Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie.

Von

Felix Klein in Leipzig.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Es ist jetzt beiläufig ein Jahr, dass ich in dem Schriftchen*): „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen" (Leipzig, B. G. Teubner) eine Auffassung der Riemann'schen Theorie publicirte, bei welcher die Riemann'sche *Fläche*, als beliebig im Raume gegebene, geschlossene Fläche, den eigentlichen Ausgangspunkt abgab. Auf einer solchen Fläche existiren, wie ich dort durch physikalische Betrachtungen zeigte, gewisse Potentialfunctionen, und die Wechselbeziehungen zwischen letzteren sind es, welche, in die Sprache der Analysis übersetzt, die gewünschten functionentheoretischen Resultate ergeben. Die physikalischen Anschauungen sind dabei, wie ich in der Vorrede hervorhob, nur ein vorläufiges Aequivalent für strengere Ueberlegungen. Ich werde im ersten Abschnitte des Folgenden auf letztere so weit eingehen, dass der Leser im Stande ist, sich in der betreffenden Literatur mit Leichtigkeit zurecht zu finden.

Darüber hinaus beabsichtige ich im Folgenden zuvörderst (und zwar noch in demselben ersten Abschnitte) eine gewisse Weiterentwickelung des in Betracht kommenden Ideenkreises, auf welche ich übrigens an verschiedenen Stellen meiner Schrift bereits hinwies (pag. 61 – 63, etc.). Es handelt sich darum, den Begriff der Riemann'schen Fläche noch frei zu machen von gewissen Zufälligkeiten, die ihm vermöge der früheren Darstellungsweise anhaften. Statt uns die Riemann'sche Fläche als *geschlossen* vorzustellen, dürfen wir uns eine *berandete* Fläche, oder auch ein *Aggregat berandeter Flächenstücke* gegeben denken, wofern nur die verschiedenen Randcurvenstücke vermöge irgend eines Gesetzes einander paarweise so zugewiesen werden, dass *in abstracto* eine geschlossene Mannigfaltigkeit vorliegt.

---

*) Im Folgenden durchweg als R. Th. citirt.

Eine so berandete Fläche denke man sich nun, wie ich im zweiten Abschnitte des Folgenden erläutere, als Stück einer anderen, geschlossenen Fläche. Es ergiebt sich sodann ein wichtiges allgemeines Princip, welches ich als *Princip der analytischen Fortsetzung* bezeichne. Nur in speciellen Fällen kann dasselbe durch das von Hrn. Schwarz so genannte „Princip der Symmetrie" ersetzt werden. Ich particularisire diese Ideen, indem ich eine gewöhnliche Kugelfläche (oder Ebene) als Trägerin der berandeten Bereiche auffasse und die Zusammengehörigkeit der einzelnen Begrenzungskanten durch lineare Substitution vermittelt denke. Auf solche Weise entsteht der allgemeine Begriff von *Functionen mit linearen Transformationen in sich*, und ich gewinne den Uebergang zu den Betrachtungen des dritten und vierten Abschnitt's, in welchen es sich um die Theorie der *eindeutigen* Functionen dieser Art handeln soll.

Man kennt die lange Reihe glänzender Publicationen, durch welche neuerdings Hr. Poincaré die allgemeine Aufmerksamkeit auf diese Functionen gelenkt hat*). Ich meinerseits habe, mit ähnlichen Ideen bereits seit längerer Zeit beschäftigt, die Poincaré'schen Veröffentlichungen durch zwei Noten begleitet**), in denen ich bestimmte

*) Man sehe Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 92 (1881, I) pag. 333, 395, 551, 859, 957, 1198, 1274, 1335, 1484, t. 93 (1881, II) pag. 93, 138, 301, 581, t. 94 (1882, I) pag. 163, 1038, 1166, sodann die Zusammenstellung in Math. Ann. Bd. XIX, pag. 553—564. Die ausgearbeiteten Abhandlungen sollen, wie ich höre, binnen Kurzem in dem neuen Mittag-Leffler'schen Journale erscheinen.

**) Math. Annalen XIX, pag. 565—568, sowie XX, pag. 49—51.

Was die Entstehung meiner diessbezüglichen Untersuchungen anlangt, so bemerke ich in Ergänzung früherer Angaben das Folgende:

1) Dass es zweckmässig sei, die allgemeinsten eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich in Betracht zu ziehen, und dass es vermöge dieser Functionen gelingen müsse, für beliebige algebraische Irrationalitäten dasselbe zu leisten, was bei $p = 1$ durch die elliptischen Functionen erreicht wird, erkannte ich im Sommer 1879 und habe ich damals in einer Vorlesung über elliptische Modulfunctionen meinen Zuhörern diese Gesichtspunkte entwickelt. Da ich aber damals noch nicht in der Lage war, bestimmte allgemeine Sätze aufzustellen, beschränkte ich mich in dem Aufsatze: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (Münchener Berichte vom Dec. 1879, oder auch Math. Annalen XVII, pag. 62—70), der die Grundgedanken jener Vorlesung wiedergiebt, auf Modulfunctionen in engerem Sinne, wählte aber die Darstellung so, dass die allgemeinsten eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich implicite mit in Betracht gezogen sind. Uebrigens schliessen sich an jene Vorlesung die ebenfalls hierher gehörigen Arbeiten meiner damaligen Zuhörer, der Herren Dyck, Gierster, Hurwitz an, wegen deren man Bd. XVII—XX dieser Annalen vergleichen mag; diese Arbeiten sind natürlich nicht ohne Rückwirkung auf mich geblieben.

2) Ausgangspunkt bei meinen damaligen Untersuchungen, wie überhaupt bei meiner Beschäftigung mit den elliptischen Modulfunctionen war zunächst meine eigene Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer

Theoreme, welche für die *Anwendungen* der neuen Functionen von hervorragender Wichtigkeit sein dürften, formulirte. Es wird sich im Folgenden darum handeln, den allgemeinen Ideengang, der mich zu jenen Theoremen führte, in zusammenhängender und vervollständigter Form darzulegen. Zu diesem Zwecke betrachte ich im dritten Abschnitte eine verhältnissmässig umfassende Classe von eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich. Ich erläutere ausführlich ihre Art zu existiren, und gebe die Mittel an, um die zugehörigen linearen Substitutionen aus independenten Bestimmungsstücken zu construiren. Sodann formulire ich in Abschnitt IV ein allgemeines Theorem, welches ich seiner Wichtigkeit halber als *Fundamentaltheorem* bezeichne, und das die Resultate meiner beiden vorgenannten Noten als specielle Fälle in sich schliesst. Allerdings kann ich mich zum Beweise nur auf allgemeine Mannigfaltigkeitsbetrachtungen berufen. So sicher es wünschenswerth sein wird, die

---

Veränderlichen (Erlanger Berichte vom Juli 1874, sowie Math. Annalen IX, pag. 183—208, 1875), sodann insbesondere die im Folgenden noch oft zu citirende Arbeit von Hrn. Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal Bd. 75, 1872). In letzterer wolle man namentlich pag. 317—319 beachten. Als ich dann später (Ostern 1881) den Gegenstand wieder aufnahm, sind namentlich Hrn. Schottky's Untersuchungen für mich von Wichtigkeit geworden; man vergl. dessen Abhandlung im 83. Bande von Borchardt's Journal (1876, 77), sowie seinen an mich gerichteten Brief im XX. Bande dieser Annalen, pag. 299—300. Auch ist mir die Correspondenz mit Hrn. Rausenberger, welcher von sich aus zur Inbetrachtnahme der neuen Functionen geführt worden war, von Anregung gewesen; man sehe dessen Arbeiten in Bd. XX und XXI der mathematischen Annalen.

3) Hrn. Poincaré's Untersuchungen, die vermuthlich bis zum Frühjahr 1880 zurückreichen, deren Publication sodann mit dem Februar 1881 beginnt, lernte ich erst im Juni 1881 kennen und habe ich seitdem mit Hrn. Poincaré in mannigfacher Correspondenz gestanden; man sehe z. B. dessen Mittheilung in den Comptes Rendus von 1881, I, pag. 1484 ff. Merkwürdigerweise hatte Hr. Poincaré, der seinerseits durch gewisse Entwickelungen des Hrn. Fuchs, über die ich mich weiter unten noch zu äussern haben werde, angeregt worden war, bis dahin die gesammte hier vorgenannte Literatur und wohl überhaupt jene specifische Functionentheorie, die von der Betrachtung der Riemann'schen Fläche ausgeht, nicht gekannt. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass seine ersten Publicationen vielfache Einzelheiten enthalten, welche von unserer Seite bereits publicirt waren.

4) Ich selbst bin erst Ostern dieses Jahres (1882) auf jenes merkwürdige Fragment aufmerksam geworden, welches sich unter XXV in Riemann's Nachlass abgedruckt findet und auf welches sich auch Hr. Schottky in seinem an mich gerichteten Briefe bezieht. Riemann nimmt dort geradezu dasselbe Problem in Angriff, welches Herr Schottky später ausführlich behandelt hat, und kommt wie dieser zu einer ausgedehnten Classe eindeutiger Functionen mit linearen Transformationen in sich. In vollkommenerer Weise konnte meine Behauptung von pag. 564 des XIX. Annalenbandes „dass es sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré um die weitere Durchführung von Riemann's allgemeinem functionentheoretischen Programme handle" wohl kaum bestätigt werden.

betreffenden Ueberlegungen genauer durchzuarbeiten, so glaube ich doch alle Punkte, welche bei einer strengen Beweisführung erledigt werden müssen, deutlich bezeichnet zu haben.

Vielleicht bringen die in Aussicht stehenden ausführlichen Abhandlungen des Hrn. Poincaré in dieser Hinsicht bereits die nothwendige Ergänzung. Die geometrische Denkweise bei Hrn. Poincaré, seine Anwendung des Continuitätsbegriffes etc. dürften den meinigen sehr nahe stehen*). Darüber hinaus aber hat Hr. Poincaré von Vornherein das *analytische Bildungsgesetz* der neuen Functionen mit Erfolg in Angriff genommen, auch versucht, bei gegebenen algebraischen Irrationalitäten zugehörige eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich durch convergente Processe wirklich herzustellen.

Die *Schlussbemerkungen*, welche ich im fünften Abschnitte des Folgenden gebe, mögen für sich selbst sprechen. Indem ich die Tragweite erörtere, welche unser Fundamentalsatz nach verschiedenen Richtungen hin dürfte beanspruchen können, wünsche ich andere, vielleicht jüngere Mathematiker anzuregen, auf diesem aussichtsreichen Gebiete ihre Kräfte zu versuchen.

Noch darf ich hinzufügen, dass ich die Entwickelungen der Abschnitte I und II von Neujahr 1882 bis Ostern und diejenigen der Abschnitte III—V wenigstens der Hauptsache nach von Pfingsten dieses Jahres ab bis zum Schlusse des Sommersemesters in meinem Seminare zum Vortrag gebracht habe.

Uebersicht.

Abschnitt I. Ueber die allgemeinste Form der Riemann'schen Fläche und die Gruppirung der zugehörigen Existenzbeweise.

*) So hat z. B. Hr. Poincaré genau so, wie ich es 1874 bei meiner Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen gethan habe, seinen ursprünglichen Ausgangspunkt in den Vorstellungsweisen der Nicht-Euklidischen Geometrie genommen.

Abschnitt I.

Ueber die allgemeinste Form der Riemann'schen Fläche und die Gruppirung der zugehörigen Existenzbeweise.

§ 1.

Allgemeiner Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

Die Riemann'sche Fläche ist zuvörderst, wie schon bemerkt, und insbesondere in meinem Schriftchen, eine übrigens beliebige*), aber geschlossene Fläche des Raumes. Indem wir uns unter Zugrundelegung irgend welcher krummliniger Coordinaten p, q das Bogenelement $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ berechnet denken, leiten wir aus ihm die partielle Differentialgleichung für die auf unserer Fläche existirenden *Potentialfunctionen* ab:

$$(1) \qquad \frac{\partial \dfrac{F\dfrac{\partial u}{\partial q} - G\dfrac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\dfrac{\partial u}{\partial p} - E\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0,$$

und es sind die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung, mit deren wechselseitigen Relationen sich die Riemann'sche Functionentheorie zunächst beschäftigt.

Die Verallgemeinerung nun, deren wir uns in der Folge zu bedienen haben, erwächst am natürlichsten, wenn wir zuvörderst Alles in der vorgenannten Definition enthaltene Geometrische abstreifen, um dasselbe später, je nach Bedürfniss, in umgeänderter Gestalt wieder einzuführen.

Statt einer geschlossenen Fläche werden wir uns also überhaupt eine zweidimensionale, geschlossene *Mannigfaltigkeit* vorstellen müssen, statt des Bogenelementes einen irgendwie gegebenen, auf jener Mannigfaltigkeit eindeutigen, definiten Differentialausdruck zweiten Grades.

Wir können sogar in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter gehen. Die Differentialgleichung (1) bleibt ungeändert, wenn

*) Ich drücke mich an dieser Stelle in solch' unbestimmter Form aus, weil es keinen Zweck hat, bei der allgemeinen Exposition bereits zwischen analytischen Flächen oder solchen, die aus Stücken analytischer Flächen zusammengesetzt sind, etc. zu unterscheiden. Analoge Bemerkungen könnten im Folgenden wiederholt gemacht werden.

wir den Ausdruck für ds^2 mit einem beliebigen Factor multipliciren. Es ist diess das für zwei Dimensionen ckarakteristische Verhalten, welches zur Folge hat, dass Flächen, die conform auf einander abgebildet sind, für die Zwecke der verallgemeinerten, hier in Betracht kommenden Potentialtheorie einander gleichwerthig sind (R. Th. p. 19). Es ist daher für unsere Zwecke richtiger, überhaupt nicht von einem bestimmten ds^2, also einem Differential*ausdruck* zweiten Grades, zu sprechen, sondern nur von der Differential*gleichung* zweiten Grades $ds^2 = 0$.

Eine fernere Ueberlegung bezieht sich auf die Forderung, ds^2 solle *definit* sein. Wir werden hernach Beispiele anführen (§ 5. dieses Abschnittes), bei denen ds^2, allgemein zu reden, nur in einzelnen Bezirken der Riemann'schen Mannigfaltigkeit definit ist. Andererseits darf man sich eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit selbst wieder mit complexen Elementen ausgestattet denken, wobei der Unterschied zwischen definiten und indefiniten Differentialausdrücken von Vorneherein als unwesentlich in Wegfall kommt. Doch erwähne ich hier Beides nur, um den allgemeinen Begriff so unabhängig wie möglich hinzustellen; im Speciellen werden wir fortan an der Forderung eines definiten ds^2 festhalten.

Es gilt nun, *auf den so umschriebenen Begriff der allgemeinen Riemann'schen Mannigfaltigkeit alle die Sätze zu übertragen*, welche in meiner Schrift speciell für die geschlossene Riemann'sche *Fläche* gewonnen wurden. Insbesondere also werden wir uns an die Vorstellung gewöhnen müssen, dass die auf solcher Mannigfaltigkeit existirenden eindeutigen oder nur durch Periodicität vieldeutigen Potentialfunctionen zu gewissen algebraischen Functionen und ihren Integralen in der l. c. dargelegten Beziehung stehen. Wir haben dann dasjenige Instrument, dessen wir uns im Folgenden zur Untersuchung der algebraischen Functionen und der mit ihnen zusammenhängenden Transcendenten bedienen wollen. In wie weit die hierbei zu Grunde gelegten Anschauungen zuverlässig richtig sind, wird sogleich noch näher erläutert werden.

§ 2.

Rückübertragung auf die gewöhnliche Raumvorstellung.

Ob es möglich ist, jede Riemann'sche Mannigfaltigkeit auf eine geschlossene Fläche unseres Raumes im gewöhnlichen Sinne *conform* zu übertragen, steht zuvörderst dahin; was wir darüber wissen, ist eben erst das Resultat der Riemann'schen Theorie. Dagegen ist von Vorneherein kein Zweifel, dass wir allemal die nächste Umgebung einer beliebigen (regulär vorausgesetzten) Stelle unserer Mannigfaltigkeit auf ein *Stück* einer stetig gekrümmten Fläche, und sogar auf ein Stück der Ebene conform werden übertragen können. Es folgt diess aus bekannten Sätzen über die *Existenz* der Lösungen partieller Differentialgleichungen, hier also insbesondere der Gleichung (1), in der Nähe einer beliebigen Stelle.

Die auf solche Weise entstehenden *Flächencalotten* mit ihren Bogenelementen mögen wir dann geradezu an die Stelle der abstracten Riemann'schen Mannigfaltigkeit treten lassen. *Wir haben dann also statt letzterer ein Aggregat von beliebig vielen Flächenstücken, deren Randcurven in bestimmter Weise Punkt für Punkt paarweise zusammengehören.*

Zugleich verläuft, was wir eine Potentialfunction u auf der ursprünglichen Riemann'schen Mannigfaltigkeit benannten, auf diesem Flächenstück derart, dass es innerhalb des einzelnen Flächenstückes der auf letzteres bezüglichen Differentialgleichung des Potentials genügt (R. Th. p. 19), überdiess aber in den Randpunkten, in denen man von dem einen Flächenstücke zu einem anderen (oder auch nur zu einem anderen Theile desselben Flächenstückes) übergeht, gewisse *Randbedingungen* befriedigt. Um letztere bestimmt bezeichnen zu können, sei ds das Element der einen Randcurve, dn das Element der zugehörigen, nach dem Inneren des Flächenstückes gerichteten Normale. Dieselbe Bedeutung mögen $d\sigma$ und $d\nu$ an der entsprechenden Stelle für die zweite Randcurve besitzen. Dann wird offenbar, unter ϱ einen von den Zahlen k, l unabhängigen Proportionalitätsfactor verstanden, die folgende Relation gelten:

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial s^k \cdot \partial n^l} = (-1)^l \cdot \cancel{\varrho^{k+l}} \cdot \frac{\partial^{k+l} u}{\partial \sigma^k \cdot \partial \nu^l}, \tag{2}$$

$$(k, l = 0, 1, \cdots, \infty),$$

und geben eben diese unendlich vielen Gleichungen das Gesetz, nach welchem eine auf der einen Flächencalotte verlaufende Potentialfunction über die Randcurve hinüber analytisch fortzusetzen ist.

Unsere Vorstellung soll nun im Folgenden geradezu die sein, dass wir uns statt der geschlossenen, abstracten Riemann'schen Mannigfaltigkeit ein Aggregat von Flächencalotten der beschriebenen Art, vielleicht auch nur eine einzelne Calotte mit zweckmässig zusammengeordneten Randcurven gegeben denken. Vermöge ihrer inneren Maassverhältnisse wird dann eine solche Calotte genau so gewisse Potentiale (und also complexe Functionen des Ortes) definiren, wie es in meiner Schrift (R. Th.) die geschlossene Fläche zu Wege brachte. *Und unsere Methode soll sein, geradezu aus der Gestalt geeigneter derartiger Bereiche ausgiebige Schlüsse auf das Verhalten gewisser Classen analytischer Functionen zu ziehen.*

Beispiele folgen sofort. Hier nur noch eine kleine Bemerkung. Wir brauchen in keiner Weise auszuschliessen, dass die Uebertragung der geschlossenen Riemann'schen Mannigfaltigkeit auf die Theilbereiche in *einzelnen Puncten* aufhört, conform zu sein. Um das betreffende Verhalten in einer alle Fälle einschliessenden Weise zu bezeichnen, mögen wir verabreden, dass wir die den Randlinien der Theilbereiche entsprechenden Querschnitte auf der geschlossenen Riemann'schen Mannigfaltigkeit jedenfalls durch alle solche Stellen hindurchlegen. Die Randcurven der entsprechenden Theilbereiche werden dann an der betreffenden Stelle eventuel eine Knickung zeigen, indem die aufeinanderfolgenden Elemente der Randcurve statt eines gestreckten Winkels einen anderen einschliessen. Die einfache Regel ist dann die, dass wir eine Potentialfunction an solcher Stelle regulär nennen, wenn sie, auf die ideale Riemann'sche Mannigfaltigkeit rückübertragen, auf letzterer regulär verläuft.

§ 3.

Beispiele.

In den Beispielen, die ich hier zu bringen habe, sowie überhaupt bei den Anwendungen, die ich im Folgenden beabsichtige, handelt es sich durchweg nur um *eine* Flächencalotte, und diese eine ist ein Ausschnitt aus der Ebene, bez. aus der Kugelfläche. Diese eine Calotte ist dann nichts Anderes, als dasjenige, was ich bei anderer Gelegenheit als *Fundamentalpolygon* *) bezeichnet habe. Sei mir dabei im Folgenden, weil vielfach von solchen behandelten Flächenstücken die Rede zu sein hat, welche Ecken überhaupt nicht besitzen, die kleine Abweichung gestattet, dass ich statt Fundamentalpolygon fortan *Fundamentalbereich* sage.

Erstes Beispiel. Als nächstliegendes Beispiel bietet sich das Parallelogramm der doppeltperiodischen Functionen. Indem die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogrammes in einfachster Weise zusammen gehören, repräsentirt das einzelne Parallelogramm eine geschlossene Mannigfaltigkeit $p = 1$. Die Existenz der doppeltperiodischen Functionen und ihrer Integrale subsumirt sich also unter die allgemeine, auf beliebige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten bezügliche, am Schlusse des § 1. formulirte Anschauung.

