{m-1}, m), (1, 2, \dots, m-1, i_{m-1}), \\ (1, 2, \dots, m-3, i_m, m-1, m), (1, 2, \dots, m-2, i_m, m), (1, 2, \dots, m-1, i_m). \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Sviluppiamo questo determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, e teniamo conto delle relazioni simili all'ultima scritta. I minori di 2.^o ordine compresi nelle due prime colonne di questo determinante sono rispettivamente eguali a:

$$\begin{aligned} & + (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_{m-1}, m)(1, 2, \dots, m), \\ & - (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_m, m)(1, 2, \dots, m), \\ & + (1, 2, \dots, m-3, i_{m-1}, i_m, m)(1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

e quindi, sopprimendo il fattore comune $(1, 2, \dots, m)$, resta la relazione:

$$\begin{aligned} & (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_{m-1}, i_m)(1, 2, \dots, m-2, m-1, m) - \\ & - (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_{m-1}, m)(1, 2, \dots, m-2, m-1, i_m) + \\ & + (1, 2, \dots, m-3, i_{m-2}, i_m, m)(1, 2, \dots, m-2, m-1, i_{m-1}) - \\ & - (1, 2, \dots, m-3, i_{m-1}, i_m, m)(1, 2, \dots, m-2, m-1, i_{m-2}) = 0, \end{aligned}$$

che si ricava da (A) ponendo:

$$j_1 = 1, \dots, j_{m-1} = m-1,$$

e

$$i_1 = 1, \dots, i_{m-3} = m-3, i_{m+1} = m.$$

Così si potrebbe dimostrare che lo stesso accade per le relazioni di quarto grado, e di grado superiore, e, *in generale tutte le possibili relazioni fra i determinanti di una matrice non sono che trasformazioni opportune della formola A.*

§ 2. Su di una formola di NETTO e su di un'altra ad essa affine (*).

Consideriamo $m + 2$ colonne della matrice data. Indichiamo con $\Delta_{\alpha\beta}$ il determinante che si ottiene sopprimendo le colonne α, β ; allora si ha la relazione identica:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{m_1 n_1} & \Delta_{m_1 n_2} & \Delta_{m_1 n_3} \\ \Delta_{m_2 n_1} & \Delta_{m_2 n_2} & \Delta_{m_2 n_3} \\ \Delta_{m_3 n_1} & \Delta_{m_3 n_2} & \Delta_{m_3 n_3} \end{vmatrix} = 0,$$

dove m_1, n_1 , ecc., sono indici scelti fra quelli che compongono la matrice parziale di $m + 2$ colonne. Questa è una formola che il sig. NETTO ha fatto conoscere in un recente lavoro negli *Acta Mathematica* (v. XVII, pag. 199).

Ora questa formola discende subito dalla relazione fondamentale (A), e ne discende poi anche un'altra formola che ha perfetta analogia con questa, ma che nella sostanza è affatto diversa.

Per fissare le idee supponiamo che le $m - 4$ colonne che si ottengono quando dalle $m + 2$ scelte si tolgono quelle di indici $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ sieno i_1, i_2, \dots, i_{m-4} .

Come caso particolare della (A) si costruisca la relazione a tre termini:

$$\begin{aligned} & (i_1 \dots i_{m-4} m_2 m_3 n_2 n_3) (i_1 \dots i_{m-4} m_1 m_2 m_3 n_1) + \\ & + (i_1 \dots i_{m-4} m_2 m_3 n_3 n_1) (i_1 \dots i_{m-4} m_1 m_2 m_3 n_2) + \\ & + (i_1 \dots i_{m-4} m_2 m_3 n_1 n_2) (i_1 \dots i_{m-4} m_1 m_2 m_3 n_3) = 0, \end{aligned}$$

cioè colla notazione ora introdotta:

$$\Delta_{m_1 n_1} \Delta_{m_2 n_3} + \Delta_{m_1 n_2} \Delta_{m_3 n_1} + \Delta_{m_1 n_3} \Delta_{m_2 n_1} = 0,$$

e mutando m_1 , in m_2 e in m_3 , e osservando che i secondi fattori di ciascun termine restano inalterati, si riconosce subito che il determinante dei primi fattori deve essere zero.