Zweites Beispiel. Ein zweites hier anzuführendes Beispiel, das mir immer besonders instructiv erschienen ist, giebt Riemann in Nummer 12 seiner Theorie der Abel'schen Functionen (pag. 114 der gesammelten Werke). Statt *eines* Parallelogrammes betrachtet dort Riemann deren p, übereinandergelegte, irgendwie gestaltete, welche

*) Zuerst Annalen XIV, pag. 133.

durch $(2p-2)$ Verzweigungspunkte und $(p-1)$ zwischen letzteren verlaufende Verzweigungsschnitte zu einem einheitlichen Ganzen verbunden sind. Jedesmal die gegenüberstehenden Seiten des einzelnen Parallelogrammes sind im gewöhnlichen Sinne zusammengehörig. Riemann macht l. c. selber den Schluss, dass auf einem solchen Fundamentalbereiche dieselben Functionen des Ortes existiren müssen, wie auf einer beliebigen geschlossenen Fläche desselben p.

Drittes Beispiel. In Beispiel 1) ist die geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit ausnahmslos conform auf den Fundamentalbereich übertragen. Dagegen tritt in Beispiel 2) eine Abweichung für die Conformität in den $(2p-2)$ Verzweigungspunkten ein; da aber in diesen Punkten die auf der idealen Riemann'schen Mannigfaltigkeit zwischen verschiedenen Fortschreitungsrichtungen gemessenen Winkel gerade verdoppelt werden, so ist es nicht nöthig, wie wir es im Uebrigen am Schlusse des vorigen Paragraphen verabredeten, die Randcurven unseres Fundamentalbereiches durch diese Stellen hindurchzulegen. Anders ist es mit dem nun zu gebenden dritten Beispiele. Es soll sich jetzt nämlich um denselben Fall handeln, den Hr. Schwarz im 72. Bande des Borchardt'schen Journals unter etwas anderem Gesichtspunkte behandelt hat. Sei in der Ebene einer complexen Variablen η zuvörderst ein *Kreisbogendreieck* mit den Ecken a_1, a_2, a_3 und den Winkeln $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$ gegeben. Ein solches Dreieck kann dann (wie Hr, Schwarz entwickelt) auf eine Halbebene z conform abgebildet werden, wobei man den Ecken a_1, a_2, a_3 noch drei beliebige Punkte der Begrenzung jener Halbebene, also etwa, wenn wir die Axe der reellen Zahlen als Begrenzung der Halbebene denken, $z=0, 1, \infty$ entsprechen lassen kann. Ist diess geschehen, so folgt aus dem Princip der Symmetrie, dass der zweiten Halbebene z ein beliebiges der drei weiteren Kreisbogendreiecke entsprechend gesetzt werden kann, die sich aus dem ursprünglichen durch Inversion an einer seiner drei Kanten ergeben. Wir wählen als Inversionskreis etwa die Kante $a_2 a_3$ und nennen die Ecke, welche bei der Inversion dem Pnnkte a_1 entspricht, a_1'. So ist die Sache die, dass wir jetzt ein *Kreisbogenviereck* $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vor uns haben und zugehörig eine Function z von η kennen, welche auf diesem Kreisbogenviereck jeden Werth einmal und nur einmal annimmt, sofern wir nämlich solche Begrenzungspunkte des Vierecks, die in Bezug auf den Kreisbogen a_2, a_3 symmetrisch sind, als identisch erachten. Diese Function z von η besitzt im Inneren des Vierecks weder Verzweigungspunkte noch Kreuzungspunkte, und auch nicht auf dem Rande des Vierecks, sofern wir die Eckpunkte ausnehmen. In letzteren aber verläuft nicht z, sondern beziehungsweise $z^{\frac{1}{l_1}}$, $(z-1)^{\frac{1}{l_2}}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{l_3}}$ regulär.

Eben die Existenz der hiermit besprochenen Function z folgt nun bei der gegenwärtig zu entwickelnden Anschauung daraus, dass jenes Kreisbogenviereck $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten als Fundamentalbereich eine geschlossene Mannigfaltigkeit vom Geschlechte $p = 0$ repräsentirt. Nur in den Ecken a_1, a_1' bez. a_2 und a_3 ist dabei die Beziehung zwischen der η-Ebene und der geschlossenen Mannigfaltigkeit eine nicht conforme. Auf jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlechte Null giebt es eindeutige Functionen des Ortes, welche jeden Werth nur einmal annehmen (R. Th. pag. 66). Unter ihnen ist unser z inbegriffen und zwar einfach dadurch charakterisirt, dass es an den drei Stellen a_1 bez. a_1', a_2 und a_3 die Werthe $0, 1, \infty$ annimmt.

Diese Art, die Existenz der Function z aus dem Hauptsatze des § 1. abzuleiten, erscheint einfacher als das indirecte von Hrn. Schwarz gewählte Verfahren*). Allerdings hat das letztere sofort den Vorzug, wenn es sich darum handelt, z in der *unbegrenzten* Ebene η zu studiren. Denn während das Princip der Symmetrie unmittelbar ausreicht, um den Gesammtverlauf des so verstandenen z zu übersehen, müssten wir zu gleichem Zwecke das erst im folgenden Abschnitte zu entwickelnde Princip der analytischen Fortsetzung zu Hülfe nehmen, wir müssten also zwei Schnitte machen, wo das Verfahren des Hrn. Schwarz mit einem ausreicht.

Viertes Beispiel. An letzter Stelle will ich noch ein Beispiel betrachten, bei welchem der in Betracht zu ziehende Fundamentalbereich keinerlei Eckpunkte besitzt. Es seien in der η-Ebene irgend $2p$ geschlossene und mit keinen Singularitäten versehene, analytische Curvenzüge gegeben, welche zusammengenommen einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich abgrenzen. So oft wir dann diese Curvenzüge paarweise durch irgend ein analytisches Gesetz zusammenordnen, haben wir jedesmal eine geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit vom Geschlechte p vor uns. Auf ihr entsprechen jenen $2p$ Begrenzungscurven gewisse p, die Mannigfaltigkeit nicht zerstückende Rückkehrschnitte.

§ 4.

Berechnung der Zahl p.

Der Vollständigkeit halber stelle ich hier diejenigen Sätze zusammen, deren man sich zweckmässigerweise bedient, wenn man allgemein das Geschlecht p einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit berechnen

*) Auch Hr. Dedekind erschliesst, Borchardt's Journal t. 83, pag. 274, die Existenz der fundamentalen elliptischen Modulfunction (die ein specieller Fall unseres z ist) aus dem Gesetz der Symmetrie.

will, die in Gestalt eines Fundamentalbereiches gegeben vorliegt. Die betreffenden Regeln sind in der zur Anwendung geeigneten Form wohl zuerst von Hrn. C. Neumann in seinen „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“ (Leipzig 1865) gegeben worden. Besitzt eine Fläche ν Randcurven und gestattet überdiess μ nicht zerstückende Rückkehrschnitte, so bezeichnet Hr. Neumann $2\mu + \nu$ als *Grundzahl* der Fläche*). *Hinsichtlich der letzteren gelten nun die drei* einfachen Regeln:

1) Jede Punktirung der Fläche, d. h. die Anbringung einer punktförmigen Oeffnung an irgend einer Stelle, erhöht die Grundzahl um 1;

2) *Jeder in sich* zurücklaufende Schnitt, den man auf der Fläche anbringen mag, lässt die Grundzahl ungeändert;

3) Jeder Querschnitt, d. h. ein Schnitt, der von Randpunkt zu Randpunkt läuft, erniedrigt die Grundzahl um eine Einheit.

Sei jetzt irgend ein Fundamentalbereich gegeben. Unter seinen Randcurven markiren wir zuvörderst diejenigen $2\nu'$, welche *keine* Eckpunkte besitzen. Die übrigen Randcurven zerlegen wir in ebenso viele Stücke, als sie Eckpunkte tragen. Die Gesammtzahl dieser Stücke sei $2n$. Sei ferner π die Anzahl derjenigen auf der Riemann'schen Mannigfaltigkeit zu unterscheidenden Stellen, denen Eckpunkte des Fundamentalbereiches entsprechen. Dann wird man von der geschlossenen Mannigfaltigkeit (deren Grundzahl gleich $2p$ ist) im Sinne der Analysis situs zum Fundamentalbereiche gelangen, indem man zuerst an jenen π Stellen Punktirungen ausführt, dann letztere durch n Querschnitte verbindet und endlich ν' Rückkehrschnitte hinzufügt. Bezeichnet man jetzt mit g die Grundzahl des Fundamentalbereiches, so kommt:

$$2p + \pi - n = g,$$

und diess ist die Formel zur Berechnung von p.

Es ist wohl kaum nöthig, die Formel an den Beispielen des vorigen Paragraphen noch besonders zu erläutern. Nur finde noch die Bemerkung ihre Stelle, dass die vorgenannten Regeln ungeändert erhalten bleiben, wie schon Hr. Neumann zeigte, wenn man statt einer Fläche ein aus N getrennten Flächen bestehendes System in's Auge fasst, und als Grundzahl des Systems $\Sigma g - 2N + 2$ gelten

*) Es ist diess dieselbe Zahl, welche von Hrn. Schläfli und mir bei späterer Gelegenheit als „ausserordentlicher Zusammenhang“ oder auch als „Zusammenhang“ schlechthin bezeichnet worden ist (vergl. z. B. mathematische Annalen VII, p. 550, Note). Riemann's „Zusammenhang“ ist um eine Einheit grösser, sobald $\nu = 0$ ist. Die Riemann'sche Festsetzung erscheint aus früher dargelegten Gründen nicht zweckmässig. Da sie aber fast durchgängig im Gebrauche ist, so vermeide ich im Texte, wo immer von geschlossenen Flächen die Rede ist, den Ausdruck „Zusammenhang“ überhaupt, wie ich es auch in meiner Schrift gethan habe.

lässt, wo die Summe über die Grundzahlen der einzelnen Bestandtheile zu nehmen ist. Diese Bemerkung würde zur Geltung kommen, wenn wir die Riemann'sche Mannigfaltigkeit, wie es in § 2. erläutert wurde, durch ein *Aggregat* von Flächencalotten sollten ersetzen wollen.

§ 5.

Anderweitige geometrische Deutungen.

Indem wir in § 2. die abstracte Vorstellung von der Riemann'schen Mannigfaltigkeit in die concrete eines geometrisch gegebenen Fundamentalbereiches übersetzten, benutzten wir die Anschauungsweise der gewöhnlichen analytischen Geometrie, insofern wir die Individua jener Mannigfaltigkeit durch *Punkte*, den adjungirten Differentialausdruck zweiten Grades durch das zugehörige *Bogenelement* versinnlichten. Es ist in keiner Weise meine Absicht, allgemeinere Arten der geometrischen Deutung, die dem Functionentheoretiker Schwierigkeit bereiten könnten, im Folgenden zu verwenden*). Wohl aber sei es dem Geometer gestattet, auf die *Möglichkeit* solcher Deutungen hier beiläufig hinzuweisen. Einmal nämlich zweifele ich nicht, dass man im Laufe der Zeit, je mehr sich functionentheoretische und geometrische Anschauungen durchdringen werden, von solchen Vorstellungsweisen allgemeinen Gebrauch machen wird. Andererseits ist diess die Stelle, an der die *„neuen Riemann'schen Flächen"*, wie ich sie bei Gelegenheit einführte**), systematisch einzuordnen sind (siehe auch R. Th. p. 61—63).

Um mit den letzteren zu beginnen, so bezeichnete ich als die zu einer Curve gehörige Riemann'sche Fläche den geometrischen Ort derjenigen Punkte der Ebene, von denen aus sich imaginäre Tangenten an die Curve legen lassen, — wobei jeder Punkt so oft zu zählen ist, als die Anzahl dieser Tangenten angiebt. Hat die Curve, wie hier angenommen sei, eine Gleichung mit reellen Coefficienten, so wird jeder Theil der Ebene von einer nothwendig paaren Anzahl von Blättern überdeckt und diese Blätter gehören paarweise als „conjugirte" zusammen. Wie eine derartige Fläche im Allgemeinen gestaltlich verläuft, wurde bei früheren Gelegenheiten ausführlich discutirt. Dagegen wurde nur erst beiläufig des Differentialausdruckes zweiten Grades gedacht, der nun an die Stelle des Bogenelementes tritt (siehe Annalen IX, pag. 31, Fussnote). *Derselbe stellt gleich Null gesetzt die imaginären Richtungen derjenigen beiden von dem einzelnen Punkte aus an die Curve verlaufenden Tangenten dar, welche durch den Punkt selbst*

*) Daher wird der gegenwärtige Paragraph beim Studium vorliegender Arbeit überschlagen werden können.

**) Mathematische Annalen VII und X.

versinnlicht werden, sofern man ihn in dem eben herausgegriffenen Blatte unserer Fläche, oder aber im conjugirten Blatte, gelegen denkt. Die hiermit gegebene Deutung durch eine doch nur auf willkürlichem Wege zu erreichende absolute Fixirung des Differentialausdruckes vervollständigen zu wollen, hat für die Riemann'sche Theorie, wie in § 1. bemerkt wurde, keinerlei Zweck. *Auch haben wir hier einen Fall, in welchem der zur Verwendung kommende Differentialausdruck zweiten Grades keineswegs durchweg definit zu sein braucht.* Denn wenn unsere Curve reelle Züge besitzt, so rücken zwei der bezeichneten imaginären Richtungen, sobald man von der concaven Seite her auf den reellen Zug zuschreitet, in eine reelle zusammen, um darüber hinaus in zwei getrennte reelle Richtungen verwandelt zu sein. Die einfachste Vorstellung ist dann (siehe l. c.), dass längs des reellen Curvenzuges zwei Blätter unserer Fläche vermöge einer *Falte* verbunden sind. —

Die Punkte der hier in Rede stehenden Riemann'schen Flächen versinnlichen in erster Linie die imaginären *Tangenten* unserer Curve. Ebensowohl würde man die imaginären Punkte der Curve (indem man dualistische Uebertragung eintreten lässt) durch ein geeignetes Aggregat von geraden Linien repräsentiren können. Ein solches Aggregat bietet der unmittelbaren Vorstellung einige Schwierigkeit, aber theoretisch genommen ist es ebensowohl als Versinnlichung der Riemann'schen Mannigfaltigkeit zu gebrauchen, wie die von den Punkten gebildete Fläche.

Ich möchte hier noch ein weiteres Beispiel geben, welches das hiermit besprochene dualistische Gegenstück der soeben betrachteten Riemann'schen Flächen als speciellen Fall umfasst. Man nehme eine beliebige Liniencongruenz (von ∞^2 Linien). Dass auch auf solche Mannigfaltigkeiten die Begriffe der Analysis situs anwendbar sind, erläuterte ich bereits Annalen IX, pag. 480—482. Hier haben wir hinzuzufügen, dass jede solche Liniencongruenz eo ipso einen Differentialausdruck zweiten Grades mit sich führt, der freilich nicht absolut fixirt ist; es ist derjenige, welcher gleich Null gesetzt aussagt, dass zwei aufeinanderfolgende Strahlen der Congruenz sich schneiden*). Giebt es nun innerhalb der Congruenz einen Bereich, in welchem sich *reelle* auf einanderfolgende Strahlen überhaupt nicht treffen können, in welchem also jener Differentialausdruck definit ist, so repräsentirt uns derselbe, indem wir die Strahlen als Individua gelten lassen, ein Stück einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

---

*) Ich möchte hier beiläufig auf die neuerdings erschienene Dissertation von Hrn. Koenigs (Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Paris, 1882, Annales de l'Ecole Normale Supérieure) aufmerksam machen. In derselben werden gewisse Ideen, welche von Hrn. Lie und mir im fünften Bande dieser Annalen betreffs des im Texte erwähnten Differentialausdruckes zweiten Grades entwickelt worden sind, auf's Neue aufgenommen und zum Theil weiter geführt.

Das Strahlensystem kann nun insbesondere das Secantensystem einer Raumcurve sein. Der einzelne Strahl vertritt dann geradezu, indem er doppelt zählt, die beiden Punkte, in denen er der Curve begegnet. Jene Differentialgleichung lässt sich jetzt einfacher dahin interpretiren, dass sie den Fortschritt zu solchen benachbarten Strahlen bedeutet, welche mit dem gegebenen einen Curvenpunkt gemein haben. Und hieraus nun erwächst das oben erwähnte dualistische Seitenstück zu meinen „neuen" Riemann'schen Flächen, wenn man die Raumcurve in eine ebene Curve degeneriren lässt. — Ich möchte mir vorbehalten, diese Betrachtungen bei Gelegenheit weiter zu verfolgen.

§ 6.

Literarisches zum Dirichlet'schen Princip.

Wollte man, wie es Riemann gethan hat, das von ihm sogenannte Dirichlet'sche Princip als Beweisgrund gelten lassen, so wäre es leicht, den allgemeinen Satz des § 1. für beliebige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten oder auch direct für die Fundamentalbereiche der §§ 2., 3. zu beweisen. In der That verfährt Riemann so in Nr. 12 seiner Abel'schen Functionen bei dem oben (§ 3.) an zweiter Stelle aufgeführten Beispiele.

Es ist hier nicht der Ort, um die Gründe, welche gegen die Beweiskräftigkeit des Dirichlet'schen Princips sprechen, zusammenzustellen, so sehr ich eine solche Zusammenstellung im Interesse des lernenden mathematischen Publikums für nützlich erachten würde. Auch brauche ich hier nicht auseinanderzusetzen, warum solche physikalische Anschauungen, wie ich sie in meiner Schrift verwandte, in rein mathematischen Fragen nur den Werth *heuristischer* Methoden haben. Man beachte übrigens, dass diese physikalischen Anschauungen bei den allgemeinen in § 2. eingeführten Fundamentalbereichen nur in sehr gezwungener Weise würden festgehalten werden können.

Dagegen wünsche ich hier über die einschlägigen Untersuchungen der Herren C. Neumann und Schwarz kurzen Bericht zu erstatten, insofern ich glaube, dass dieselben lange nicht hinlänglich gekannt und nach ihrer Wichtigkeit gewürdigt sind. Es ist kein Zweifel, dass diese Untersuchungen in allen Fällen der Anwendung geeignet scheinen, das Dirichlet'sche Princip zu ersetzen und dass vermöge derselben insbesondere der allgemeine Satz von den auf den Riemann'schen Mannigfaltigkeiten existirenden Potentialfunctionen als strenge begründet erachtet werden kann. Und Dieses ist für uns hier die Hauptsache. Mag der von den genannten Autoren gelieferte Beweisgang noch so umständlich sein, in ihm liegt die Berechtigung, jenen Fundamentalsatz zu benutzen und mit ihm als einem Instrumente, überall wo es nützlich scheint, zu arbeiten.

Die Untersuchungen der genannten Autoren laufen vielfach parallel*). Beide beginnen damit, für Stücke der *Ebene*, und also das logarithmische Potential im engeren Sinne, die sogenannte *Randwerthaufgabe* zu behandeln, d. h. zu zeigen, dass bei vorgegebenen Randwerthen sich auf jedem begrenzten Stücke der Ebene eine zugehörige, im Inneren des Stückes überall endliche und stetige Potentialfunction finden lässt. Hr. Neumann entwickelt zu dem Zwecke eine besondere Näherungsmethode, die von ihm sogenannte *Methode des arithmetischen Mittels*, welche für solche Bereiche, die eine durchaus convexe Begrenzungscurve haben, sowie für deren Ergänzungsbereiche, die gewünschte Potentialfunction direct herstellt. Hr. Schwarz dagegen beginnt mit Untersuchungen über *conforme Abbildung* und zeigt, dass gewisse, sehr allgemein gestaltete Bereiche sich auf andere conform übertragen lassen, für welche die Randwerthaufgabe auf Grund früherer Untersuchungen als erledigt angesehen werden kann. Beiden Autoren gemeinsam sind sodann gewisse *Combinationsmethoden*, vermöge deren es gelingt, die Randwerthaufgabe auch bei solchen Bereichen durchzuführen, welche aus einer Anzahl von Stücken der früher behandelten Art durch Ueberlagerung entstehen.

Während nun Hr. Neumann vermöge der von ihm gewählten Ausgangspunkte in der Lage war, seine Untersuchungen auf den Raum, d. h. das Newton'sche Potential, auszudehnen (was für uns hier nicht weiter in Betracht kommt), hat Hr. Schwarz seine Aufmerksamkeit des Ferneren insbesondere denjenigen Erweiterungen zugewandt, welche Riemann zwecks seiner functionentheoretischen Untersuchungen der seiner Zeit üblichen Potentialtheorie hinzugefügt hat. Ich meine die Einführung vorgeschriebener Unendlichkeitsstellen oder linearer Unstetigkeiten (Periodicitätsmoduln), sowie die Betrachtung *geschlossener* Mannigfaltigkeiten, mögen diese nun mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet sein oder als beliebig gekrümmte Flächen im Raume gelegen vorgestellt werden. Die Erläuterungen, welche Hr. Schwarz über

*) Ich nenne hier von den betr. Publicationen als besonders wichtig:

C. Neumann: Zwei Mittheilungen in den Berichten der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vom 21. April und 31. October 1870 [zum Theil wieder abgedruckt in Bd. XI dieser Annalen, pag. 558 ff.]; sodann das ausführliche Werk:

Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Leipzig, Teubner 1877).

H. A. Schwarz: Zur Theorie der Abbildung (im Jahresbericht des Züricher Polytechnikums, 1869/70);

Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren, Züricher Vierteljahrsschrift, Juni 1870;

sowie eine längere Mittheilung an die Berliner Academie, siehe Monatsbericht vom 10. October 1870 (pag. 767—795 des betr. Bandes).

diese Fragen giebt (siehe die Abhandlung in den Berliner Monatsberichten von 1870) sind allerdings sehr knapp gehalten. Für geschlossene Flächen insbesondere erbringt er explicite nur den Nachweis, dass auf einer beliebigen, aus einer endlichen Anzahl sich nicht berührender analytischer Stücke zusammengesetzten Fläche *vom Geschlechte Null* vermöge der vorgenannten Combinationsmethoden ein überall eindeutiges Potential construirt werden kann, das einen einzigen, beliebig vorzugebenden algebraischen Unstetigkeitspunkt erster Ordnung besitzt. Alles Andere sind Andeutungen. Ich habe es, als ich mich zuerst mit diesen Untersuchungen beschäftigte, nicht ganz leicht gefunden, diese Andeutungen zu ergänzen, und glaube also, dass es manchem Mathematiker nicht unangenehm sein wird, wenn ich in den folgenden beiden Paragraphen hierauf eingehe. Und zwar bringe ich zunächst mit freundlicher Erlaubniss des Verfassers einen Brief von Hrn. Schwarz, in welchem derselbe auf meinen Wunsch seine Methode zur directen Einführung von Periodicitätsmoduln erläutert. Sodann entwickele ich in § 8., wie man in genauem Anschlusse an die physikalischen Betrachtungen meiner Schrift dasselbe Ziel erreichen kann, indem man für Mannigfaltigkeiten von beliebigem p direct nur die Existenz jenes eben erwähnten Potentials nachweist, das an beliebiger Stelle einen vorgegebenen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt besitzt und übrigens eindeutig verläuft.

§ 7.

Ueber die directe Einführung der Periodicitätsmoduln.

Hr. Schwarz schreibt mir unter dem 1. Februar 1882:

„Sind die Unstetigkeiten, welche man einer Potentialfunction u auferlegen will, von der Art, dass bei der Ueberschreitung einer Querschnittlinie die Function um eine constante, vorgeschriebene Grösse sich ändern soll, so bedarf das Verfahren, welches in den Monatsberichten der Berliner Academie vom Jahre 1870 für die Einführung punctueller Unstetigkeiten eingehalten wurde (vergl. die beiden Beispiele Seite 788—790 und 792—794 daselbst) nur unerheblicher Modification, so lange der in Betracht zu ziehende Bereich noch *eine* Randlinie besitzt, längs welcher die Function u *vorgeschriebene* Werthe haben soll."

„Zunächst ist der Satz für einen zweifach zusammenhängenden Bereich T zu beweisen*). Durch Q_1 werde aus T der einfach zusammenhängende Bereich T_1, durch Q_2 — welcher Querschnitt mit Q_1

*) Wegen der Bezeichnungen und Ausdrucksweisen vergl. man durchweg den Aufsatz in den Berliner Monatsberichten, überdies die Figur 1 auf der hier beigegebenen ersten lithographirten Tafel. F. K.

keinen Punkt gemein haben darf, — gehe der Bereich T in den Bereich T_2 über. Man integrire für T_1 $\Delta u = 0$ unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen Rande, $u = 1$ an beiden Ufern des Querschnitts Q_1. Es sei q_2 das Maximum aller Werthe, welche u längs der ganz innerhalb T_1 liegenden Linie Q_2 annimmt. Ebenso integrire man $\Delta u = 0$ für das Innere von T_2 unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen Rande, $u = 1$ an beiden Ufern von Q_2. Es sei q_1 das Maximum der Werthe, welche u längs der ganz innerhalb T_2 liegenden Linie Q_1 annimmt. Sowohl q_1, als q_2 sind kleiner als 1."

„Es seien nun die Werthe von u längs der ganzen Begrenzung von T vorgeschrieben, längs Q_1 soll $(u^+ - u^-) = K$ sein."

„Man bestimme für den Bereich T_1 eine Function u_1, welche am Rande von T die vorgeschriebenen Werthe hat, am negativen Ufer von Q_1 irgend welche Werthe, am positiven Ufer die um K grösseren Werthe annimmt. Von dieser im Innern von T_1 der Differentialgleichung $\Delta u_1 = 0$ genügenden Function denke man sich die Werthe längs Q_2 bestimmt und integrire für T_2 die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ durch eine Function u_2, welche längs des Randes von T die vorgeschriebenen Werthe annimmt (längs der Begrenzungstheile a und b muss natürlich $u_2 = u_1 - K$ sein), welche auf dem negativen Ufer von Q_2 mit $u_1 - K$, auf dem positiven mit u_1 übereinstimmt. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine Function u_3, so dass $\Delta u_3 = 0$, längs der Begrenzung von T $u_3 = u_1$, längs des negativen Ufers von Q_1 $u_3 = u_2$, längs des positiven Ufers $u_3 = u_2 + K$:

„Auf diese Weise fortschreitend bestimme man eine unendliche Reihe von Functionen $u_1, u_2, u_3, u_4 \cdots$, welche abwechselnd für das Innere von T_1 und das Innere von T_2 erklärt sind."

„Das Maximum (bezw. die obere Grenze) von $| u_1 - u_3 |$ d. h. des absoluten Betrages von $u_1 - u_3$ längs Q_1 sei g, so ist der absolute Betrag von $u_1 - u_3$ längs Q_2 sicher nicht grösser als $g \cdot q_2$, längs Q_2 ist aber $u_1 - u_3 = u_2 - u_4$ (und zwar auf beiden Ufern), folglich ist $u_2 - u_4$, da diese Differenz am ganzen Rande von T gleich Null ist, dem absoluten Betrage nach an keiner Stelle innerhalb T_2 grösser als $g \cdot q_2$, längs Q_1 jedenfalls nicht grösser als $g \cdot q_1 \cdot q_2$. Mithin ist $| u_3 - u_5 | \overline{\gtrless} g \cdot q_1 q_2$, $| u_4 - u_6 | \overline{\gtrless} g \cdot q_1 q_2^2$ u. s. w."

„Hieraus folgt zunächst, dass die Functionen u_{2n+1} sowohl, als auch die Functionen u_{2n} sich mit wachsendem Index zwei bestimmten Grenzfunctionen u' und u'' nähern, welche beziehlich für die Bereiche T_1 und T_2 erklärt sind und innerhalb dieser Bereiche die Differentialgleichung befriedigen. Längs der ganzen Begrenzung Q_1^+, a, Q_2^-, b des Theilbereiches T^* ist $u' = u'' + K$, es besteht daher diese Gleichung auch im Innern von T^*. Längs der ganzen Begrenzung des

Theilbereiches $T - T^*$ ist $u' = u''$, es besteht daher auch diese Gleichung im Innern von $T - T^*$."

„Setzt man aber $u = u'$ im Innern von T_1, so ist u'' die analytische Fortsetzung von u^- über Q_1 hinaus; diese Fortsetzung ist aber, wie bewiesen, innerhalb T^* gleich $u' - K$ d. h. gleich $u^* - K$, also ist die Function $u = u'$ die gesuchte."

„Es ist also der Satz für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich, für einen beliebig vorgeschriebenen Periodicitätsmodul und für beliebig vorgeschriebene (im Allgemeinen stetige) Randwerthe bewiesen."

„Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich kann man nun den analogen Satz für einen *dreifach* zusammenhängenden Bereich beweisen. Es sei T dreifach zusammenhängend. Man construire einen Querschnitt Q_1, durch welchen T in einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich T_1 übergeht. Man construire einen zweiten Querschnitt Q_2, welcher durch continuirliche Gestaltänderung auf Q_1 reducirbar ist, der aber mit Q_1 keinen Punkt gemeinsam hat. Durch Q_2 gehe T in T_2 über."

„Nun kann man, dem bereits bewiesenen Satze zufolge, für die Bereiche T_1 und T_2 die Functionen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ bestimmen, welche *einen* vorgeschriebenen Periodicitätsmodul bereits besitzen, und, genau dem vorher angegebenen Verfahren entsprechend, der Function u einen zweiten Periodicitätsmodul aufzwingen."

„So kann man fortfahren, so lange eben überhaupt noch *eine* Randlinie übrig bleibt, längs welcher die Function u *vorgeschriebene* Werthe annehmen soll."

„Will man aber auch diese letzte Randlinie fortschaffen, also zu einer geschlossenen Riemann'schen Fläche ohne Randlinien übergehen, so kann man nicht auf dieselbe Weise verfahren, weil man bezüglich des Beweises auf Schwierigkeiten stösst.

„Diese Schwierigkeit, welche mir anfänglich viele Mühe gemacht hat, habe ich auf folgende Weise überwunden."

„Aus der Riemann'schen Fläche T schneide man eine Kreisfläche mit dem Radius R_1 heraus, die in ihrem Innern keine singuläre Stelle besitzt. Die von T noch übrig bleibende Fläche möge mit T_1 bezeichnet werden. Diese Fläche, welche also jetzt eine Randlinie besitzt, gestattet die Anwendung des bewiesenen Satzes zweifellos. Zu dem Kreise mit dem Radius R_1 construire man nun einen concentrischen mit *grösserem* Radius R_2 und bezeichne das Innere dieses Kreises mit T_2. Die beiden Kreise mit den Radien R_1 und R_2 sollen in demselben Blatte von T liegen; es kann also immer erreicht werden, dass auch der grössere Kreis keine singuläre Stelle in seinem Innern enthält."

„Man nehme nun längs $r = R_1$ eine Werthenreihe beliebig an, z. B. $u = 0$ und bestimme für den Bereich T_1 eine Function u_1, welche am Rande $r = R_1$ gleich Null ist und an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodicitätsmoduln besitzt. Eine solche Function existirt, lässt sich auch über den Rand von T_1 hinaus fortsetzen, aber von dieser Fortsetzung kann man keinen Gebrauch machen, weil dieselbe für $r < R_1$ nicht eindeutig und stetig bleibt (natürlich $\Delta u_1 = 0$).“

„Man bestimme hierauf für das Innere von T_2 eine Function u_2, welche längs $r = R_2$ mit u_1 übereinstimmt und für die $\Delta u_2 = 0$ ist. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine neue Function u_3, für welche $\Delta u_3 = 0$ ist, welche längs $r = R_1$ mit u_2 übereinstimmt, und welche im Innern von T_1 an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodicitätsmoduln besitzt.“

„Auf diese Weise fahre man fort.“

„Genau dasselbe Verfahren, welches auf S. 792 dazu angewendet worden ist, der Function u eine algebraische Unstetigkeit aufzuzwingen, wird hier dazu benutzt, zu bewirken, dass die Grenzfunction, der die Functionen $u_1, u_3, \cdots$ mit wachsendem Index unendlich nahe kommen, in dem ganzen Innern des Bereiches T_2 sich eindeutig analytisch fortsetzen lässt.“

„Von wesentlichem Einflusse auf die Beweisführung ist hierbei ein Hülfssatz, den ich im 74. Bande des Journals, Seite 232 erwähnt habe (Mitunter ist es nützlich u. s. w.).“

„Dieser höchst einfache Hülfssatz leistet in vielen Fällen sehr gute Dienste, besonders für den Fall geschlossener Bereiche.“

„Hiermit glaube ich nun hinreichend angedeutet zu haben, wie ich mir etwa den Nachweis der Existenz der überall endlich bleibenden Integralfunctionen zurecht gelegt habe, auf den ich natürlich grosses Gewicht legen musste, wenn anders die von mir angewendete Schlussweise überhaupt geeignet sein sollte, die Sätze zu beweisen, welche Riemann gefunden und ausgesprochen aber eben nicht bewiesen hat.“ —

§ 8.

Andere Gruppirung der Existenzbeweise.

Um jetzt einen Augenblick auf die physikalischen Betrachtungen meiner Schrift zurückzugehen*), so gestaltete sich die Anordnung dort folgendermassen. Das *erste* Experiment, das ich als realisirbar voraus-

*) Niveaucurven des logarithmischen Potentials in der Ebene sind in neuerer Zeit auf physikalischem Wege durch Herrn Guébhard in ausgezeichneter Schönheit realisirt worden. (Comptes Rendus 1881, 82). Vielleicht gelingt es den Physikern auch, jene Curvensysteme, die ich in R. Th. auf beliebiger geschlossener Fläche betrachtete, experimentell herzustellen und dadurch dem näheren Studium

setzte, bestand darin, dass auf die mit leitendem Materiale bedeckte Riemann'sche Fläche an zwei Stellen die beiden Pole einer galvanischen Batterie aufgesetzt wurden. So entstand ein überall eindeutiges Potential mit zwei gegebenen, einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten. Sodann liess ich, an *zweiter* Stelle, die beiden Pole der galvanischen Batterie zusammenrücken, zugleich aber die Intensität des elektrischen Stromes sich ins Unendliche steigern. Dadurch erhielt das nach wie vor überall eindeutige Potential einen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt. Ein solcher Punkt besitzt eine *Axe* und ein *Moment*, *M*. Nennt man die geodätische Entfernung eines Punktes der Fläche von jenem Unstetigkeitspunkte r, und φ das Azimuth, unter welchem der geodätische Radius vector gegen die Axe geneigt ist, so ist, für sehr kleine Werthe von r, der Werth des in Rede stehenden Potentials $\frac{M \cdot \cos \varphi}{r}$. *Eben diese Art von Potential werde ich weiterhin als Elementarpotential bezeichnen, denn es zeigt sich, dass man durch Ueberlagerung von Elementarpotentialen alle anderen erzeugen kann.* — Endlich mein *drittes* Experiment! Ich traf eine derartige Anordnung, dass eine ganze Curve auf der Riemann'schen Fläche als Sitz einer elektromotorischen Kraft und zwar einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft zu gelten hatte. Lief diese Curve von einem Endpunkte zu einem zweiten hin, so wurden diese Punkte einander ergänzende *Wirbelpunkte*. Das zugehörige Potential wird bei Annäherung an einen solchen Punkt dem von geeigneter Anfangsrichtung an gemessenen Azimuth φ proportional und ist also unendlich vieldeutig. Kehrt aber die Curve geschlossen in sich zurück, wobei man voraussetzen muss, dass die Riemann'sche Fläche, längs dieser Curve zerschnitten, nicht etwa in getrennte Theile zerfällt, so entstand ein *überall endliches* Potential. Dasselbe verläuft auf der Fläche durchweg stetig, gewinnt aber bei jeweiliger Ueberschreitung der benutzten Curve einen der elektromotorischen Kraft proportionalen Periodicitätsmodul, ist also ebenfalls unendlich vieldeutig.

Man erinnere sich nun einen Augenblick der Grundvorstellungen des Newton'schen Potentials. Jenem eindeutigen Potentiale mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten entspricht im Raume die Function

$$c\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

unter r, r' die geradlinigen Abstände von zwei festen Punkten verstanden. Unserer Elementarfunction aber correspondirt der Ausdruck:

---

zugänglich zu machen. — Auf die Controversen einzugehen, welche sich an die Guébhard'schen Versuche anschliessen, würde den Zweck dieses kurzen Hinweises überschreiten.

$$\frac{M \cos \varphi}{r^2},$$

das Potential des magnetischen Molecüls. Nun kann man aus letzterem das vorangeführte, $c\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$, erzeugen, indem man eine Reihe magnetischer Molecüle desselben Momentes M mit ihren Axen an einander reiht; es entspricht diess der Vorstellung, die wir uns von einem Linearmagneten zu machen pflegen. *Genau so wird man offenbar auf unserer Riemann'schen Fläche die eindeutige Potentialfunction mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten aus unserer Elementarfunction ableiten können.* — Aber die mathematische Physik kennt auch eine *Nebeneinander*stellung magnetischer Molecüle desselben Momentes. Man erhält vermöge derselben den Begriff der transversal magnetischen Fläche (Helmholtz) und construirt hierdurch unendlich vieldeutige Potentiale, für welche die Contour der transversal magnetischen Fläche eine Wirbellinie ist. *Genau so wird man auf unserer Riemann'schen Fläche die oben genannten unendlich vieldeutigen Potentiale erzeugen können, indem man jeden Punkt derjenigen Curve, die wir als den Sitz einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft bezeichneten, nunmehr als Unstetigkeitspunkt eines Elementarpotentials betrachten, dessen Axe mit der zugehörigen Curvennormale zusammenfällt und dessen Moment einer infinitesimalen, dem Bogenelemente proportionalen Grösse gleich ist.*

Das Resultat dieser Betrachtungen ist sonach das folgende: *dass nämlich auf beliebiger Riemann'scher Mannigfaltigkeit* (also auch auf beliebig gegebenem Fundamentalbereich), *sobald erst die Existenz des Elementarpotentials festgestellt ist, alle anderen in meiner Schrift in Betracht gezogenen Potentialfunctionen durch Mittel der gewöhnlichen Analysis, nämlich durch bestimmte Integrale*), hergestellt werden können.*

Die Existenz aber des Elementarpotentials auf beliebiger Riemann'scher Mannigfaltigkeit kann fast genau mit denselben Worten dargethan werden, mit welchen Hr. Schwarz pag. 792—794 seiner Abhandlung in den Berliner Monatsberichten den analogen Beweis für geschlossene Flächen vom Geschlechte Null geführt hat. Man hat sich nur zu erinnern, dass die nächste Umgebung jeder Stelle unserer Mannigfaltigkeit auf ein Stück der Ebene conform übertragen werden kann. Uebrigens wird auch bei dem Beweise des Hrn. Schwarz eigentlich nirgends darauf Bezug genommen, dass $p = 0$ sein soll. Hr. Schwarz betont den letzteren Umstand nur, um aus der Existenz des Elementarpotentials ein bestimmtes Theorem über conforme Abbildung abzuleiten.

*) Sofern es sich um die unbegrenzte *Ebene* handelt, hat bereits Hr. C. Neumann von derartigen Integralen ausgiebigen Gebrauch gemacht.

§ 9.

Berandete Flächen.

Um den Betrachtungen des § 8. einen gewissen Abschluss zu geben, bespreche ich noch kurz den Fall berandeter Flächen, wobei ich allerdings Nichts vorzubringen habe, was nicht den Specialforschern auf diesem Gebiete bekannt wäre*).

Bekanntlich führt man die Theorie berandeter Flächen nach dem Vorgange von C. Neumann (Borchardt's Journal, Bd. 59, 1861) auf die sogenannte Green'sche Function zurück**). Wir definiren dieselbe als eine auf der berandeten Fläche eindeutige Potentialfunction, welche an vorgegebener Stelle wie log. r für $r = 0$ unendlich wird und, überall sonst stetig verlaufend, am Rande den constanten Werth Null hat. Betrachtet man übrigens die Formeln, deren man sich z. B. bei Erledigung der Randwerthaufgabe bedient, genauer, so sieht man, dass es nicht sowohl die Green'sche Function ist, welche man benutzt, als ein Grenzfall derselben, der sich hinter dem nach der Normale eines Randpunktes genommenen Differentialquotienten der Green'schen Function verbirgt. Derselbe repräsentirt eine auf der berandeten Fläche überall sonst eindeutige und stetige, längs des Randes verschwindende Potentialfunction, welche in einem einzelnen Randpunkte eine einfache algebraische Unstetigkeit hat, deren Axe mit der zugehörigen Randnormale zusammenfällt. Eine gewisse Scheu, Potentialfunctionen am Rande selbst mit Unstetigkeiten auszustatten, mag davon abgehalten haben, diesem Grenzfall einen besonderen Namen beizulegen.

Es ist nun überraschend zu sehen, wie diese Begriffsbestimmungen sich in die allgemeinen des vorigen Paragraphen einordnen, *sobald wir die berandete Fläche, wie es u. A. in meiner Schrift zur Sprache kam, indem wir Vorder- und Rückseite derselben getrennt auffassen und längs der Begrenzungslinie verbunden denken****), *als einen besonderen Fall symmetrischer, geschlossener Flächen gelten lassen.* Will man die Potentialfunctionen, welche, auf der Vorderseite der berandeten Fläche verlaufend, längs des Randes den constanten Werth Null haben, auf

*) Vergl. z. B. das schon oben genannte Fragment XXV in Riemann's mathematischen Werken.

**) Ursprünglich hatte Hr. Neumann, indem er sich auf die Betrachtung ebener Bereiche beschränkte, von der im Texte genannten Function noch log. r in Abzug gebracht (unter r die geradlinige Entfernung von der Unstetigkeitsstelle verstanden). Die im Texte gegebene, übrigens schon von verschiedenen Autoren benutzte Definition, scheint zweckmässiger und muss jedenfalls dann verwandt werden, wenn man, wie hier beabsichtigt, die berandeten Flächenstücke beliebig gekrümmt im Raume verlaufend voraussetzen will.