(*) Da non confondersi con quella che forma l'argomento di una mia Nota ultimamente stampata ai Lincei (1896), la quale porta lo stesso titolo di questo paragrafo.

Invece in questa stessa formola si cambi m_1 in m'_1 e poi ancora in m''_1 , dove m'_1 , m''_1 sono indici nuovi scelti fra quelli che appartengono alle altre colonne non ancora considerate. Si consideri una matrice con $m + 4$ colonne:

$$i_1 \dots i_{m-4} m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3 m'_1 m''_1.$$

Poniamo $m_2 = i_{m-3}$, $m_3 = i_{m-2}$; i determinanti che entrano allora nelle tre formole hanno tutti per parte comune le $m - 2$ colonne $i_1 \dots i_{m-2}$. Indichiamo con $\Delta'_{\alpha\beta}$ un determinante formato *aggiungendo* a queste $m - 2$ colonne fisse, le due colonne α , β . La prima delle relazioni di sopra prende la forma:

$$\Delta'_{n_2 n_3} \cdot \Delta'_{m_1 n_1} + \Delta'_{n_3 n_1} \cdot \Delta'_{m_1 n_2} + \Delta'_{n_1 n_2} \cdot \Delta'_{m_1 n_3} = 0,$$

e le altre due si ottengono mutando m_1 in m'_1 , m''_1 .

Si ha quindi:

$$\begin{vmatrix} \Delta'_{m_1 n_1} & \Delta'_{m_1 n_2} & \Delta'_{m_1 n_3} \\ \Delta'_{m'_1 n_1} & \Delta'_{m'_1 n_2} & \Delta'_{m'_1 n_3} \\ \Delta'_{m''_1 n_1} & \Delta'_{m''_1 n_2} & \Delta'_{m''_1 n_3} \end{vmatrix} = 0,$$

che *formalmente* costituisce una relazione analoga a quella di NETTO, ma che nella sostanza ne è diversa, perchè *mentre nella relazione di NETTO gli elementi sono determinanti ottenuti sopprimendo due colonne in una matrice di $m + 2$ colonne, in questa relazione gli elementi sono determinanti ottenuti aggiungendo due colonne ad una matrice di $m - 2$ colonne.*

§ 3. Relazioni fra i determinanti formati colle colonne di due determinanti dati. Continuazione delle ricerche di PICQUET. Estensione di un teorema di SYLVESTER.

Sieno dati due determinanti di ordine m :

$$A = (a_1 a_2 \dots a_m)$$

$$B = (b_1 b_2 \dots b_m).$$

Si può formare una matrice di $2m$ colonne e m linee ponendo le due matrici dei due determinanti l'una accanto all'altra.

Scegliamo in tutti i modi possibili k colonne di A e al loro posto sostituiamo k colonne di B scelte in tutti i modi possibili; abbiamo in tutto $\binom{m}{k}^2$ determinanti formati con $m - k$ colonne di A e k di B ; questi possono disporsi in una matrice quadrata e formare a loro volta un determinante che chiameremo D_{m-k} ; analogamente poi può formarsi il determinante D_k i cui elementi sono determinanti contenenti k colonne di A e $m - k$ di B ; questi due determinanti sono evidentemente degli stessi ordini. Se B diventa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

allora in particolare D_{m-k} e D_k diventano i determinanti formati coi minori di ordine $m - k$ e di ordine k del determinante A .