***) Ich spreche hier nicht weiter von den in meiner Schrift gleichfalls in Betracht gezogenen Doppelflächen.

die Rückseite der Fläche analytisch fortsetzen, so braucht man nur die einzelnen Potentialwerthe (indem man vom Punkte der Vorderseite zum entsprechenden Punkte der Rückseite übergeht) im Vorzeichen umzukehren. So erweist sich dann die Green'sche Function als besonderer Fall jenes ersten, im vorigen Paragraphen betrachteten Potentials, welches zwei einander ergänzende logarithmische Unstetigkeitspunkte hat. Es ist nur *die* besondere Anordnung getroffen, dass jene beiden Unstetigkeitspunkte an correspondirenden Stellen der beiden Flächenseiten gelegen sind. *Jener Grenzfall der Green'schen Function aber* (auf den es, wie gesagt, eigentlich ankommt) *ist nichts Anderes als unsere Elementarfunction, mit der Maassgabe, dass man, um die Symmetrie der beiden Flächenseiten zu wahren, den Unstetigkeitspunkt auf den Rand und die zugehörige Axe in die Randnormale verlegt hat.*

So ergiebt sich also ein merkwürdiges Resultat. Die Theorie der geschlossenen Flächen kann bislang (§ 6) nur so behandelt werden, dass man die geschlossene Fläche aus einzelnen berandeten Stücken zusammensetzt. Umgekehrt aber gewinnt man die beste Einsicht in die Lehre von den berandeten Flächen, indem man letztere als speciellen Fall der geschlossenen Flächen auffasst.

Abschnitt II.

Das Princip der analytischen Fortsetzung.

§ 1.

Erläuterung des Princips an einem Beispiele.

Das allgemeine Princip, welches wir hier aufzustellen haben, ist an sich ausserordentlich einfach, und nur seiner *Wichtigkeit* halber wird ihm ein besonderer Abschnitt hier gewidmet. Dabei verlasse ich für die Folge die Ausdrucksweise der Potentialtheorie, spreche vielmehr, indem ich mir jedes Potential mit dem conjugirten in bekannter Weise vereinigt denke (R. Th. pag. 19), unmittelbar von den complexen Functionen des Ortes. Von den Functionen, die ich in meiner Schrift in Betracht zog, will ich hier der Kürze halber nicht die mit Periodicitätsmoduln sondern nur die eindeutigen in's Auge fassen, bei gegebenem Fundamentalbereiche also nur solche, die in zusammengehörigen Randpunkten übereinstimmende Werthe annehmen. Erinnern wir uns noch, dass eine complexe Function des Ortes völlig bestimmt ist, wenn wir ihre Werthe längs eines beliebig kleinen Linienstücks kennen.

Diess vorausgeschickt beginnen wir bei Darlegung unseres Princips, der vollen Deutlichkeit wegen, mit demselben Beispiele des einfachen

Parallelogramms, das auch in § 2 des vorigen Abschnitts vorangestellt wurde. Wir hatten damals nur ein einzelnes Parallelogramm betrachtet und dessen gegenüberstehende Kanten in einfacher Weise zusammengeordnet. Aber nun beachten wir, dass das Parallelogramm einen Theil der unbegrenzten Ebene ausmacht und wir das in Rede stehende Gesetz (die einfache Parallelverschiebung) als eine die ganze Ebene betreffende Operation auffassen können. Vermöge derselben legt sich neben unser erstes Parallelogramm ein zweites, ihm congruentes.

Zugleich modificiren wir in etwa unsere Auffassung. Statt unsere complexe Function des Ortes nur innerhalb des ersten Parallelogramms als bestehend vorauszusetzen, verfolgen wir dieselbe jetzt über das Parallelogramm hinaus in die unbegrenzte Ebene. Wir finden dann sofort: *dass unsere Function in dem neuconstruirten, anliegenden Parallelogramm dieselbe Werthvertheilung aufweist, wie in dem alten.* Denn das neue Parallelogramm liegt genau so gegen die Kante, welche ihm mit dem ersten gemeinsam ist, wie letzteres gegen seine gegenüberstehende Kante; in den entsprechenden Punkten beider Kanten nimmt aber unsere Function, nach Voraussetzung, identische Werthe an. —

Wir wiederholen nun den hiermit gemachten Schluss, indem wir das ursprüngliche Parallelogramm zunächst mit vier neuen Parallelogrammen umgeben, dann jedes von diesen abermals, und so weiter fort, bis die ganze Ebene in bekannter Weise mit einem Netz von Parallelogrammen überdeckt ist. In jedem dieser Parallelogramme verläuft unsere Function genau so, wie in jedem anderen. Um uns der gewöhnlichen Sprachweise zu bedienen, mögen wir die unbegrenzte Ebene als das Gebiet einer Variablen η betrachten. Dann haben wir als Resultat: *dass dieselben Functionen, welche wir als eindeutige Functionen des Ortes auf unserem Fundamentalbereich definirten, doppeltperiodische Functionen der Variablen η sind.* Dieser Satz darf natürlich sofort umgekehrt werden. Er enthält in einfachster Form, was wir jetzt als allgemeines Princip zu formuliren haben.

§ 2.

Der allgemeine Fall.

Um nun bei beliebig gegebenem Fundamentalbereiche einen ähnlichen Schluss machen zu können, genügt es offenbar, anzunehmen: dass derselbe ein *Stück* einer anderen, umfassenderen Riemann'schen Fläche sei*), und dass jene Operationen, welche die Kanten unseres Fundamentalbereichs zusammenordnen, als Transformationen der ganzen

*) Noch allgemeiner wäre es, auch diese Fläche wieder als Fundamentalbereich gegeben zu denken; doch mache ich davon in dieser Arbeit keine Anwendung.

Riemann'schen Fläche in sich selbst aufgefasst werden können. Vermöge jeder solchen Operation legt sich dann neben den ursprünglichen Fundamentalbereich ein neuer. Damit die Vorstellung des zu schildernden Processes den richtigen Grad der Allgemeinheit erreiche, wollen wir gleich erwähnen, dass dieser neue Bereich möglicherweise an irgend welchen Stellen über den alten hinübergreift oder auch Verzweigungspunkte in seinem Innern aufweist, die der alte nicht besass, etc. etc. Unabhängig davon gilt allemal der Satz: *dass jede complexe Function des Ortes, welche auf der durch den ersten Bereich versinnlichten Riemann'schen Mannigfaltigkeit eindeutig ist, auf jedem der Nachbarbereiche dieselbe Werthvertheilung aufweist, wie auf dem ursprünglichen.*

Um diese Behauptung in etwa zu zergliedern, sei η eine complexe Variable, deren wir uns bedienen, um den einzelnen Punkt auf unserer Riemann'schen Fläche zu bezeichnen. Sei ferner $\eta' = \varphi(\eta)$ diejenige Transformation, welche neben den ersten Fundamentalbereich einen zweiten legt, und also aus einer bestimmten Kante (K_1) desselben diejenige (K_2) macht, welche beiden Fundamentalbereichen gemeinsam ist. Sei nun $F(\eta)$ eine Function, für welche $F_{K_1} = F_{K_2}$ ist, d. h. welche in entsprechenden Punkten der beiden Kanten übereinstimmende Werthe annimmt. Man construire sodann die neue Function $F(\eta') = F(\varphi(\eta)) = F'(\eta)$, welche in dem neuen Fundamentalbereiche genau so verläuft, wie $F(\eta)$ in dem alten. Offenbar stimmen die Randwerthe F'_{K_2} mit den entsprechenden F_{K_1} überein. Aber letztere sind, wie gesagt, ihrerseits mit den F_{K_2} identisch. *Daher stimmen F und F' überhaupt längs der Kante K_2 überein und sind also dieselben Functionen.* Und eben diess behauptet in etwas anderer Ausdrucksweise unser Satz. —

Es gilt nun, sich die Gesammtheit der Bereiche, welche aus dem ersten durch fortgesetzte Reproduction entstehen, vorzustellen. Hierzu giebt das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel der doppeltperiodischen Functionen nur unvollkommene Anleitung. Bezeichnet man nämlich mit S_1 und S_2 die beiden Verschiebungen, vermöge deren sich neben das ursprüngliche Parallelogramm Nachbarparallelogramme legen; so ist $S_1 S_2 = S_2 S_1$. *Im Allgemeinen aber ist für eine solche Relation, oder überhaupt für irgend eine Relation zwischen den entsprechenden Operationen $S_1, S_2, \cdots, S_\nu$ gar kein Grund vorhanden.* Die Operationen $S_1, S_2, \cdots, S_\nu$, zusammen mit ihren inversen $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \cdots, S_\nu^{-1}$, umgeben den ursprünglichen Fundamentalbereich mit einem Kranze von 2ν Bereichen. Combiniren wir nun irgend zwei der Operationen, z. B. $S_i S_k$, so heisst diess, dass wir zunächst auf den anfänglichen Bereich die Operation S_i anwenden, dann aber auf den so gewonnenen Bereich die Operation S_k (die ja nicht nur für die Punkte des ursprünglichen Bereiches, sondern überhaupt für alle Punkte der Riemann'schen Fläche, die unsere Bereiche trägt, nach Voraussetzung Bedeutung hat). Wir erhalten also einen Bereich, welcher sich neben den anderen legt, der aus dem Anfangsbereiche durch S_k hervorgeht. — In ähnlicher Weise will jede Zusammenstellung der Symbole $S_1^{\pm}$, $S_2^{\pm}$, $\cdots$, $S_\nu^{\pm}$ gedeutet sein: jeder Zusammenstellung entspricht ein bestimmter Bereich, und auch umgekehrt (so lange wir eben keine Relationen zwischen den S voraussetzen) jedem Bereiche nur eine Zusammenstellung. Ich werde weiter unten auf diese Correspondenz zwischen Bereichen und Operationen noch genauer eingehen (Abschnitt III, § 11) und will hier nur noch auf Herrn Dyck's „Gruppentheoretische Studien" (Bd. XX dieser Annalen) verweisen, wo dieselben Verhältnisse in einer nur unwesentlich particularisirten Form mit besonderer Klarheit, aber allerdings etwas anderer Bezeichnung, besprochen sind.

Die Sache ist nun die, *dass unsere Function $F(\eta)$ sich auf allen diesen (im Allgemeinen unendlich vielen) Bereichen gleichförmig reproduciren wird.* Oder, wenn wir uns der Sprache der Analysis bedienen wollen und die Operationen S_1, S_2, $\cdots$, S_ν uns durch entsprechende Formeln $\eta' = \varphi_1(\eta)$, $\eta' = \varphi_2(\eta)$, $\cdots$, $\eta' = \varphi_\nu(\eta)$ ersetzt denken: *Unser $F(\eta)$ genügt den Functionalgleichungen:*

$$F(\varphi_1(\eta)) = F(\varphi_2(\eta)) = \cdots = F(\varphi_\nu(\eta)) = F(\eta),$$

und natürlich den unbegrenzt vielen, die aus ihnen abgeleitet werden können.

Diese analytische Formulirung ist allerdings insofern minder vollkommen, als die geometrische, als F, φ im Allgemeinen äusserst vieldeutige Functionen von η sind und daher die vorstehenden Functionalgleichungen erst dadurch einen bestimmten Sinn bekommen, dass wir ausdrücklich festsetzen, sie sollen dem Uebergange jedesmal vom einen Bereiche zum Nachbarbereiche correspondiren.

Diess ist das Princip der analytischen Fortsetzung.

§ 3.

Verbesserte Auffassung des Princips. Reguläre und symmetrische Flächen.

Man kann innerhalb der Riemann'schen Theorie sozusagen drei Stufen der Entwickelung unterscheiden. Allemal wird der unabhängig Variabelen der gewöhnlichen Functionentheorie eine irgend wie verlaufende Riemann'sche Fläche (oder Mannigfaltigkeit) substituirt. Aber an Stelle der abhängig Veränderlichen tritt das einemal die einzelne (reelle) Potentialfunction u, das zweitemal die complexe Function des Ortes, $u + iv$, endlich das drittemal wieder eine Riemann'sche Fläche. Wo die gewöhnliche Analysis Abhängigkeiten zwischen zwei Variabelen hat, da haben wir jetzt eine conforme Beziehung zwischen zwei

Riemann'schen Flächen. Es werden also nicht sowohl zwei complexe Grössen, sondern direct zwei algebraische Gebilde in wechselseitige Abhängigkeit versetzt.

Indem wir hiervon Gebrauch machen, können wir sagen, dass unser Princip der analytischen Fortsetzung nichts Anderes ist, als eine Schilderung der allgemeinsten conformen Beziehung, welche zwischen zwei Riemann'schen Flächen, T_1 und T_2, bestehen kann. Wird T_1 in geeigneter Weise zerschnitten und beginnen wir mit einer von den vielleicht unendlich vielen, unterschiedenen Abbildungen, welche T_1 auf T_2 vermöge des vorausgesetzten conformen Zusammenhanges erfährt, so erscheint das Bild von T_1 als bestimmter Fundamentalbereich, d. h. als ein Bereich mit bestimmter Zusammengehörigkeit der Kanten, über T_2 (oder einen Theil von T_2) ausgebreitet. Die Sache ist dann die, dass es nicht nöthig ist, will man die übrigen Abbildungen von T_1 finden, auf T_1 selbst zu recurriren. Vielmehr genügt es, jenen ersten Fundamentalbereich ins Auge zu fassen und ihn auf T_2 durch analytische Fortsetzung ins Unbegrenzte zu reproduciren. Und dieses ist vielleicht der reinste Ausdruck unseres Princips. —

Indem wir von demselben Gebrauch machen, besprechen wir den besonderen Fall, *dass nämlich T_1 eindeutige Transformationen in sich selbst besitzen mag.* Es zerlegt sich dann T_1 in eine gewisse (vielleicht unendliche) Zahl kleinerer, unter sich äquivalenter Gebiete, und nun ist die Sache offenbar die, dass es genügt, auf T_2 *eine* Abbildung *eines* dieser Gebiete zu kennen, um aus ihr zunächst durch eine geeignete analytische Fortsetzung ein erstes Bild der ganzen Fläche T_1 und weiterhin alle solche Bilder zu erhalten.

Hierbei nun erinnere man sich der Auseinandersetzungen über eindeutige Transformationen einer Riemann'schen Fläche in sich, wie ich sie in meiner Schrift, pag. 69ff., gegeben habe. Neben die directen Transformationen, die man gewöhnlich allein betrachtet, stellen sich unter Umständen inverse, denen eine conforme Abbildung „mit Umlegung der Winkel" entspricht. Gestattet eine Fläche eine inverse Transformation, welche, einmal wiederholt, zur Identität zurückführt, so heisst die Fläche eine *symmetrische*.

Indem wir uns auf letztere Flächen beschränken, besagt unser allgemeiner Satz, *dass es genügt, auf T_2 nur eine Abbildung der einen symmetrischen Hälfte von T_1 zu kennen, um aus ihr durch analytische Fortsetzung den Gesammtverlauf der Abbildung zu finden.* Die Operationen $S_1, S_2, \cdots$, welche dabei zur Reproduction des Anfangsbereiches dienen, sind dann natürlich selbst von der inversen Art, welcher eine Abbildung von T_2 auf sich selbst mit Umlegung der Winkel entspricht.

So gelangen wir zum *Princip der Symmetrie* in seiner allgemeinsten Gestalt und erkennen zugleich seine Stellung gegen unser Princip der analytischen Fortsetzung. Wo es am Platze ist, besagt es mehr als das letztere, denn es trägt eben der Symmetrie von T_1 Rechnung. Dafür kommt es aber auch nur bei symmetrischen Flächen T_1 zur Geltung.

§ 4.

Functionen mit linearen Transformationen in sich.

Die allgemeinsten Functionen mit linearen Transformationen in sich erwachsen aus den Betrachtungen des § 2, indem man die Functionen $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, $\cdots$ einfach durch *lineare* Ausdrücke in η gegeben sein lässt. So war es in den Beispielen 1), 2), 3) des § 2 im vorigen Abschnitte, und auch das Beispiel 4) daselbst liefert uns Functionen mit linearen Transformationen in sich, wenn wir die damals nicht näher definirte Zuordnung der $2p$ Randcurven eben durch lineare Substitution vermittelt denken. In allen diesen Fällen ist eine Ebene η (oder eine Kugelfläche η, was auf dasselbe hinauskommt), die Trägerin der unbegrenzt vielen Reproductionen, und so wollen wir es auch in der Folge, da diese Annahme allgemein genug ist, voraussetzen.

Die angeführten Beispiele zeigen zugleich, dass Functionen mit linearen Transformationen in sich durchaus nicht *eindeutig* zu sein brauchen. Es ist diess erst eine neue, in den späteren Entwickelungen des vorliegenden Aufsatzes hinzutretende Bedingung. Erst durch sie gewinnt der Begriff von Functionen mit linearen Transformationen in sich eine engere Umgrenzung. Verzichtet man auf Eindeutigkeit, so gelingt es z. B. sofort, beliebig viele Functionen zu construiren, welche durch irgendwelche vorgegebene lineare Substitutionen in sich übergehen. Für die einzelne solche Substitution construire man nämlich einen Bereich, dessen Begrenzungslinien vermöge der Substitution zusammengeordnet sind. Ueberdiess treffe man die Anordnung so, dass alle diese Bereiche irgendwie über einander geschichtet erscheinen. Es genügt dann, diese Bereiche durch irgendwelche Verzweigungen zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden. Dann definirt uns das letztere, als Fundamentalbereich aufgefasst, zugehörige Functionen der gewollten Art.

Unter diesen allgemeinsten Functionen mit linearen Transformationen in sich nehmen nun wieder diejenigen eine besondere Stellung ein, deren Fundamentalbereiche auch *inverse* lineare Umformungen in sich selbst gestatten. Insbesondere kann es sein, dass man die Gesammtheit aller äquivalenten Bereiche erhält, indem man den *halben* Ausgangsbereich durch symmetrische Umformungen dieser Art (d. h. Umformungen von der Periode Zwei) reproducirt. Und hier ist es nun, dass die Functionen einzuordnen sind, welche die Herren Schwarz, Schottky u. A. (auch Riemann selbst) vermöge des Princips der Symmetrie studirt haben. Es giebt zweierlei Arten symmetrischer linearer Umformungen (R. Th. pag. 73). Beide erscheinen in der Ebene als Transformation durch reciproke Radien; aber das eine Mal hat man es mit einem reellen Inversionskreise, das andere Mal mit einem Kreise von imaginärem Radius zu thun. Von den genannten Autoren wurde durchweg nur die erste Art der Symmetrie benutzt. Daher erscheinen ihre Ausgangsbereiche (die halben Fundamentalbereiche) von a priori gegebenen Kreisbogen begrenzt. Insbesondere hat Herr Schwarz solche durchaus schlichte Ausgangsbereiche betrachtet, bei denen sich diese Kreisbögen zu *einem* Linienzuge zusammenfügen und das Geschlecht p des Fundamentalbereichs also den Werth Null hat. Darüber hinaus behandelt Hr. Schottky den allgemeineren Fall, dass der, auch wieder schlicht vorausgesetzte Ausgangsbereich, von mehreren Kreisbogenpolygonen umgrenzt sei. Das p des Fundamentalbereichs ist dann immer um eine Einheit kleiner, als die Zahl der Begrenzungscurven. Herrn Schottky's Figuren ergeben sich aus denen des Herrn Schwarz sozusagen durch den im folgenden Abschnitte (§ 16) zu besprechenden Process der Ineinanderschiebung.

Abschnitt III.

Eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Nach den Entwickelungen des vorigen Abschnitts ist die Bestimmung speciell aller *eindeutigen* Functionen mit linearen Transformationen in sich sozusagen ein geometrisches Problem. Wir denken uns in der Ebene der complexen Variablen η einen übrigens beliebigen Fundamentalbereich abgegrenzt, dessen Begrenzungskanten wir paarweise durch gewisse lineare Substitutionen des η zusammenordnen, reproduciren dann diesen Bereich vermöge jener Substitutionen ins Unendliche und fragen, wie man in allgemeinster Weise die verschiedenen Bestimmungsstücke zu wählen hat, damit in der η-Ebene nirgends eine *mehrfache* Bedeckung durch die Fundamentalbereiche eintrete. — Die hier gewählte negative Ausdrucksweise soll dabei einschliessen, dass keineswegs die ins Unendliche vervielfältigten Fundamentalbereiche die ganze Ebene zu überdecken brauchen. Vielmehr werden sich im Allgemeinen *natürliche Grenzen* für die Vervielfältigung der Fundamentalbereiche einstellen, über welche hinaus dann auch die zugehörigen eindeutigen Functionen nicht können fortgesetzt werden.

Es gelingt mir im Folgenden nun nicht etwa und es ist auch nicht mein Zweck, das allgemeine, so präcisirte Problem in voller

Allgemeinheit zu erledigen. Vielmehr begnüge ich mich, von einer bestimmten Classe eindeutiger Functionen mit linearen Transformationen in sich (auf die sich dann auch das Fundamentaltheorem des Abschnitts IV zunächst beziehen soll) eine möglichst klare Vorstellung und scharfe Definition zu geben. Von dem Wunsche ausgehend, auch Denjenigen verständlich zu schreiben, welche sich noch nicht mit dieser Art von Functionen beschäftigt haben, gehe ich schrittweise und bespreche zunächst in den folgenden Paragraphen die übrigens wohlbekannten Functionen, welche bei Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution ungeändert bleiben (§ 2—4), gebe sodann eine Uebersicht über gewisse weitere, einfache Fälle unserer Functionen, die bereits von anderer Seite oder bei früherer Gelegenheit ausführlich behandelt wurden (§ 5—7) und untersuche sodann insbesondere derartige Functionen, bei denen eine reelle Kreislinie die natürliche Grenze abgiebt (§ 8—14). Aus den so gewonnenen Functionen entstehen sodann durch Variation der Constanten (§ 15) sowie durch Ineinanderschiebung (§ 16) gewisse allgemeinere, denen zwei weitere Paragraphen gewidmet werden (§ 17—18); sie bezeichnen die Grenze, bis zu welcher die diessmalige Untersuchung vorschreitet. Ich will hier den Wunsch nicht unterdrücken, dass alle diese Dinge von anderer Seite mit grösserer Ausführlichkeit möchten durchgearbeitet werden, als es mir seither bei nur zu beschränkter Zeit möglich gewesen ist.

§ 2.

Ueber die geometrische Bedeutung der einzelnen Substitutionen.

Was hier über die Bedeutung der einzelnen linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ gesagt werden soll, ist nachgerade ziemlich bekannt.*) Man wolle sich dabei die betreffenden Figuren jedesmal in der Ebene zeichnen; es ist dann aber nützlich, sich dieselben auf der Kugel vorzustellen. Denn auf der Kugel erscheinen solche Figuren, die wir als gleichberechtigt erachten müssen, auch dem ungeübten Auge viel leichter äquivalent, als in der Ebene.

Die erste Unterscheidung, welche wir zu machen haben, bezieht sich auf *die sogenannten Fundamentalpunkte* der Substitution, welche bei der Substitution ungeändert bleiben. Indem dieselben durch folgende quadratische Gleichung gegeben sind:

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0,$$

---

*) Ich selbst habe diese Dinge z. B. schon im 9ten Bande dieser Annalen (p. 185 ff) in ähnlicher Form zur Sprache gebracht. Wegen der einzuführenden Benennung vergl. man Bd. XIV dieser Annalen, p. 122.

können dieselben entweder getrennt sein, oder, im besonderen Falle, zusammenrücken.

Wir beginnen mit dem allgemeinen Falle und legen durch die beiden Fundamentalpunkte hindurch ein erstes Kreisbüschel, welches ich als Büschel der *Meridiane* bezeichne. Sodann construiren wir das Büschel der hierzu orthogonalen Kreise, der *Breitenkreise*. Die Ebenen der Breitenkreise schneiden sich (im Raume gedacht) alle längs derjenigen Linie, welche, in Bezug auf die Kugel, die conjugirte Polare der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte ist. Hierauf führen wir, statt η, eine neue Coordinate ζ derart ein, dass $\zeta = 0$ den einen, $\zeta = \infty$ den anderen Fundamentalpunkt bezeichnet. Setzen wir $\zeta = re^{i\varphi}$, so wird $\varphi =$ Const. die Gleichung der Halbmeridiane, $r =$ Const. die Gleichung der Breitenkreise sein. Auf dieses kanonische Coordinatensystem bezogen muss jetzt unsere Substitution nothwendig folgende Gestalt annehmen:

$$\zeta' = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \zeta,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung bezeichnen:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Und nun unterscheide ich, indem ich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = Re^{i\alpha}$ setze, drei Fälle.

Im ersten Falle sei $R = 1$. Dann bleiben, wie ersichtlich, bei der Transformation alle Breitenkreise ungeändert, die Meridiane aber vertauschen sich in der Art unter sich, dass $\varphi =$ Const. in $\varphi =$ Const. $+ \alpha$ verwandelt wird. Diess ist, was ich als *elliptische* Substitution bezeichne. Die elliptische Substitution ist *periodisch*, wenn α mit 2π commensurabel ist; ist α einem ganzzahligen Theile von 2π gleich, so nenne ich die Substitution gelegentlich *primitiv*.

Im zweiten Falle nehmen wir $\alpha = 0$. Dann bleiben umgekehrt die Meridiane ungeändert erhalten, die Breitenkreise aber vertauschen sich unter einander, indem $r =$ Const. durch $r = R \cdot$ Const. ersetzt wird. Ich nenne dann die Substitution eine *hyperbolische*.

Der dritte Fall, in welchem $R \gtrless 1$, $\alpha \gtrless 0$ ist, wird am Besten verstanden, wenn wir ihn durch eine Aufeinanderfolge einer elliptischen und einer hyperbolischen Substitution ersetzt denken. Ein Punkt: $\zeta = re^{i\varphi}$ ist nach der Transformation in $\zeta = rR \cdot e^{i(\varphi+\alpha)}$ übergegangen. Daher bleiben bei unserer Transformation die Curven:

$$\alpha \cdot \log r - \varphi \cdot \log R = \text{Const.}$$

ungeändert. Diese Curven sind die gleichwinkeligen Trajectorien unserer Meridiane (oder Breitenkreise). Daher spreche ich im vorliegenden

Falle von einer *loxodromischen* Substitution. Eine loxodromische Substitution ist ebenso, wie eine hyperbolische, nothwendig aperiodisch. —

Betrachten wir nun den Grenzfall, in welchem die beiden Fundamentalpunkte der Substitution zusammenfallen! Die Meridiane haben sich dann in solche Kreise verwandelt, welche einander im Fundamentalpunkte berühren. Aber die Breitenkreise, sowie die Schaaren zusammengehöriger Loxodromen haben ihrerseits (wie man mit Leichtigkeit findet) je das Nämliche gethan, *so dass also der specifische Unterschied zwischen den dreierlei Curvenarten in Wegfall kommt.* Wir verstehen die Transformation am Besten, indem wir die Kugel vom Fundamentalpunkte aus auf die gegenüberstehende Tangentialebene projiciren. Die Meridiane verwandeln sich dann in Parallelgerade der Ebene, ebenso die Breitenkreise etc. Sei ζ eine solche lineare Function von η, welche im Fundamentalpunkte unendlich wird. Dann schreibt sich unsere Substitution $\zeta' = \zeta +$ Const. und ist also durch eine blosse *Parallelverschiebung* der Ebene versinnlicht. — Ich nenne diesen (nothwendig wieder aperiodischen) Grenzfall den Fall der *parabolischen* Substitution.

§ 3.

Der zur einzelnen Substitution zugehörige Fundamentalbereich.

Um überhaupt Functionen mit linearen Transformationen in sich zu erhalten, betrachteten wir im vorigen Abschnitte übrigens beliebige Fundamentalbereiche, deren Randcurven allein durch die vorgegebenen Substitutionen paarweise zusammengeordnet werden mussten. Nun aber wir uns hier auf *eindeutige* Functionen jener Art beschränken, ist die Willkürlichkeit des Fundamentalbereichs eine wesentlich geringere geworden. *Offenbar darf derselbe jetzt in seinem Innern keine zwei Punkte enthalten, welche vermöge der zugehörigen linearen Substitutionen oder irgend einer aus ihnen zusammenzusetzenden Substitution äquivalent sind.*

Es sei jetzt eine einzelne lineare Substitution vorgelegt. So werden wir zuvörderst die Gruppe linearer Substitutionen bilden, die aus ihr durch positive oder negative Wiederholung hervorgeht, und die Gesammtheit der Lagen aufzufassen suchen, welche ein beliebiger Punkt vermöge der Substitutionen der Gruppe annimmt. Dann werden wir uns diesen Punkt beweglich denken und uns fragen, welchen möglichst grossen Bereich derselbe überstreichen mag, ehe er an solche Stellen gelangt, die mit Stellen, welche er früher bereits eingenommen hatte, äquivalent sind. Die Untersuchung zeigt, dass dieser Bereich von unwesentlichen Verzerrungen abgesehen, jedesmal vollkommen bestimmt ist. *Zu der einzelnen linearen Substitution gehört daher, in dem hier in Betracht* *kommenden Sinne, jedesmal nur ein Fundamentalbereich* (den wir dann durch die zugehörige Substitution bezeichnen können).

Sei unsere Substitution zuvörderst eine *elliptische.* So ist deutlich, dass dieselbe jedenfalls eine *periodische* sein muss, wenn der zugehörige Fundamentalbereich, wie wir es doch verlangen müssen, eine endliche Ausdehnung haben soll. Denn anderenfalls überdecken die Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen durch fortgesetzte Wiederholung der Substitution entstehen, in immer dichter werdender Aufeinanderfolge einen ganzen Breitenkreis. Wir können überdiess annehmen, dass unsere Substitution *primitiv*, d. h. in der Gestalt

$$\zeta' = e^{\frac{2i\pi}{l}} \cdot \zeta$$

darstellbar sei, unter l eine ganze Zahl verstanden. Denn die Gruppe, welche aus den Wiederholungen unserer periodischen Substitution erwächst — und auf diese *Gruppe* kommt es jetzt bei unseren neuen Ueberlegungen wesentlich an — kann immer auch durch Wiederholungen einer primitiven Substitution erzeugt werden. *Den Fundamentalbereich aber, der zu der vorgenannten primitiven Substitution zugehört, erkennt man sofort.* Er ist einfach eine *Sichel* von der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{l}$, welche sich, von geeigneten Halbmeridianen begrenzt, vom Punkte $\zeta = 0$ zum Punkte $\zeta = \infty$ hinzieht. Die unwesentlichen Aenderungen, welche man an diesem Bereiche noch anbringen kann, bestehen nur darin, dass man den einen Halbmeridian unter Festhaltung seiner Endpunkte verdrehen oder auch innerhalb gewisser Grenzen verzerren kann, sofern nur mit dem anderen Halbmeridian genau die entsprechende Aenderung vorgenommen wird.

Wir betrachten ferner die *parabolische* Substitution $\zeta' = \zeta + \text{Const.}$ So bietet sich sofort als zugehöriger Fundamentalbereich in der Ebene ein *Parallelstreifen*, den wir uns der Einfachheit halber geradlinig begrenzt vorstellen können. Wollen wir auf die Kugel übertragen, so haben wir jetzt *eine Sichel von der Winkelöffnung Null, deren beide Ecken in den Fundamentalpunkt der Substitution zusammenfallen.*

Bei der *hyperbolischen* Substitution $\zeta' = R \cdot \zeta$ oder der *loxodromischen* $\zeta' = Re^{i\alpha} \cdot \zeta$ wird die Sache insofern anders, als der zugehörige, im Wesentlichen wieder bestimmte Fundamentalbereich *zweifach* zusammenhängend ist. Wir werden jetzt nämlich als Fundamentalbereich etwa den *ringförmigen Raum* erachten, der zwischen zwei Breitenkreisen $r = \text{Const.}$ und $r = R \cdot \text{Const.}$ eingeschlossen ist. Der Unterschied zwischen den zweierlei Substitutionen ist dabei nur der, dass bei den hyperbolischen Substitutionen solche Punkte der beiden Breitenkreise zusammengeordnet erscheinen, welche auf demselben Halbmeridiane liegen, während bei der loxodromischen Substitution die beiden Kreise gegen einander sozusagen verdreht erscheinen. — Ich unterlasse es zu schildern, wie man den so eingeführten Bereich durch Verzerrung der Begrenzungscurven noch modificiren kann. —

Dagegen möchte ich durch die hierhergehörigen Figuren 2) und 3) der lithographischen Tafel dazu veranlassen, sich die verschiedenen Gestalten vorzustellen, unter denen sich die zuvörderst auf der Kugel gedachten Fundamentalbereiche bei verschiedener stereographischer Projection auf die Ebene übertragen. So stellt Figur 2 eine Sichel von der Winkelöffnung $\frac{\pi}{2}$, Figur 3 einen ringförmigen Fundamentalbereich vor.

§ 4.

Functionen, welche bei der einzelnen Substitution ungeändert bleiben.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich hier die Functionen explicite an, welche zu den im vorigen Paragraphen bestimmten Fundamentalbereichen hinzugehören. Im Falle der elliptischen oder parabolischen Substitution hat die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemann'sche Mannigfaltigkeit das Geschlecht Null. Daher wird es eine zugehörige Function geben, welche jeden Werth im Fundamentalbereich nur einmal annimmt. Als Function von ζ betrachtet muss sie im Falle der elliptischen Substitution bei $\zeta = 0$, wie bei $\zeta = \infty$ einen $(l-1)$-fachen Kreuzungspunkt besitzen. Analog im Falle der parabolischen Substitution im Punkte $\zeta = \infty$ einen Kreuzungspunkt unendlich hoher Ordnung. *Solche Functionen sind offenbar* ζ^l, *beziehungsweise* $e^{\frac{2i\pi\zeta}{\text{Const.}}}$. Alle anderen Functionen, die im Fundamentalbereiche eindeutig sind und auf der durch den Fundamentalbereich vorgestellten Riemann'schen Mannigfaltigkeit keinen wesentlich singulären Punkt haben, drücken sich nach dem Fundamentalsatz über die Mannigfaltigkeiten vom Geschlechte Null durch die beiden angegebenen Functionen resp. rational aus. — Bei den hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen ist $p = 1$. Will man zugehörige eindeutige Functionen bilden, so genügt, es, auf die Theorie der doppeltperiodischen Functionen zu recurriren. Sei $\zeta' = Re^{i\alpha} \cdot \zeta$ die vorgelegte Substitution. So folgt $\log \zeta' = \log \zeta + \log R + i\alpha$. Wir brauchen also nur eindeutige Functionen von $\log \zeta$ zu construiren, welche die Perioden $\log R + i\alpha$, und überdiess, damit sie in ζ eindeutig sind, die Periode $2i\pi$ haben. Dass $p = 1$ ist, drückt sich darin aus, dass alle solche Functionen*) sich durch zwei derselben rational darstellen lassen, zwischen denen eine algebraische Gleichung vom Geschlechte 1 besteht.

---

*) die im Fundamentalbereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Auch können wir den Gesammtverlauf, den diese Functionen in der Ebene ζ (oder auf der Kugel ζ) nehmen, mit Leichtigkeit übersehen. Bei der elliptischen Substitution zerlegt sich die Ebene einfach durch l Halbmeridiane in l nebeneinanderliegende Sicheln. Die Anzahl dieser Sicheln wird unendlich gross, indem zugleich die beiden Eckpunkte in einen zusammenrücken, wenn die elliptische Substitution zur parabolischen wird. Im Falle der hyperbolischen oder loxodromischen Substitution dagegen bekommen wir unendlich viele einander einschliessende ringförmige Bereiche, welche sich auf die beiden Fundamentalpunkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ immer enger zusammendrängen.

Diese ausführlichen Angaben mögen dazu dienen, damit jedenfalls diese ersten den einzelnen linearen Substitutionen correspondirenden Fälle vollständig verständlich seien.

§ 5.

Stellung der Gruppentheorie.

Durch die Bemerkungen des § 3 hat sich der Begriff des Fundamentalbereichs gegen den früher gegebenen in etwas verschoben. Statt der einzelnen linearen Substitutionen, welche zwei von den Randstücken des Fundamentalbereichs zusammenordnen, betrachten wir dort die Gruppe linearer Substitutionen, welche aus den genannten durch beliebige Combination und Wiederholung entsteht, — und es erscheint der zulässige Fundamentalbereich beinahe als ein Attribut dieser Gruppe. Offenbar hat die Gruppe, welche einem brauchbaren Fundamentalbereiche zugehört, keine unendlich kleine Substitution: sie ist *discontinuirlich*, wie Herr Poincaré es ausdrückt. Wir werden fragen, ob jede discontinuirliche Gruppe linearer Substitutionen eine und nur eine für uns brauchbare Eintheilung der Ebene in Fundamentalbereiche liefert. Wäre es der Fall, so könnten wir unsere ursprüngliche Fragestellung verlassen und die Aufsuchung aller discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen als eigentlichen Zielpunkt wählen.

Aber die nähere Betrachtung zeigt, dass da in dreifachem Sinne noch ein Unterschied zu machen ist.

Einmal giebt es, wie ich hier in keiner Weise ausführen kann, discontinuirliche Gruppen, denen überhaupt kein endlicher Fundamentalbereich zugehört*). Die Fundamentalpunkte der zugehörigen linearen Substitutionen sind überalldicht über das ganze Gebiet der complexen Variablen zerstreut.

Andererseits werden wir sofort solche Gruppen kennen lernen, bei denen das Gebiet der complexen Variablen durch gewisse natür-

*) Vergl. die bezügliche Andeutung von Herrn Poincaré in Bd. 93 der Comptes Rendus, pag. 46.

liche Grenzen in verschiedene Abtheilungen zerlegt ist. Innerhalb jeder Abtheilung existirt ein zugehöriger Fundamentalbereich. Aber wenn wir ihn vermöge der linearen Substitutionen reproduciren, die zugehörigen eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich also analytisch fortsetzen, so werden wir nie aus der einmal gewählten Abtheilung herausgelangen. Wir werden also sagen müssen, dass ein und derselben continuirlichen Gruppe in diesem Falle verschiedene Arten von Fundamentalbereichen und zugehörigen Functionen correspondiren.

Endlich aber giebt es Gruppen linearer Substitutionen, denen überhaupt kein zusammenhängender Fundamentalbereich entspricht, oder bei denen diess doch nicht für alle Theile der Ebene der Fall ist.

Daher scheint es, trotz der neuen Umgrenzung, die der Begriff des Fundamentalbereichs erfahren hat, am Richtigsten, dass wir auch im Folgenden immer von der Gebietseintheilung ausgehen. Nur wo kein Missverständniss möglich ist, empfiehlt es sich der Kürze halber, von der zugehörigen discontinuirlichen Gruppe zu sprechen.

§ 6.

Weitere Beispiele brauchbarer Gebietseintheilungen.

Ich wende mich nun zu der in § 1 bereits in Aussicht genommenen Aufzählung solcher bereits anderwärts studirter, für uns brauchbarer Gebietseintheilungen, deren Betrachtung zum Verständnisse des späteren nützlich sein kann.

1) *Wir nennen zunächst die Figuren der regulären Körper:* Doppelpyramide, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Die zugehörige Gebietseintheilung erwächst jedesmal durch symmetrische Reproduction eines Kreisbogendreiecks. Die Winkel desselben sind bez. dem folgenden Schema zu entnehmen:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{l},\quad (l \text{ beliebig}),$$
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},$$
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{5}.$$

Die Zahl der unterschiedenen Fundamentalbereiche, und also die Gruppe der zugehörigen Substitutionen ist *endlich*, und sind diess die einzigen endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, die es giebt (sofern man von den Wiederholungen einer einzelnen periodischen Substitution absieht). Das Geschlecht p ist Null.

2) *Als zweites Beispiel haben wir diejenigen Gebietseintheilungen, welche bei den doppeltperiodischen Functionen in Betracht kommen.*

Und zwar zuvörderst die gewöhnlichen Parallelogramme, vom Geschlechte 1, die der Gruppe

$$\eta' = \eta + m\omega_1 + n\omega_2$$

correspondiren, unter ω_1, ω_2 die Perioden verstanden. Dann ferner, den *geraden* doppeltperiodischen Functionen entsprechend, Parallelogramme vom Geschlechte Null, wie ein solches durch Figur 4 (auf der ersten beigegebenen Tafel*)) versinnlicht wird; die zugehörige Gruppe lautet:

$$\eta' = \pm\eta + m\omega_1 + n\omega_2.$$

Endlich noch die besonderen Figuren, welche sich ergeben, wenn man ein geradliniges Dreieck, das entweder gleichseitig ist, oder die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks oder endlich die Hälfte eines Quadrats vorstellt, durch Spiegelung ins Unbegrenzte vervielfältigt. Die zugehörigen Substitutionen lauten, unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, beziehungsweise:

$$\eta' + \alpha^k\eta + (m + n\alpha)\omega_1; \qquad \eta' = \pm\alpha^k\eta + (m + n\alpha)\omega_1;$$
$$\eta' = i^k \cdot \eta + (m + ni)\omega_1.$$

Zugleich sind die hiermit angeführten Gruppen (von den Wiederholungen einer einzelnen geeigneten Substitution abgesehen) die einzigen discontinuirlichen Gruppen, welche den Punkt $\eta = \infty$, aber auch keinen anderen Punkt der Ebene ungeändert lassen.