Su questi determinanti D , il PICQUET dimostra i due teoremi:

1. Sia D_k che D_{m-k} sono ciascuno eguali al prodotto di una potenza di A per una potenza di B :

$$D_k = A^{\binom{m-1}{k-1}} B^{\binom{m-1}{k}}.$$

2. Ogni minore di ordine r di D_k è eguale al prodotto del complemento del suo omologo in D_{m-k} per una potenza di A e una potenza di B ; propriamente per:

$$A^{r-\binom{m-1}{k-1}} B^{r-\binom{m-1}{k}}.$$

(Si suppongono naturalmente ordinati convenientemente gli elementi di D_k e D_{m-k} .)

A questi teoremi di PICQUET noi ne aggiungiamo alcuni altri.

Consideriamo D_{m-1} , che è di ordine m . Noi dimostreremo che:

3. Ogni minore di ordine k di D_{m-1} è eguale a A^{k-1} moltiplicato per un elemento del determinante D_{m-k} .

Questo teorema non è altro che la estensione di quello sugli ordinari determinanti reciproci.

In effetti un minore di 2.^o ordine di D_{m-1} è (salvo i nomi degli elementi) riducibile sempre al tipo:

$$\begin{vmatrix} (a_1 \dots a_{m-2} a_{m-1} b_1), & (a_1 \dots a_{m-2} a_m b_1) \\ (a_1 \dots a_{m-2} a_{m-1} b_2), & (a_1 \dots a_{m-2} a_m b_2) \end{vmatrix},$$

che per effetto della identità fondamentale può trasformarsi in:

$$(a_1 \dots a_{m-2} a_{m-1} a_m) (a_1 \dots a_{m-2} b_1 b_2),$$

di cui il primo fattore è A e l'altro è un elemento di D_{m-2} . Consideriamo ora un minore di 3.° ordine di D_{m-1} . Salvo i nomi degli elementi, esso è sempre del tipo:

$$\begin{vmatrix} (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} b_1), (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-1} a_m b_1), (a_1 \dots a_{m-3} a_m a_{m-2} b_1) \\ (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} b_2), (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-1} a_m b_2), (a_1 \dots a_{m-3} a_m a_{m-2} b_2) \\ (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} b_3), (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-1} a_m b_3), (a_1 \dots a_{m-3} a_m a_{m-2} b_3) \end{vmatrix}$$

Sviluppandolo secondo gli elementi dell'ultima linea, e osservando che ai minori di 2.° ordine compresi nelle due prime linee, si può applicare il risultato della dimostrazione già fatta, si ha:

$$\begin{aligned} A \Big[& (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} b_3) (a_1 \dots a_{m-3} a_m b_1 b_2) - \\ & - (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-1} a_m b_3) (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-2} b_1 b_2) + \\ & + (a_1 \dots a_{m-3} a_m a_{m-2} b_3) (a_1 \dots a_{m-3} a_{m-1} b_1 b_2) \Big], \end{aligned}$$

che, per effetto della solita identità fondamentale, è uguale a:

$$A^2 (a_1 \dots a_{m-3} b_1 b_2 b_3),$$

cioè A^2 moltiplicato per un elemento di D_{m-3} . Si vede che questo procedimento può continuarsi e darà sempre l'analogo risultato. Il teorema proposto resta così dimostrato in generale.

Nella teoria dei determinanti formati coi minori di un altro è noto il seguente teorema di SYLVESTER. (V. per es. D'OVIDIO, Acc. Torino 1876-77-90; PICQUET, op. cit.)

Indichiamo con Δ_{m-k} il determinante formato coi minori di ordine $m-k$ di un determinante dato Δ di ordine m . Formiamo quel minore $\Delta_{\lambda k}$ di Δ_{m-k} , i cui elementi sieno minori contenenti sempre $m-\lambda$ linee e colonne fisse di Δ , e $\lambda-k$ linee e colonne variabili ($\lambda > k$). Il minore $\Delta_{\lambda k}$ è di ordine $\binom{\lambda}{k}$ ed esso è eguale ad una potenza di Δ moltiplicata per una potenza di quel minore di Δ racchiuso dalle $m-\lambda$ linee e colonne fisse.