3) *Als drittes Beispiel ziehen wir diejenigen Gebietseintheilungen in Betracht, welche aus der symmetrischen Reproduction eines Kreisbogendreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$ *erwachsen, wo* l_1, l_2, l_3 *ganze Zahlen sind und* $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} < 1$ *ist***). Es sind diess eben diejenigen Figuren, denen schon Herr Schwarz im 75ten Bande von Borchardt's Journal eine Zeichnung widmete (Tafel II daselbst), und die in den letzten Bänden dieser Annalen von verschiedenen Seiten ausführlich behandelt worden sind. Bei ihnen tritt — für uns hier zum ersten Male — eine *natürliche Grenze* auf. Dieselbe wird von der Kreislinie gebildet, welche zu den drei Begrenzungskreisen des Ausgangsdreiecks (und also jedes anderen aus ihm abgeleiteten Dreiecks) orthogonal ist. Trifft man eine solche Coordinatenbestimmung, dass dieser Kreis als Axe der reellen Zahlen erscheint, so haben die Substitutionen der zugehörigen Gruppe durchaus reelle Coefficienten. Wir

---

*) Fig. 5 und Fig. 6 ebendaselbst repräsentiren a) den halben Fundamentalbereich des Ikosaeders, b) ein beliebiges Parallelogramm in solcher Projection, dass der Unendlichkeitspunkt der Ebene dem Bereiche angehört.

**) Lässt man diese Ungleichung fallen, so kommt man genau zu den unter 1) und 2) besprochenen Fällen zurück.

haben hier einen solchen Fall, in welchem die Gruppe weiter reicht, als die Ueberdeckung durch Fundamentalbereiche. Denn letztere finden sich nur auf derjenigen Seite des Grenzkreises, auf welcher wir (zufällig) das Ausgangsdreieck angenommen haben; die Gruppe aber zerlegt auch denjenigen Theil der Ebene, welcher auf der anderen Seite des Grenzkreises liegt, in äquivalente Gebiete.

§ 7.

Geometrischer Excurs zum vorigen Paragraphen.

Wenn man sich mit linearen Substitutionen einer Variablen η beschäftigt, so ist es bekanntlich in vielen Fällen nützlich, die Kugel, auf der man die complexen Werthe von η deutet, als Fundamentalfläche einer *Nicht-Euklidischen* Maassbestimmung zu betrachten*). Den linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ entsprechen dann die *Bewegungen* des Raumes, den elliptischen insbesondere die reinen *Drehungen*, den loxodromischen die *Schraubenbewegungen* etc. Jeder discontinuirlichen Gruppe linearer Substitutionen wird eine ebensolche von Bewegungen entsprechen.

Die Beispiele nun, welche wir im vorigen Paragraphen betrachteten, correspondiren sämmtlich solchen Gruppen von Bewegungen, *bei denen je ein bestimmter Raumpunkt festbleibt* Im Falle der doppeltperiodischen Functionen ist dieser Punkt *auf* der Kugel gelegen: der Punkt $\eta = \infty$. Bei den regulären Körpern ist es ein Punkt im Kugelinnern, nämlich der Mittelpunkt der Kugel (so lange man sich die regulären Körper unverzerrt in ihrer gewöhnlichen Gestalt denkt). Im Falle des dritten Beispiels aber ein Punkt ausserhalb, der Pol nämlich jener Ebene, welche aus der Kugel den besprochenen Grenzkreis ausschneidet.

Beschränkt man seine Aufmerksamkeit auf die Winkel, welche die Strahlen oder Ebenen, die durch den festen Punkt hindurchlaufen, im Sinne unserer Nicht-Euklidischen Maassbestimmung mit einander bilden, so darf man den Kegel, der von dem festen Punkte aus sich an die Kugel erstreckt, als Fundamentalgebilde der Maassbestimmung erachten. Wir haben dann in dem ternären, von jenen Strahlen und Ebenen erfüllten Gebiete, eine *hyperbolische* oder *elliptische* oder *parabolische* Maassbestimmung**), je nachdem der Kegel reell oder imaginär ist oder in eine Doppelebene (d. h., dualistisch zu reden, in zwei conjugirt imaginäre Ebenenbüschel) ausgeartet. Die hiermit bezeichnete

*) Siehe Annalen IX, pag. 183.

**) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe Annalen IV: Ueber die sogenannte Nichteuklidische Geometrie.

Anschauungsweise ist desshalb nützlich, weil sie einen wichtigen Hülfsbegriff an die Hand giebt. Projicirt man nämlich die auf der Kugel ausgebreiteten, unter sich äquivalenten Fundamentalbereiche irgend einer der von uns betrachteten Gebietseintheilungen von dem zugehörigen festbleibenden Punkte aus, so sind die projicirenden Pyramiden im Sinne der jeweiligen Maassbestimmung unter sich *congruent*. Insbesondere haben sie alle dieselbe *Winkelöffnung*. Hiernach erkennt man z. B. sofort, dass nur endliche Gruppen linearer Substitutionen möglich sind, wenn der festgehaltene Punkt im Kugelinnern liegt; denn die Gesammtheit der von einem solchen Punkte aus sich erstreckenden Winkel ist endlich.

Wir werden im Folgenden von dieser Hülfsvorstellung in einer Form Gebrauch machen, die sich an die geometrischen Vorstellungen der üblichen Functionentheorie bequemer anschliesst. Die Strahlen und Ebenen, welche durch den festgehaltenen Punkt hindurchlaufen, übertrage man mitsammt der für sie geltenden Maassbestimmung durch Schnitt auf die Kugel, und von dieser, wenn man will, durch stereographische Projection auf die Ebene η. So haben wir für die Punkte der letzteren eine Maassbestimmung, bei welcher der (reelle oder imaginäre oder ausgeartete) Grenzkreis die unendlich fernen Punkte abgiebt, und die geodätischen Linien in diejenigen Kreise übergegangen sind, welche den Grenzkreis orthogonal schneiden. Im Sinne dieser Maassbestimmung sind dann die jeweiligen Fundamentalbereiche, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachteten, *congruent* und also von gleichem *Flächeninhalt*. Die zugehörigen linearen Substitutionen von η aber bezeichnen eben so viele im Sinne unserer Maassbestimmung zu verstehende Bewegungen*).

§ 8.

Ueber die allgemeinsten, von uns in Betracht zu ziehenden Gruppen mit reellem Hauptkreise.

Wie im Vorhergehenden bereits angedeutet, werde ich die sämmtlichen Gruppen, welche wir in § 6 betrachteten, als *Gruppen mit Hauptkreis* bezeichnen. Dieser Hauptkreis ist im Beispiel 1) imaginär, im Beispiele 2) in einen Punkt ausgeartet, und sind diess, wie schon

*) Es ist diess dieselbe Art Nicht-Euklidischer Maassbestimmung, von der auch Herr Poincaré Gebrauch macht. Lässt man den Grenzkreis mit der Axe der reellen Zahlen zusammenfallen (worauf also die zugehörigen Bewegungen durch diejenigen linearen Substitutionen gegeben sein werden, welche reelle Coefficienten haben), so ist der Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte x_1+iy_1, x_2+iy_2, unter c eine reelle Constante verstanden,

$$=2ic \text{ arc. sin}\left(i\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}}\right).$$

bemerkt, die einzigen Beispiele von Gruppen mit imaginärem, bez. ausgeartetem Hauptkreis. Dagegen ist es leicht zu sehen, dass es über das dritte Beispiel des § 6 hinaus noch unendlich viele discontinuirliche Gruppen (resp. Gebietseintheilungen) mit *reellem* Hauptkreise giebt. Statt nämlich ein Kreisbogendreieck zu Grunde zu legen, mögen wir ein Kreisbogen*vieleck* in Betracht ziehen, dessen Seiten (verlängert gedacht) sämmtlich auf einem Hauptkreise senkrecht stehen, und dessen Winkel, sofern sie nicht Null sind, irgend welche ganzzahlige Theile von π sind. *Wenn wir ein solches Kreisbogenvieleck symmetrisch reproduciren, so erhalten wir wiederum eine brauchbare Gebietseintheilung, für welche der Hauptkreis Grenzkreis ist.* Das Geschlecht des Fundamentalbereichs ist, wie im Falle des Kreisbogendreiecks, gleich Null. Ich verweise ferner auf meine Bemerkungen „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen" im 17ten Bande dieser Annalen, sowie insbesondere auf Herrn Dyck's „Gruppentheoretische Studien" im 20ten Bande daselbst. Es wird dort gezeigt, dass in den so erhaltenen Gruppen mit Hauptkreis andere Gruppen als Untergruppen enthalten sind, deren Fundamentalbereich nicht nothwendig symmetrisch ist und ein Geschlecht besitzt, welches beliebig von Null verschieden sein kann.

Es ist Herrn Poincaré's Verdienst, zuerst darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass man die allgemeinsten Gruppen mit reellem Hauptkreis aus einfachen Bestimmungsstücken construiren kann*). Aber nur für einen Theil seiner Gruppen ist der Hauptkreis selbst die natürliche Grenze der Fundamentalbereiche. Zum Theil erreichen sie denselben nur in einzelnen Punkten, zum Theil überschreiten sie ihn und überdecken die ganze Ebene. Ich werde im Nachstehenden nur solche Fälle betrachten, in denen der Hauptkreis mit der natürlichen Grenze zusammenfällt.

Zur Vereinfachung überlegen wir vorab das Folgende. Ein und dieselbe Gruppe linearer Substitutionen kann in demselben Gebiete der Ebene zu scheinbar sehr verschiedenen Fundamentalbereichen Anlass geben. Ich erinnere nur an das Beispiel der doppeltperiodischen Functionen: dasselbe parallelogrammatische System kann auf mannigfachste Weise aus einzelnen Parallelogrammen aufgebaut werden. Um über die verschiedenen dabei auftretenden Möglichkeiten Uebersicht zu gewinnen, ist es nützlich, zunächst den Fundamentalbereich durch die geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit (oder Fläche), welche er versinnlicht, zu ersetzen, und dann hinterher zu überlegen, auf welche Weisen man diese Fläche zerschneiden und ihr also einen bestimmten Fundamentalbereich substituiren kann.

Wir kehren also einen Augenblick die Betrachtung um. Statt die

*) Siehe Annalen XIX, pag. 554.

Riemann'sche Fläche auf die η-Ebene abzubilden, verfolgen wir η als eine complexe Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche. Und hier ist es nun, dass wir die Beschränkungen, die wir im Folgenden festhalten wollen, am deutlichsten bezeichnen können.

Offenbar hat η, als Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche*) betrachtet, die Eigenschaft, sich nach Durchlaufung irgend eines geschlossenen Weges in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zu reproduciren. Es kann sein, dass eine derartige, von der Identität verschiedene, Substitution sich bereits einstellt, wenn wir nur einen einzelnen Punkt der Riemann'schen Fläche umkreisen. Einen solchen Punkt nennen wir einen *Verzweigungspunkt von* η und bedingen nun zunächst, *dass; gleich dem Geschlechte* p *der Riemann'schen Fläche, auch die Zahl* n *dieser Verzweigungspunkte durchaus endlich sein soll.* Dann aber beschränken wir auch noch das Verhalten von η im einzelnen Verzweigungspunkte. Die Bedingung, dass die Umgebung des Verzweigungspunktes in η eindeutig sein soll, lässt noch verschiedene Möglichkeiten offen. *Wir wollen festsetzen, dass* η *sich in der Nähe des einzelnen Verzweigungspunktes verhalten soll, wie* $\sqrt[l_k]{z}$ *in der Nähe von* $z=0$. Hier soll l_k eine ganze Zahl sein, welche ich den *Index* des Verzweigungspunktes nenne, die übrigens in der Grenze auch unendlich werden mag (worauf $\log z$ an die Stelle von $\sqrt[l_k]{z}$ tritt). Die Folge ist dann, *dass* η *bei Umkreisung des Verzweigungspunktes eine elliptische Substitution, und zwar eine primitive elliptische Substitution von der Periode* l_k, *im Grenzfalle aber eine parabolische Substitution erfährt.*

Den Inbegriff der hiermit definirten Attribute (p, n, l_k) bezeichne ich weiterhin als die *Signatur* der η-Function.

Indem wir nun insbesondere solche Gebietseintheilungen in der η-Ebene betrachten wollen, deren natürliche Grenze eine Kreislinie ist, wird der einzelne Fundamentalbereich nothwendig einfachen Zusammenhang haben. Es wird also darauf ankommen, die Riemann'sche Fläche (p, n) auf die eine oder andere Weise in eine einfach zusammenhängende zu zerschneiden. Eine Uebersicht über die unbegrenzt vielen Möglichkeiten, welche dabei auftreten, hat an dieser Stelle keinen Zweck. Es wird vielmehr genügen, wenn wir eine kanonische Zerschneidungsart verabreden, die wenigstens in der Hauptsache bestimmt ist. Diess soll im folgenden Paragraphen geschehen. Der § 10 schildert sodann die Gestalt des entsprechenden Fundamentalbereichs in der η-Ebene. Wir

*) Die Riemann'sche Fläche selbst denke ich mir immer, im Anschlusse an meine Schrift, ohne Verzweigungspunkte frei im Raume gelegen.

benutzen dabei, um die Ideen zu fixiren, einen Umstand, dessen auch Herr Poincaré erwähnt. In der Theorie der doppeltperiodischen Functionen zeigt man durch einfache geometrische Betrachtung, dass man den Fundamentalbereich, das Parallelogramm, immer geradlinig begrenzt voraussetzen kann. *In ganz ähnlicher Weise beweist man, dass man als Begrenzungskanten des einzelnen Fundamentalbereichs einer Gruppe mit Hauptkreis immer solche Kreisbogen verwenden kann, welche (verlängert gedacht) auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.* Indem wir hiervon in § 10 Gebrauch machen, disponiren wir rückwärts über die Gestalt jener Querschnitte, welche in § 9 auf unserer Riemann'schen Fläche nur erst der Art und Aufeinanderfolge nach festgelegt waren. —

Noch sei bemerkt, dass wir im Folgenden bei $p = 0$ immer $n \geqq 3$ und bei $p = 1$ immer $n \geqq 1$ voraussetzen wollen. Die hiermit ausgeschlossenen Fälle sind im Früheren bereits erledigt und würde ihre Mitberücksichtigung die Ausdrucksweise (zumal bei den Constantenzählungen) unnöthig schwerfällig machen. *Es sind diess nämlich diejenigen Fälle, in denen die Riemann'sche Fläche* (p, n) *unendlich viele eindeutige Transformationen in sich gestattet, welche die vorgegebenen Verzweigungspunkte nicht ändern.* Dem entspricht, wie hier beiläufig bemerkt sei, dass die betreffenden linearen Substitutionen der Variabelen η mit unendlich vielen anderen linearen Substitutionen vertauschbar sind.

§ 9.

Kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche (p, n).

Um die kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche die wir im Folgenden benutzen werden, herzustellen, beginnen wir mit derjenigen Zerschneidungsart, welche, auf Riemann zurückgehend, auch sonst vielfach verwandt wurde. Zunächst werden wir irgend p die Fläche nicht zerstückende und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \cdots, A_p$ construiren. Sodann ergänzen wir jeden derselben in bekannter Weise durch einen Querschnitt B_i, der von einem Punkte des A_i auslaufend zu demselben Punkte von der anderen Seite zurückkehrt. Die p so entstehenden Schnittpunkte (A_i, B_i) verbinden wir des Weiteren mit einem beliebigen Punkte O der Fläche durch Stücke c_i und legen endlich von demselben Punkte O aus nach den n Verzweigungstellen, die beziehungsweise $a_1, a_2, \cdots, a_n$ genannt werden mögen, Schnitte L_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Dabei können wir, indem wir noch bei jedem Schnitte zwischen einer positiven und einer negativen Seite unterscheiden, die Aufeinanderfolge der genannten Stücke so wählen, dass bei positiver*) Umkreisung der nun einfach

*) Als positiv nehme ich fernerhin diejenige Richtung, welche dem Drehsinn eines Uhrzeigers entgegen läuft.

zusammenhängenden Fläche die Aufeinanderfolge der Begrenzungsstücke die folgende ist:

$$\begin{gathered} c_1^+ A_1^+ B_1^- A_1^- B_1^+ c_1^- \\ c_2^+ A_2^+ B_2^- A_2^- B_2^+ c_2^- \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_p^+ A_p^+ B_p^- A_p^- B_p^+ c_p^+ \\ L_1^+ L_1^- L_2^+ L_2^- \cdots L_n^+ L_n^- . \end{gathered}$$

Nachdem Alles in dieser Weise geordnet ist, ziehe ich jetzt hinterher, — um nämlich an Querschnitten und also an Begrenzungskanten des späteren Fundamentalbereichs zu sparen —, die Stücke c_i, indem ich sie immer kürzer mache, schliesslich ganz in den Punkt O hinein, so dass zuletzt, ausser den L_k, auch die A_i, B_i sämmtlich von O auslaufen. *Der Erfolg ist dann einfach der, dass in dem vorstehenden Schema die Stücke $c_i^{\pm}$ überhaupt wegfallen und also nur $4p + 2n$ Begrenzungsstücke übrig bleiben.* Man beachte die Winkel, welche die aufeinanderfolgenden Begrenzungsstücke unserer Fläche mit einander einschliessen. Von derselben sind n gleich 2π, nämlich diejenigen, welche in den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ von den dort zusammenstossenden L_k^+, L_k^- gebildet werden. *Die übrigen $4p + n$ aber sind erst zusammengenommen gleich 2π*; denn erst zusammengenommen ergeben sie auf unserer Fläche die ganze Umgebung des Punktes 0. Man muss sich von dieser Umgebung eine Vorstellung machen, wie sie für den Fall $p = 2$, $n = 3$ durch Figur 7 auf der ersten beigegebenen Tafel schematisch repräsentirt wird.

Auf der so zerschnittenen Fläche ist nun η eindeutig, und wir können also den Inbegriff der Werthe, welche η auf ihr annimmt, als einen Functionszweig betrachten. Hätten wir keine bestimmte Zerschneidung verabredet, so könnten wir nur von der linearen Substitution reden, welche η bei *Durchlaufung* eines bestimmten geschlossenen Weges erleidet. Jetzt aber dürfen wir mit Rücksicht auf unseren Functionszweig von einer solchen Substitution sprechen, die der *Ueberschreitung* einer unserer Querschnitte correspondirt. In der That wird diese Substitution dieselbe sein, an welcher Stelle auch wir den einzelnen Querschnitt überschreiten mögen. Wir werden hiernach bestimmte Substitutionen S_i, T_i, resp. U_k haben, welche η erleidet, wenn wir von A_i^-, B_i^-, L_k^- beziehungsweise zu A_i^+, B_i^+, L_k^+ hinüberschreiten. Es sind diese $2p + n$ Substitutionen die *erzeugenden* Substitutionen, aus denen sich alle anderen, die η erfährt, zusammensetzen.

Die hiermit eingeführten Betrachtungen haben die grösste Aehnlichkeit mit denjenigen, vermöge deren man die Periodicitätsmoduln algebraischer Integrale zu bestimmen pflegt. Es will beim weiteren Verfolg derselben inzwischen ein wesentlicher Unterschied scharf erkannt sein. Bei den Integralen erscheinen beliebige geschlossene Wege, welche wir auf der Fläche hinter einander durchlaufen mögen, eben weil sie beide einen additiven Periodicitätsmodul liefern, mit einander vertauschbar. Eine solche Vertauschbarkeit tritt aber bei unseren Functionen im Allgemeinen keineswegs ein.

Uebrigens finden wir für unsere S_i, T_i, U_k, *indem wir die Punkte* a_k, O *unserer Fläche umkreisen, noch gewisse Relationen.* Zunächst, wenn wir um a_k herumgehen, so kommt diess auf dasselbe hinaus, als wenn wir den Querschnitt L_k überschreiten. Aber η reproducirt sich identisch, wenn wir a_k im Ganzen l_k-mal umkreisen, wo l_k der Index des betr. Verzweigungspunktes ist. *Daher kommt:*

$$U_k^{l_k} = 1.$$

Wir umgehen nun ferner den Punkt O. Da dieser Punkt durchaus zufällig gewählt ist und für unsere η-Function gar keine specifische Bedeutung hat, so reproducirt sich η dabei jedenfalls identisch. Nun werden bei dieser Gelegenheit die Querschnitte A_i, B_i, L_k, wie Figur 7 aufweist, in bestimmter Reihenfolge überschritten. Indem wir letztere markiren, gewinnen wir folgende Beziehung, die späterhin als *Fundamentalrelation* bezeichnet sein soll:

$$\begin{aligned} &S_1^{-1}T_1^{-1}S_1^{+1}T_1^{+1}S_2^{-1}T_2^{-1}S_2^{+1}T_2^{+1}\cdots \\ &\cdots S_p^{-1}T_p^{-1}S_p^{+1}T_p^{+1}U_1^{-1}U_2^{-1}\cdots U_n^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet die Aufeinanderfolge der Buchstaben (von links nach rechts) die hintereinander auszuführenden Operationen.

Vermöge dieser Relationen können wir die Benennung jeder Substitution, die sich aus den S_i, T_i, U_k zusammensetzt, beliebig modificiren, wovon noch wiederholt Gebrauch gemacht werden soll.

Es muss übrigens hervorgehoben werden, dass diese Relationen das Verhalten von η in den Punkten a_k, resp. in O keineswegs vollkommen charakterisiren. In nächster Umgebung von a_k sollte sich η verhalten, wie $\sqrt[l_k]{z_k}$ in der Umgebung von $z = 0$. Die Relation $U_k^{l_k} = 1$ würde bestehen bleiben, wenn wir hier $\sqrt[l_k]{z}$ durch irgend eine ganzzahlige Potenz ersetzten. Ebenso würde unsere Fundamentalrelation richtig bleiben, wenn η sich nicht erst bei voller Umkreisung des Punktes O, sondern schon auf einem beliebigen ganzzahligen Theile dieses Weges identisch reproducirte.

§ 10.

Der kanonische Fundamentalbereich in der η-Ebene.

Indem wir jetzt zur η-Ebene zurückgehen, bemerken wir vorab, dass die linearen Substitutionen, welche η erleidet, in dem von uns zu betrachtenden Falle jedenfalls nicht loxodromisch sind. Denn alle sollen ja einen bestimmten Kreis, den Hauptkreis, ungeändert lassen. Ist nun die Substitution, welche uns vorgelegt wird, *elliptisch*, so wird der Hauptkreis für sie ein Breitenkreis sein, die beiden Fundamentalpunkte der Substitution sind conjugirte Pole in Bezug auf den Hauptkreis, und es liegt also der eine, aber auch nur der eine Fundamentalpunkt der Substitution auf derjenigen Seite unseres Hauptkreises, auf der sich unsere Fundamentalbereiche befinden. Wird die Substitution (im Grenzfalle) *parabolisch*, so rücken die beiden Fundamentalpunkte in einen Punkt des Hauptkreises zusammen. — Ist dagegen die vorgelegte Substitution *hyperbolisch*, so wird der Hauptkreis die Bedeutung eines Meridians haben und also durch beide Fundamentalpunkte der Substitution hindurchlaufen.

Wir entwerfen jetzt vermöge unserer η-Function (deren Existenz wir hier als vorgegeben betrachten) ein erstes Bild der im vorigen Paragraphen zerschnittenen Fläche, und gewinnen so, was wir den *kanonischen Fundamentalbereich* in der η-Ebene, und zwar als *ursprünglichen* Fundamentalbereich bezeichnen wollen. Es ist ein einfach zusammenhängendes, nirgends über den Hauptkreis hinausgreifendes*), mit $4p+2n$ Begrenzungslinien und also ebenso viel Ecken versehenes, allgemein zu reden, krummliniges Polygon. Von diesen Ecken entsprechen $4p+n$, die ich als *Ecken erster Art* bezeichnen will, dem Punkte O unserer Riemann'schen Fläche; die Conformität der Abbildung erleidet in ihnen keine Unterbrechung und *es beträgt also die Winkelsumme der Ecken erster Art insgesammt* 2π. Dagegen bieten die Ecken der *zweiten* Art, die den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ der Riemann'schen Fläche entsprechen und demnach mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ resp. bezeichnet sein sollen, eine Abweichung von der Conformität. *Der Winkel* 2π, *welcher auf unserer Riemann'schen Fläche zwischen* L_k^+ *und* L_k^- *eingeschlossen ist, erscheint in der* η-*Ebene durch* $\frac{2\pi}{l_k}$ *ersetzt.* Die Ecke α_k ist dann zugleich Fundamentalpunkt der elliptischen Substitution U_k. Es geht daraus hervor, *dass unser Fundamentalbereich sich in* α_k *an den Hauptkreis hinanerstreckt, wenn* U_k *parabolisch ist.* Dagegen liegen die $(4p+n)$ Ecken erster Art noth-

*) Alles dieses, weil wir *voraussetzen*, unsere Riemann'sche Fläche sei in η eindeutig und der Hauptkreis sei die natürliche Grenze für die Reproductionen der Fundamentalbereiche.

wendig immer im Inneren des Hauptkreises. Denn da jede von ihnen dem Punkte O entspricht, so müssen sich von jeder derselben aus, wie wir unten noch genauer sehen werden, ganz ähnlich $(4p+n)$ Fundamentalbereiche in der η-Ebene erstrecken, wie vom Punkte O aus auf der Riemann'schen Fläche die $(4p+n)$ durch die A_i, B_i, L_k begrenzten Winkelräume.

Wir wollen uns die Gestalt der A_i, B_i, L_k jetzt so bestimmt denken, dass die Begrenzungslinien unseres Fundamentalbereiches Kreise werden, welche verlängert gedacht auf dem Hauptkreise senkrecht stehen. Und zwar sollen die Kreisbogen, welche den verschiedenen Ufern $A_i^{\pm}$, $B_i^{\pm}$, $L_k^{\pm}$ entsprechen, mit den correspondirenden griechischen Buchstaben $\mathsf{A}_i^{\pm}$, $\mathsf{B}_i^{\pm}$, $\Lambda_k^{\pm}$ bezeichnet sein. Die Figuren 8—10 (auf der zweiten beigegebenen Tafel) sollen die Aufeinanderfolge und Zusammengehörigkeit dieser Kreisbogenstücke an den schon oben gewählten Beispielen $p=2$, $n=3$ schematisch erläutern. Der Hauptkreis ist in allen Fällen stärker ausgezogen, desgleichen sind die Winkel an den Ecken α_k durch besondere Markirung kenntlich gemacht. Die Pfeile bezeichnen die Zusammengehörigkeit der Kanten und giebt überdiess die Pfeilspitze jedesmal den Sinn, in welchem die durch das beigesetzte Symbol bezeichnete Operation, positiv genommen, wirksam ist. *Durch* S_i^{+1}, T_i^{+1}, U_k^{+1} *geht beziehungsweise* A_i^{+} *aus* A_i^{-}, B_i^{+} *aus* B_i^{-}, Λ_k^{+} *aus* Λ_k^{-} *hervor.* Unter sich differiren die drei Zeichnungen nur durch ihre Beziehung zum Unendlichkeitspunkte der η-Ebene. Es sind verschiedene stereographische Projectionen einer und derselben auf einer Kugel zu denkenden Figur. Ich habe sie alle drei hergesetzt, weil es im Folgenden unerlässlich ist, sich unseren Fundamentalbereich bald in der einen, bald in der anderen Gestalt zu denken.

§ 11.

Die Gruppirung der Fundamentalbereiche.

Man versuche nun, sich ein deutliches Bild davon zu machen, wie sich unser Fundamentalbereich vermöge der erzeugenden Substitution $S_i^{\pm 1}$, $T_i^{\pm 1}$, $U_k^{\pm 1}$ vervielfältigt und nach und nach (der Voraussetzung gemäss) die ganze Ebene bis an den Hauptkreis überdeckt. Dabei erinnere man sich der allgemeinen Erläuterungen, die in § 2. des vorigen Abschnitts gegeben wurden, übrigens aber der in § 9. dieses gegenwärtigen Abschnitts aufgestellten Relationen. Um eine bestimmtere Ausdrucksweise zu ermöglichen, *wollen wir jeden Fundamentalbereich vermöge derjenigen linearen Substitution benennen, durch welche er aus dem ursprünglichen Fundamentalbereiche herausgeht.* Der ursprüngliche Fundamentalbereich selbst ist hiernach $=1$.

Was zuvörderst die Bereiche angeht, die sich an den ursprünglichen längs einer *Kante* auschmiegen, so sind diess offenbar $S_i^{\pm 1}$, $T_i^{\pm 1}$, $U_k^{\pm 1}$ selbst. Wir leiten hieraus sofort die folgende allgemeine Regel ab: *dass nämlich der Bereich* Π (unter Π ein beliebiges symbolisches Product der S, T, U verstanden) *von den* $S_i^{\pm 1}\Pi$, $T_i^{\pm 1}\Pi$, $U_k^{\pm 1}\Pi$ *unmittelbar umgeben ist.* In der That, bei der *Operation* Π, die den Bereich 1 in den *Bereich* Π überführt, geht $S_i^{\pm 1}$ in $S_i^{\pm 1}\Pi$ über, etc.

Wir suchen nun ferner die Bereiche, welche mit dem ursprünglichen, wo nicht eine Kante, so doch eine *Ecke* gemein haben.

Ist diese Ecke von der zweiten Art, so ist die Sache sehr einfach. *Wir haben, indem wir etwa* a_k *in positivem Sinne umkreisen, der Reihe nach die Bereiche:*

$$1,\ U_k,\ U_k^2,\ \cdots,\ U_k^{l_k-1}.$$

Die Relation $U_k^{l_k}=1$ entspricht dem Umstande, dass der $(l_k+1)^{\text{te}}$ Bereich wieder der erste ist. — Die Sache muss etwas anders dargestellt werden, wenn l_k unendlich, die Substitution U_k also parabolisch ist. Dann haben wir von 1 ausgehend nach der einen Seite die Bereiche U_k, U_k^2, U_k^3, $\cdots$, nach der anderen U_k^{-1}, U_k^{-2}, etc.

Etwas complicirter ist die Behandlung der Ecken erster Art. Wir betrachten einen Augenblick nicht den Fundamentalbereich 1 selbst, sondern nur seine Eckpunkte erster Art, und zwar zuvörderst den Eckpunkt (A_1+, A_n-). Durch S_1^{-1} wird aus ihm (A_1-, B_1+) [vergl. die Figuren 8—10]. Hieraus durch T_1^{-1}: (A_1-, B_1-), sodann durch S_1^{+1}: (A_1+, B_1-), endlich durch T_1^{+1}: (A_2+, B_1+). Die weitere Hinzufügung der Operationen S_2^{-1}, T_2^{-1}, S_2^{+1}, T_2^{+1} bringt den Punkt der Reihe nach in folgende Lagen: (A_2-, B_2+), (A_2-, B_2-), (A_2+, B_2-), (A_3+, B_2+). So fortfahrend kommen wir schliesslich, indem wir zwischendurch alle anderen Eckpunkte (A, B) einmal berühren, zu (B_p-, A_1+). Von hier bringen wir unseren Punkt durch U_1^{-1} nach (A_1-, A_2+), dann durch U_2^{-1} nach (A_2-, A_3+), $\cdots$, endlich durch U_n^{-1} zur Anfangslage (A_n-, A_1+) zurück. *So haben wir aus dem ersten Eckpunkte erster Art alle anderen durch gewisse Operationen hergestellt, die wir* $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots$ *nennen wollen.* Dabei ist:

$$\pi_0=1;\quad \pi_1=S_1^{-1};\quad \pi_2=S_1^{-1}T_1^{-1};\quad \pi_3=S^{-1}T_1^{-1}S_1^{+1},\ \cdots;$$

$$\pi_{4p-1}=S_1^{-1}T_1^{-1}S_1^{+1}T_1^{+1}\cdots S_p^{-1}T_p^{-1}S_p^{+1}T_p^{+1};\quad \pi_{4p}=\pi_{4p-1}U_1^{-1};$$

$$\cdots\ \pi_{4p+n-1}=S_1^{-1}T_1^{-1}\cdots S_p^{+1}T_p^{+1}U_1^{-1}U_2^{-1}\cdots U_n^{-1}.$$

Hier unterscheidet sich jedes π von dem unmittelbar vorhergehenden dadurch, dass rechter Hand ein einzelnes Symbol S, T oder U zugetreten ist. Es gilt diess auch, wenn wir auf π_{4p+n-1} wieder $\pi_0=1$

folgen lassen. *Denn zufolge unserer Fundamentalrelation resultirt gerade* 1, *wenn wir dem* π_{4p+n-1} *rechter Hand noch* U_n^{-1} *hinzusetzen.*

Ich sage nun, *dass wir alle Bereiche erhalten, die in positivem Sinne aufeinander folgend im Punkte* (A_1^+, A_n^-) *an den ursprünglichen Fundamentalbereich anstossen, wenn wir einfach die vorstehende Tabelle umkehren.* Mit anderen Worten, ich behaupte, dass Folgendes die Tabelle jener Bereiche ist:

$$1, \ \pi_1^{-1}, \ \pi_2^{-1}, \ \ldots, \ \pi_{4p-1}^{-1}, \ \pi_{4p}^{-1}, \ \ldots, \ \pi_{4p+n-1}^{-1}.$$

In der That: die hiermit aufgezählten Bereiche gehen aus dem ursprünglichen durch eine Operation hervor, welche je aus einer bestimmten Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches die erste Ecke macht: die neuen Bereiche haben also mit dem ursprünglichen diese Ecke gemein. Ferner: Jeder folgende Bereich geht, in Folge unserer Tabelle, aus dem vorangehenden dadurch hervor, dass *linker* Hand ein einzelnes Symbol S, T, U zutritt (insofern wir es jetzt mit den inversen Operationen zu thun haben); unsere Bereiche folgen sich also lückenlos. *Insbesondere wird die Fundamentalrelation das Aequivalent dafür, dass der* $(4p+n)^{te}$ *Bereich sich an den ersten unmittelbar anschliesst.* Dass aber auch die Aufeinanderfolge der Bereiche in positivem Sinne statt hat, zeigt ein Blick auf die Figur.

Wir wählen nun eine neue Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches, etwa diejenige, die aus (A_1^+, A_n^-) durch die Operation π' hervorgeht. Wollen wir alle Bereiche haben, die in dieser Ecke zusammen stossen, so brauchen wir offenbar die π^{-1} der letzten Tabelle rechter Hand nur mit dem Factor π' zu multipliciren. Wir erhalten dann die Aufeinanderfolge der gewünschten Bereiche, nur nicht (was übrigens sofort durch cyklische Umstellung zu erreichen ist) mit dem Bereiche 1 beginnend.

Nachdem wir so alle Bereiche bestimmt haben, welche mit dem ursprünglichen eine Ecke gemein haben — ich will sie alle unter der Gesammtbezeichnung P zusammenfassen — erledigen wir die gleiche Aufgabe für einen beliebigen anderen Bereich sofort. Wir brauchen nämlich wieder nur das Symbol Π dieses Bereiches linker Hand mit den einzelnen P zu multipliciren.

Und nun können wir uns folgende Vorstellung von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche in der η-Ebene machen. Wir beginnen mit dem Bereiche 1 und umgeben ihn zuvörderst mit dem Kranze der anstossenden Bereiche P. Man versteht diess am besten, wenn alle U_k elliptisch sind und also die Zahl der P endlich ist. Hernach betrachte man den Fall, dass einige U_k parabolisch sein mögen, als einen Grenzfall. Um diesen ersten Kranz herum legen wir einen zweiten: das sind diejenigen Bereiche, welche an irgend einen Bereich P anstossen, und die wir also mit PP' bezeichnen können. Dann folgt ein dritter Kranz von Fundamentalbereichen $PP'P''$ etc. Und so streben wir je länger je mehr der natürlichen Grenze des Hauptkreises zu, ohne denselben irgendwo anders, als in den Fundamentalpunkten der etwa vorhandenen parabolischen Substitutionen U_k und der mit ihnen gleichberechtigten Substitutionen, wirklich zu erreichen.

§ 12.

Ueber die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir ergänzen die Schilderung, welche wir nunmehr von dem Verlaufe der η-Function gegeben haben, noch durch gewisse Sätze über die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir fanden oben die Relationen $U_k^{l_k} = 1$, wir hatten ferner die Fundamentalrelation. Aus ihnen folgen unendlich viele andere durch Transformation und Combination*). *Ich sage nun zunächst, dass hierüber hinaus zwischen unseren S_i, T_i, U_k keine anderen Relationen möglich sind.*

Sei nämlich $R = 1$ eine Relation (wo R ein Aggregat der S, T, U ist), so werden wir dieselbe geometrisch deuten**), indem wir zunächst alle diejenigen Bereiche in der η-Ebene markiren, welche, mit 1 beginnend, der Reihe nach durch das letzte Symbol von R, durch die Zusammenstellung der *zwei* letzten Symbole, der *drei* letzten Symbole etc. gegeben sind. Von diesen Bereichen hat jeder folgende mit dem vorangehenden eine Kante gemein, und die Aufeinanderfolge ist *geschlossen*, eben weil $R = 1$ ist. Statt von der Aufeinanderfolge der Bereiche werden wir bequemer von einer geschlossenen *Curve* sprechen, die der Reihe nach jene Bereiche durchsetzt. Und nun ist die Sache die, dass wir diese Curve, ohne ihre Bedeutung zu ändern, unter der einen Bedingung beliebig verzerren können, dass wir, bei der Verzerrung, die Eckpunkte der Fundamentalbereiche als unüberschreitbare Hindernisse betrachten. Denn eine jede solche Verzerrung hat nur den Effect, dass in die Aufeinanderfolge der Symbole, welche wir R nennen, an irgend welchen Stellen andere Symbolaggregate, die wir r nennen mögen, zusammen mit dem jedesmaligen, unmittelbar dahinter folgenden r^{-1} eingeschaltet werden, wodurch offenbar an der Richtigkeit und dem Wesen der Relation gar Nichts geändert wird. *Nun zeigt uns aber die geometrische Anschauung, dass nicht nur der einzelne Fundamentalbereich, sondern auch die Gesammtheit aller Bereiche in unserem Falle*

*) Ist $R = 1$ eine Relation, π irgend eine Operation der Gruppe, so heisst $\pi R \pi^{-1} = 1$ die transformirte Relation.

**) Vergl. hierzu Hrn. Dyck's „Gruppentheoretische Studien" im XX. Bande dieser Annalen.

eine einfach zusammenhängende Fläche bildet. Daher können wir, indem wir innerhalb des von unserer Curve umspannten Flächenstückes einen Punkt markiren, die Curve durch eine Reihenfolge von Schleifen ersetzen, welche von dem markirten Punkte aus nach den verschiedenen von der Curve umspannten Eckpunkten von Fundamentalbereichen hinlaufen, um je nach Umkreisung eines einzelnen Eckpunktes zum Ausgangspunkte zurückzukehren. Das heisst aber: unsere Curve ist mit der aufeinanderfolgenden Umkreisung gewisser Eckpunkte äquivalent. Nun entsprechen die früher aufgestellten Relationen zwischen den S, T, U den Umkreisungen der Eckpunkte des ursprünglichen Fundamentalbereiches. Umkreisen wir die Eckpunkte eines anderen Bereiches, so erhalten wir nothwendig — weil dieser Bereich aus dem ursprünglichen durch Transformation hervorgeht — die transformirten Relationen. *Daher ist $R = 1$ ohne Weiteres mit einem Aggregate solcher transformirter Relationen äquivalent*, und hat also in der That keine selbständige Bedeutung, w. z. b. w.

Wir fragen ferner nach denjenigen Substitutionen unserer Gruppe, welche *elliptisch* sind. Man kann diese Frage auf die eben beantwortete zurückführen. Doch ist es noch einfacher, sie direct zu beantworten. Eine elliptische Substitution unserer Gruppe hat einen ihrer Fundamentalpunkte nothwendig in demjenigen Gebiete, welches von unseren Fundamentalbereichen überdeckt wird (siehe oben). Daher stossen in diesem Punkte verschiedene Fundamentalbereiche zusammen, welche vermöge der elliptischen Substitution äquivalent sind. Mit anderen Worten: *Die elliptische Substitution muss sich in der Gestalt $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ darstellen lassen, wo U_k eine derjenigen erzeugenden Substitutionen ist, die selber elliptisch sind.*

Zu demselben Resultate führt vermöge einer Hülfsbetrachtung der Fall einer *parabolischen* Transformation. Um uns prägnanter ausdrücken zu können, mögen wir einen Augenblick den Hauptkreis der η-Ebene mit der Axe der reellen Zahlen, den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution mit dem Unendlichkeitspunkte zusammen fallen lassen. Unsere Transformation wird dann die Gestalt $\eta' = \eta + C$ annehmen. Wir zerlegen entsprechend die Ebene η durch gerade Linien, welche zur Axe der reellen Zahlen senkrecht sind, in Parallelstreifen von der Breite C. Ich sage dann, *dass in jedem dieser Streifen nothwendig ein Fundamentalbereich vorhanden ist, oder auch eine Anzahl solcher Bereiche, die sich parallel neben einander in's Unendliche ziehen.* Wäre diess nämlich nicht der Fall, so müssten wir, wenn wir einen solchen Streifen in's Unendliche verfolgten, auf andere und andere Fundamentalbereiche stossen. Es würde dann, ausser unserer parabolischen Substitution, noch eine zweite Substitution geben müssen, welche den einzelnen Fundamentalbereich in der Weise reproducirte, lass sich die reproducirten Bereiche gegen den Punkt $\eta = \infty$ anhäufen. Diese Substitution wird parabolisch oder hyperbolisch sein können, aber $\eta = \infty$ zum Fundamentalpunkte haben. Wir combiniren sie mit $\eta' = \eta + C$ und erhalten eine discontinuirliche Gruppe, welche in unserer Gruppe mit Hauptkreis als Untergruppe enthalten ist. Diese Gruppe müsste eine von denen sein, die wir in § 6. des gegenwärtigen Abschnittes an zweiter Stelle aufgezählt haben. Aber keine dieser Gruppen lässt die Axe der reellen Zahlen invariant; es kann also auch keine solche Gruppe in unserer Substitutionsgruppe enthalten sein. — Wir haben dabei ausser Acht gelassen, dass die zutretende Substitution vielleicht selbst in der Gestalt $\eta' = \eta + C'$ enthalten sein kann (unter C' eine reelle Constante verstanden). Aber dann wird sie, mit $\eta' = \eta + C$ combinirt, unsere anfänglichen Parallelstreifen nur in schmalere Streifen zerlegen, und unser eigentlicher Schluss erleidet keine Aenderung. Also folgt: *So oft in unserer Gruppe eine parabolische Substitution vorhanden ist, so giebt es auch zugehörige Fundamentalbereiche, welche sich mit einer Ecke bis an den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution erstrecken.* — Wenn aber Letzteres bei *einem* Fundamentalbereiche der Fall ist, so reicht auch der ursprüngliche Fundamentalbereich an den Hauptkreis hinan; es giebt also unter den U_k eine parabolische Substitution, und die vorgelegte parabolische Substitution lässt sich in die Gestalt $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ setzen, unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Daher, wenn wir zusammenfassen: *Unsere Gruppe enthält keine anderen elliptischen oder parabolischen Substitutionen, als diejenigen, die sich in der Gestalt $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ schreiben lassen.*

Hieraus folgt insbesondere, dass auch die erzeugenden Substitutionen S_i, T_i nothwendig *hyperbolische* Substitutionen sind. Sollte nämlich, wie man vielleicht denken möchte, im einzelnen Falle S_i (oder T_i) einem $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ gleich sein, so wäre diess eine zwischen den erzeugenden Substitutionen bestehende besondere Relation, und eine solche kann, wie eben bewiesen, in keinem Falle statt haben. Wir schliessen daraus noch den hübschen Satz, dass von den Begrenzungskreisen des ursprünglichen Polygons die zusammengehörigen A_i^+ und A_i^{-1} (oder auch B_i^+ und B_i^-) einander nie schneiden können. Denn A_i^+ geht aus A_i^- (wie die Figur zeigt) in der Weise vermöge der hyperbolischen Substitution S_i hervor, dass die beiden Fundamentalpunkte von S_i durch A_i^+ (d. h. durch den Vollkreis, der das Stück A_i^+ enthält) und ebenso durch A_i^- von einander getrennt werden. Uebt man aber auf einen so gelegenen Kreis die hyperbolische Substitution aus, so geht er gewiss in einen anderen über, der ihn nicht schneidet.