Ora vediamo in che modo potrà estendersi questo teorema.

Consideriamo D_{m-k} e un suo minore formato nel seguente modo: i suoi elementi contengano tutti $m - \lambda$ colonne fisse di A e $\lambda - k$ colonne variabili ($\lambda > k$), e poi k colonne di B scelte fra λ assegnate.

Un tal minore lo chiameremo $D_{\lambda k}$ ed è di ordine $\binom{\lambda}{k}$.

Moltiplichiamo ogni suo elemento per A^{k-1} ; tutto il minore resterà moltiplicato per:

$$A^{\binom{\lambda}{k}(k-1)}$$

In forza del teorema ora dimostrato, ogni elemento suo diventa un certo minore di ordine k di D_{m-1} , e propriamente un minore i cui elementi sono determinanti contenenti tutte le $m - \lambda$ colonne fisse di A , e non contenenti mai le $m - \lambda$ colonne escluse di B .

Ora in D_{m-1} tutti gli elementi così formati, costituiscono un minore di ordine λ che chiameremo $D^{(\lambda)}$; abbiamo dunque che, dopo la moltiplicazione indicata, gli elementi di $D_{\lambda k}$ diventano minori di ordine k di $D^{(\lambda)}$, e si ha quindi il determinante formato coi minori di ordine k di $D^{(\lambda)}$, il quale, come si sa, è eguale ad una potenza di $D^{(\lambda)}$.

Abbiamo dunque la formola:

$$A^{\binom{\lambda}{k}(k-1)} D_{\lambda k} = [D^{(\lambda)}]^{\binom{\lambda-1}{k-1}}.$$

Intanto a $D^{(\lambda)}$, come minore di D_{m-1} , può applicarsi ancora il teorema sopra dimostrato, e si ha che $D^{(\lambda)}$ è eguale a $A^{\lambda-1}$ moltiplicato per quell'elemento di $D_{m-\lambda}$ che contiene tutte le $m - \lambda$ colonne fisse di A e le λ scelte di B . Supposto che le $m - \lambda$ colonne fisse di A sieno indicate con $a_1 a_2 \dots a_{m-\lambda}$, e sieno indicate con $b_{m-\lambda+1} \dots b_m$ le colonne scelte di B , tale elemento resta rappresentato con:

$$(a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m).$$

Raccogliendo si ha dunque infine la formola:

$$D_{\lambda k} = A^{\binom{\lambda-1}{k}} \cdot (a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}},$$

che è una formola analoga a quella del citato teorema di SYLVESTER, il quale se ne ricava come caso particolare se il determinante B si suppone

eguale a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Possiamo dunque concludere:

4. *Separiamo le colonne di A e B in due categorie, $m - \lambda$ nell'una e λ nell'altra. Formiamo tutti i determinanti colle $m - \lambda$ colonne di A, altre $\lambda - k$ di A, e le rimanenti k di B scelte fra le λ della seconda categoria; presi come elementi questi determinanti e opportunamente ordinati si costruisca con essi il determinante di ordine $\binom{\lambda}{k}$. Questo sarà eguale alla potenza $\binom{\lambda - 1}{k}^{ma}$ di A per la potenza $\binom{\lambda - 1}{k - 1}^{ma}$ del determinante formato colle $n - \lambda$ colonne di A e colle λ di B.*

Al minore $D_{\lambda k}$ di D_{m-k} si può far corrispondere in D_k il complemento del suo omologo che è di ordine:

$$\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k},$$

e, per il teorema citato di PICQUET (teor. 2), questo è eguale a:

$$D_{\lambda k} \cdot A^{\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k} - \binom{m-1}{k}} B^{\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k} - \binom{m-1}{k-1}},$$

che, in forza del teorema dimostrato, è:

$$A^{\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k} + \binom{\lambda-1}{k} - \binom{m-1}{k}} B^{\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k} - \binom{m-1}{k-1}} (a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}},$$

che è eguale a:

$$A^{\binom{m-1}{k-1} - \binom{\lambda-1}{k-1}} B^{\binom{m-1}{k-1} - \binom{\lambda-1}{k-1}} (a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}}.$$

Abbiamo dunque:

5. *Formiamo il minore di D_k che abbia per elementi, determinanti contenenti k colonne di A NON SCELTE TUTTE fra le λ della seconda categoria, e $m - k$ colonne di B fra le quali non sono mai comprese TUTTE le $m - \lambda$ della prima categoria; fra le colonne compaia sempre ALMENO UNA colonna di A scelta fra quelle della prima categoria, e non compaia ALMENO UNA*

delle colonne di B fra quelle della prima categoria. Tal minore così formato è di ordine $\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k}$ e si esprime colla formola soprascritta.

Questa formola è l'estensione di un teorema del D'OVIDIO (loc. cit.).

§ 4. Estensione di un teorema dato dal sig. NETTO come estensione della cosiddetta formola di scomposizione di LAPLACE.

Il sig. NETTO in un lavoro intitolato *Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes* (Crelle, v. 114, pag. 345), dimostra il seguente teorema:

In un determinante dato di ordine m sopprimiamo $m - \lambda$ linee e colonne, e facciamo la scomposizione del determinante restante secondo la cosiddetta regola di LAPLACE, cioè facciamo la somma dei prodotti *con segni opportuni* di tutti i minori compresi in k_1 linee, per tutti quelli compresi in k_2 linee, e così di seguito, per tutti quelli compresi in k_i linee, dove $k_1 + \dots + k_i = \lambda$, e due fattori di un prodotto non contengono mai in comune una colonna del determinante primitivo. Il risultato di questa somma sarà il determinante delle λ colonne e linee non soppresse. Se ora i vari fattori dei vari termini di questa somma si intendono *orlati* delle $m - \lambda$ linee e colonne soppresse, allora la somma rappresenterà invece il prodotto di tutto il determinante primitivo per la potenza $(i - 1)^{ma}$ del minore formato dalle $m - \lambda$ linee e colonne fisse.

Di questo teorema io ho dato in un altro lavoro (*) una dimostrazione semplice, e ho trovato poi anche un altro teorema che è ad esso affine, e che consiste in questo: si faccia la somma di prodotti come nella regola di LAPLACE; poi ad ogni fattore si sostituisca il suo minore complementare; indi si orlino tutti i fattori colle solite $m - \lambda$ linee e colonne fisse; il risultato della somma sarà allora, viceversa, la potenza $(i - 1)^{ma}$ del determinante dato per la prima potenza del minore formato colle $n - \lambda$ linee e colonne fisse.

Estendiamo ora questi teoremi secondo il punto di vista indicato nei paragrafi precedenti.

Separiamo, come avanti, le colonne di due determinanti dati A , B di ordine m , in due categorie, $m - \lambda$ nella prima e λ nella seconda; per fissare

(*) V. Nota nei Rend. dei Lincei. Marzo, 1896.

le idee supponiamo che si separino le prime $m - \lambda$ dalle ultime λ . Le λ di B dividiamole in $k_1 + k_2 + \dots + k_i = \lambda$. La generalizzazione del teorema è la seguente:

6. *Formiamo un determinante colle $m - \lambda$ colonne fisse di A , e poi altre k_1 di A in tutti i modi possibili, e le $\lambda - k_1$ colonne di B già fissate; poi un altro determinante colle $m - \lambda$ colonne fisse di A , con altre k_2 colonne di A (diverse tutte dalle k_1 già considerate), e colle altre $\lambda - k_2$ colonne di B_2 fissate, e così proseguiamo per i volte di seguito; poi facciamo la somma algebrica dei prodotti di questi i determinanti tali che in ciascun termine due fattori non abbiano mai in comune altre colonne di A che le $m - \lambda$. Se supponiamo che B diventi cogli elementi zero, meno quelli della diagonale principale che siano eguali ad 1, allora si vede che questa somma di prodotti diventa precisamente quella che occorre nel teorema succitato di NETTO; noi daremo appunto a ciascun termine il segno $+$ o $-$ secondochè $+$ o $-$ sarebbe il segno del corrispondente termine della formola di NETTO. Ora io dico che questa somma è eguale a:*

$$A \cdot (a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)^{i-1},$$

se $a_1 \dots a_{m-\lambda}$ sono le $m - \lambda$ colonne fisse di A , e $b_{m-\lambda+1} \dots b_m$ sono le λ colonne di B della seconda categoria.

La dimostrazione del teorema la facciamo dipendere dal teorema dato nel paragrafo precedente.

Moltiplichiamo ogni termine della somma (che è sempre un elemento di $D_{m-\lambda+k_1}$ moltiplicato per uno di $D_{m-\lambda+k_2}$, ecc.) per:

$$A^{\lambda-k_1-1} \cdot A^{\lambda-k_2-1} \dots A^{\lambda-k_i-1}.$$

Mantenendo le stesse notazioni del paragrafo precedente, ogni termine della somma diventa il prodotto di un minore di ordine $\lambda - k_1$ di $D^{(\lambda)}$ moltiplicato per un minore di ordine $\lambda - k_2$, e così di seguito. Se in luogo di questi minori si sostituiscono i loro complementi in $D^{(\lambda)}$, si ha una somma di prodotti che non è altro che lo sviluppo secondo la regola di LAPLACE del determinante $D^{(\lambda)}$. La somma considerata avanti, moltiplicata per quella potenza di A , non è altro quindi che ciò che si ottiene facendo lo sviluppo di $D^{(\lambda)}$ secondo la regola di LAPLACE, e poi sostituendo ad ogni minore il suo complemento. Si può ritenere come teorema noto, e del resto potrebbe facilmente dimostrarsi (v. mia Nota citata) che così facendo si ha la potenza $i - 1^{ma}$ di $D^{(\lambda)}$; dunque possiamo infine concludere che la nostra somma

moltiplicata per:

$$A^{(\lambda-1)i-(k_1+\dots+k_i)},$$

è eguale a:

$$[D^{(\lambda)}]^{i-1},$$

cioè (v. paragrafo precedente) a:

$$[A^{\lambda-1}(a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)]^{i-1},$$

dunque si ha infine che la somma da noi formata è eguale a:

$$A \cdot (a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m)^{i-1},$$

giusta il teorema enunciato.

Possiamo similmente enunciare un teorema che è analogo a questo e che è a sua volta l'estensione di quell'altro cui ho accennato, analogo al teorema di NETTO:

7. *Formiamo la stessa somma precedente, ma sostituendo ad ogni fattore di un termine (fattore che è un determinante con $m - \lambda$ colonne fisse di A , con k_i altre colonne di A , e con $\lambda - k_i$ di B), l'altro determinante, che potrebbe dirsi complementare, cioè formato colle stesse $m - \lambda$ colonne di A , poi colle restanti $\lambda - k_i$ colonne di A , e colle restanti k_i colonne di B . Si ha allora una somma di prodotti di i fattori, che è eguale a:*

$$A^{i-1}(a_1 \dots a_{n-\lambda} b_{n-\lambda+1} \dots b_m).$$

La dimostrazione si fa come quella di avanti, moltiplicando ogni termine per:

$$A^{k_1-1} A^{k_2-1} \dots A^{k_i-1},$$

e osservando che allora si ha esattamente lo sviluppo per minori secondo la regola di LAPLACE del determinante $D^{(\lambda)}$, e quindi si ha:

$$A^{\lambda-1}(a_1 \dots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \dots b_m),$$

e sopprimendo al primo e secondo membro una opportuna potenza di A , resta la formola annunciata.

Pavia, febbraio del 1896.