§ 13.

Umkehr der bisherigen Betrachtungen.

Die Voraussetzung, mit der wir in den letzten drei Paragraphen operirt haben, war die *Existenz* der η-Function (p, n, l_k). Wir werden uns jetzt fragen, ob wir den ganzen Gedankengang nicht umkehren und also jede η-Function (p, n, l_k) der in Betracht gezogenen Art a priori construiren können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, dass mit dem ersten Fundamentalbereiche des § 10. die zugehörigen Substitutionen S, T, U und also der Gesammtverlauf der η-Function bereits gegeben sind. Denn jede dieser Substitutionen hängt, bei gegebenem Hauptkreise, von höchstens drei reellen Constanten ab; sie hat aber zwei Ecken des betreffenden Bereiches in zwei andere bestimmte Ecken desselben Bereiches überzuführen, was vier Bestimmungsstücke abgiebt und also zur Fixirung der Substitution jedenfalls ausreicht.

Aber ich sage, *dass bei richtig angenommenem Fundamentalbereiche allemal auch eine brauchbare η-Function der vorgegebenen Signatur resultirt.* Als richtig angenommen bezeichne ich dabei einen Bereich, der von Kreisbogen $\mathsf{A}_i^{\pm}$, $\mathsf{B}_i^{\pm}$, $\Lambda_k^{\pm}$ begrenzt, Substitutionen S_i, T_i, U_k gestattet, welche den betreffenden Hauptkreis ungeändert lassen, und dabei nicht nur in den Ecken α_k die vorgeschriebenen Winkel $\frac{2\pi}{l_k}$, sondern auch als Winkelsumme der Ecken erster Art 2π besitzt.

In der That: Zuvörderst ist deutlich, dass zwischen den S, T, U in diesem Falle die früher besprochenen Relationen bestehen müssen. Denn diese waren nur eine Folge von Dem, was gerade hinsichtlich der Winkel postulirt wurde. Wir reproduciren daraufhin unseren ersten Bereich vermöge der S, T, U. Es ergiebt sich dann zunächst, dass unser ursprünglicher Bereich genau nach dem Schema des § 11. von einem Kranze neuer Bereiche umgeben ist, von denen keiner über ihn hinübergreift. Aber das Gleiche gilt dann nothwendig von jedem anderen Bereiche. Daher haben wir jedenfalls, *dass die Riemann'sche Fläche (p, n, l_k), welche durch den ersten Bereich vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten definirt wird, eine unverzweigte Function von η ist.*

Aber wird unsere Riemann'sche Fläche in Folge dessen in η *eindeutig* sein*) und wirklich den vorgegebenen *Hauptkreis* zur natürlichen Grenze haben? Ich behaupte, dass Beides in der That der Fall ist.

*) Functionen mit natürlicher Grenze können sehr wohl unverzweigt und doch nicht eindeutig zu sein, wie einfache Beispiele beweisen und im Folgenden noch öfter zur Sprache kommt. Man braucht z. B. nur den Bereich, in welchem die Function existirt, an irgend einer Stelle über sich selbst hinübergreifen zu lassen.

Und hier ist es nun, dass ich zum Beweise jene Nicht-Euklidische Maassbestimmung brauche, welche am Ende von § 7. dieses Abschnitts entwickelt wurde. Dabei beschränke ich mich, der Kürze halber, auf den Fall, dass alle Substitutionen U_k *elliptisch* sind. Sollten einige derselben parabolisch sein, so müsste man eine Hülfsbetrachtung anstellen, die derjenigen nicht unähnlich ist, welche wir am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten.

Im Sinne der erwähnten Maassbestimmung sind alle aus dem ursprünglichen abzuleitenden Fundamentalbereiche congruent. Wir wollen uns nun zuvörderst die Fundamentalbereiche so angeordnet denken, wie in § 11. gegen Schluss besprochen. Sei δ die kleinste Entfernung, welche von einem Eckpunkte des einzelnen Fundamentalbereiches bis zu einem Punkte einer nicht anstossenden Begrenzungskante hinreicht. Dann hat jeder der unendlich vielen Ringe, mit denen wir successive den ersten Fundamentalbereich umgeben, eine Breite, die an keiner Stelle unter δ herabsinkt. Jeder Punkt daher, welcher in *endlicher* Entfernung von dem ursprünglichen Fundamentalbereiche angenommen werden mag, wird schliesslich von den Reproductionen des Ausgangsbereiches überdeckt, und nur der Hauptkreis selbst, als Ort der unendlich fernen Punkte, kann die natürliche Grenze der Reproductionen sein, womit also dieser Punkt erledigt ist.

Wollen wir jetzt ferner beweisen, dass unsere Riemann'sche Fläche (p, n, l_k) in η eindeutig ist, so haben wir zu zeigen, dass bei dem geschilderten Reproductionsverfahren (bei dem gewiss niemals benachbarte Bereiche übereinandergreifen können) auch nie *entfernte* Bereiche übereinandergreifen. Gesetzt, es gäbe zwei solche Bereiche Π_1 und Π_N, so würden wir zwischen dieselben eine endliche Zahl unmittelbar aufeinanderfolgender Bereiche: $\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{N-1}$ einschalten können. Diese Reihenfolge, welche mit ihren Endgliedern, Π_1 und Π_N, über sich selbst hinübergreift, umspannt, im Sinne unserer Maassbestimmung, jedenfalls nur einen endlichen Theil der Ebene. Nach dem, was eben bewiesen wurde, ist letzterer mit Fundamentalbereichen vollkommen ausgefüllt. Von diesen Fundamentalbereichen müssen aber zwei, welche bez. an Π_1 und Π_N angrenzen, selbst wieder übereinandergreifen. Indem wir sie an die Stelle von Π_1 und Π_N setzen und durch die Reihenfolge derjenigen Fundamentalbereiche verbinden, welche an $\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{N-1}$ von der Innenseite angrenzen, wiederholen wir denselben Schluss für einen Theil der Ebene, der um ein Endliches *kleiner* ist, als der gerade betrachtete. Offenbar müssen wir, so fortschreitend, schliesslich zu einem Verzweigungspunkte der η-Ebene gelangen. Ein solcher aber ist, wie wir wissen, unmöglich. Daher war unsere Voraussetzung betreffs der Π_1, Π_N unzulässig.

Hiermit aber ist die Behauptung, welche wir zu Anfang des Paragraphen voranstellten, sofern wir von der Möglichkeit parabolischer U_k absehen, in allen Stücken bewiesen.

§ 14.

Die independenten Bestimmungsstücke der η-Function mit Hauptkreis.

Auf Grund der vorangehenden Entwickelungen fragen wir jetzt zunächst, von wievielen Constanten ein geeigneter Fundamentalbereich (p, n, l_k) abhängen mag, und suchen sodann nach zweckmässigen Bestimmungsstücken der zugehörigen η-Function.

Was die erstere Frage anlangt, so können wir, bei gegebenem Hauptkreis, etwa folgendermassen vorgehen.

Sei (um die Ideen zu fixiren) $p > 0$. So beginnen wir etwa mit der Construction des ersten Quadrupels von Begrenzungskreisen: A_1^+, B_1^-, A_1^-, B_1^+. Den Kreis A_1^+ und die beiden Eckpunkte auf ihm werden wir beliebig annehmen*): vier Constante. Für B_1^- ist dann schon der erste Eckpunkt gegeben; indem wir B_1^- beliebig durch ihn hindurchlegen und auf B_1^- den zweiten Eckpunkt annehmen, verfügen wir über weitere zwei Constante. Der Kreis A_1^- ist dann, weil er durch den zweiten Eckpunkt auf B_1^- hindurchmuss, bis auf eine Constante bestimmt. Mit ihm zusammen ist dann aber auch die Substitution S_1^{-1}, durch welche A_1^- aus A_1^+ hervorgeht, fixirt. Denn wir wissen, dass sie zwei Kreise (A_1^+ und A_1^-) und insbesondere deren Schnittpunkte mit B_1^- in einander überführen muss. Vermöge S_1^{-1} erfahren wir sodann die Lage des zweiten auf A_1^- gelegenen Eckpunktes. Durch diesen muss nun B_1^+ hindurchlaufen, was abermals eine Willkürlichkeit frei lässt. Haben wir über sie verfügt, so kennen wir wieder die zugehörige Substitution (T_1) und aus ihr die Lage des zweiten Eckpunktes auf B_1^+. *Das erste Quadrupel mit seinen Endpunkten hängt also im Ganzen von 8 Constanten ab.*

Bei jedem weiteren Quadrupel A_i^+, B_i^-, A_i^-, B_i^+ ist diese Zahl nur 6. Denn der Anfangspunkt der ersten Seite, der beim ersten Quadrupel willkürlich war, ist bei den folgenden Quadrupeln durch den Endpunkt des jeweils vorangehenden Quadrupels mitgegeben. *So hängen also die p Quadrupel zusammen von $6p + 2$ Constanten ab.*

Durch den letzten Eckpunkt des letzten Quadrupels legen wir jetzt beliebig den Kreis A_1^+ (1 Const.) und nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt ebenfalls beliebig an (wieder 1 Const.). Dann ist A_1^- vollkommen bestimmt, weil er, durch den letzteren Punkt hin-

*) Es wird also selbstverständlich daran festgehalten, dass alle Begrenzungskreise auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.

durchgehend, mit Λ_1^+ den Winkel $\frac{2\pi}{l_1}$ bilden soll. Ebenso ist die Substitution U_1 und also auch der zweite Eckpunkt auf Λ_1^- festgelegt. Durch letzteren Punkt hindurch construiren wir jetzt Λ_2^+, nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt an, etc. etc. *Die n Paare Λ_k^+, Λ_k^- liefern zusammen, wie man sieht, 2n Constante.*

Von den so aufgezählten $6p + 2n + 2$ Constanten gehen nun noch 3 verloren, weil unser Bereich erstens ein geschlossener sein muss, also der erste Eckpunkt des ersten Quadrupels mit dem letzten Eckpunkte auf Λ_n^- coincidiren muss (zwei Bedingungen) und überdiess als Winkelsumme der $(4p + n)$ Ecken erster Art 2π aufweisen soll (eine Bedingung).

Unser Fundamentalbereich hängt also, bei gegebenem Hauptkreise, definitiv von $6p + 2n - 1$ willkürlichen Constanten ab.

Aber diese Constanten sind nicht ohne Weiteres Bestimmungsstücke der η-Function. Wir müssen nämlich beachten, dass wir die Riemann'sche Fläche (p, n, l_k) bei vorgegebener η-Function noch in sehr verschiedener Weise kanonisch zerschneiden und also durch einen kanonischen Fundamentalbereich ersetzen können. Die hierin liegende Willkürlichkeit ist eine doppelte. Einmal können wir jenen Punkt O, den wir bei Construction des Schnittsystems auf der Fläche zu Grunde legten, beliebig wandern lassen. Dann aber können wir die Art und Reihenfolge der zugehörigen Querschnitte A_i, B_i, L_k in hohem Maasse abändern. Den ersteren Umstand müssen wir (da wir hier durchaus *reelle* Bestimmungsstücke abzählen) mit zwei Einheiten in Rechnung stellen. Der zweite Umstand dagegen bringt eine Reduction der Constantenzahl nicht mit sich. Denn die Anzahl der bei ihm zu unterscheidenden Möglichkeiten ist nur eine discrete. Wir wollen sogar für die Folge festsetzen (sofern nicht ausdrücklich das Gegentheil stipulirt wird), *dass wir diesen zweiten Umstand ganz ausser Acht lassen wollen.* Es kommt diess darauf hinaus, dass wir jede η-Function so oft zählen, als die zugehörige Riemann'sche Fläche in kanonischer Weise zerschnitten werden kann, oder auch — da durch die Zerschneidung jene Substitutionen S_i, T_i, U_k erst fixirt werden, aus denen sich die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen zusammensetzt — so oft zählen, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen aus Operationen S_i, T_i, U_k zusammengesetzt werden kann.

Jedenfalls haben wir: *Die einzelne η-Function (p, n, l_k) hängt bei gegebenem Hauptkreise von $6p + 2n - 3$ reellen Bestimmungsstücken ab.*

Es bieten sich aber auch sofort diejenigen Grössen dar, welche wir zweckmässigerweise als Bestimmungsstücke einführen. Wir wollen der Einfachheit halber den Hauptkreis mit der Axe der reellen Zahlen zusammenfallen lassen. Dann hängt jede Substitution S_i oder T_i von drei, jede U_k (insofern sie eine primitive elliptische Substitution von der Periode l_k vorstellt) von zwei reellen und independenten Constanten ab. *Aber zwischen der S_i, T_i, U_k besteht unsere Fundamentalrelation.* Ich will annehmen, dass $p > 0$ sei*). So schreiben wir die Fundamentalrelation, indem wir einige Factoren von links nach rechts hinübersetzen, in der Art, dass etwa S_1 (oder T_1) beiderseits in der positiven ersten Potenz auftritt. Die Fundamentalrelation liefert uns dann drei lineare Gleichungen zur Bestimmung von S_1 (resp. T_1). *Daher können wir geradezu* (im Anschluss an die eben getroffene Festsetzung) *die $6p + 2n - 3$ Substitutionscoefficienten der erzeugenden Substitutionen T_1 (oder S_1), S_2, T_2, $\cdots$, S_p, T_p, U_1, U_2, $\cdots$, U_n als die willkürlichen Bestimmungsstücke der η-Function betrachten.* — Willkürlich sind die Bestimmungsstücke insofern, als sie *innerhalb gewisser Ungleichungen* sich beliebig ändern können. Diese Ungleichungen, deren arithmetische Fixirung hier unerledigt bleibt, finden ihr geometrisches Aequivalent in der Forderung, dass zu den angenommenen S_i, T_i, U_k jedesmal ein zugehöriger kanonischer Fundamentalbereich soll construirt werden können.

Wesentlich sind übrigens von den genannten $6p + 2n - 3$ Constanten nur $6p + 2n - 6$.

Denn wir werden weiterhin alle solche η-Functionen im Wesentlichen als identisch betrachten, welche linear von einander abhängen. Nun verlegten wir bereits den Hauptkreis der η-Functionen in die Axe der reellen Zahlen. Aber diese selbst geht noch durch dreifach unendlich viele Transformationen in sich über. Indem wir dieselben zu Hülfe nehmen, können wir z. B. bestimmen, dass von den Fundamentalpunkten unserer erzeugenden Substitutionen bestimmte drei in 0, 1, ∞ fallen sollen. Dadurch kommen dann in der That von den früher aufgezählten (reellen) Constanten drei weitere noch in Abzug. Die übrigen $6p + 2n - 6$ bleiben in dem erwähnten Sinne unabhängig.

§ 15.

Die Variation der Constanten, an einem Beispiele erläutert.

Die Constanten, welche wir soeben zur Bestimmung der η-Function einführten, sind ihrer Bedeutung nach zuvörderst wesentlich *reelle* Grössen. Aber es liegt nahe, zu fragen, was die Bedeutung sein mag, wenn wir ihnen gestatten, *complexe* Werthe anzunehmen. Wird der Gruppe, die aus den S_i, T_i, U_k durch Combination entsteht, auch

*) Den Fall $p = 0$, der auch nicht schwer zu behandeln ist, übergehe ich der Kürze wegen.

dann noch eine brauchbare Gebietseintheilung entsprechen? Wir finden, dass diess in der That der Fall ist, so lange die Umänderung der Constanten nicht sehr beträchtlich ist. *Es tritt nur an die Stelle des früheren Hauptkreises eine andere, nicht analytische, Begrenzungslinie und die hyperbolischen Substitutionen der Gruppe sind, allgemein zu reden, in loxodromische übergegangen.*

Um diese etwas unbestimmt gefasste Aussage zu verstehen, betrachten wir ein möglichst einfaches Beispiel. Ich wähle hierzu diejenige symmetrische Gruppe, welche aus einem Kreisbogenpolygone, dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind, durch fortgesetzte Spiegelung entsteht. Sind sämmtliche Begrenzungskreise des Polygons gegen einen Hauptkreis senkrecht, so entsteht bei diesem Spiegelungsverfahren gewiss eine brauchbare Gebietseintheilung, wie diess oben (§ 8) in allgemeinerer Fassung schon bemerkt wurde. Der Hauptkreis, welcher seinerseits bei allen Spiegelungen invariant bleibt, giebt dabei die natürliche Grenze der fortgesetzten Reproductionen ab. Es mag dieser Fall durch das Kreisbogensechseck der Figur 11 auf Tafel 2 erläutert sein. Ich habe dabei, um den Vergleich mit den folgenden Fällen zu erleichtern, die Begrenzungskreise über den Hauptkreis hinaus vollständig ausgezogen.

Wir modificiren jetzt (um bei dem Beispiele der Figur zu bleiben) unser Kreisbogensechseck, zunächst etwa in der Art, wie Figur 12 angiebt. Die Begrenzungskreise haben jetzt keineswegs mehr einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Aber die Figur ist der früheren doch dadurch noch ähnlich, dass nicht auf einander folgende Begrenzungskreise sich überhaupt nicht treffen. *Hieraus folgt unmittelbar, dass die Reproductionen unseres Polygons, wie in dem früheren Falle einen einfach zusammenhängenden (aber allerdings nicht kreisförmigen) Bereich bedecken, der nirgendwo über sich selbst hinübergreift.* Denn so oft wir an einem der Begrenzungskreise des ursprünglichen Sechsecks oder irgend eines der aus ihm abgeleiteten spiegeln, das Spiegelbild nicht nur der angrenzenden Sechsecks sondern auch aller übrigen Begrenzungskreise fällt in das Innere des spiegelnden Kreises hinein und collidirt also weder mit dem angrenzenden Sechseck, noch mit irgend einem früheren, das wir bereits durch anderweitige Spiegelung construirt haben mögen. — Was die natürliche Grenze angeht, der diese fortgesetzten Reproductionen zustreben, so können wir beliebig viele Punkte derselben construiren: die Berührungspunkte nämlich auf einander folgender Begrenzungskreise irgend eines an der Figur betheiligten Sechsecks. Diese Grenze ist natürlich in keiner Weise mehr eine *analytische* Curve.

Wie aber, wenn wir das Sechseck weiter deformiren und also den Begrenzungskreisen gestatten, zum Theil übereinanderzugreifen?

Unmittelbar auf einander folgende Sechsecke werden sich auch dann noch lückenlos neben einander legen und die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemann'sche Fläche wird nach wie vor eine *unverzweigte* Function jener Variabelen η sein, in deren Ebene wir unsere Sechsecke construiren. *Aber sie wird, von besonderen Fällen abgesehen, keineswegs mehr eine eindeutige Function sein.* Man versuche etwa, sich die Gesammtheit der Reproductionen des Sechsecks in Figur 13 vorzustellen. — Ein noch frappanteres (aber weniger übersichtliches) Beispiel würde man erhalten, wenn man dem ursprünglichen Sechsecke selbst bereits eine solche Gestalt ertheilt hätte, dass es für sich genommen einen Theil der Ebene doppelt überdeckt.

In derselben Weise nun, wie hier im Beispiele, müssen wir uns die Sache allgemein denken. Indem wir die Constanten einer η-Function p, n, l_k, unter Festhaltung dieser Signatur, complex lassen werden, behalten wir fürs Erste noch eine brauchbare Gebietseintheilung. Es greifen nur die fortgesetzten Reproductionen des ursprünglichen Fundamentalbereichs, sozusagen, über den Hauptkreis hinaus oder bleiben, an anderen Stellen, hinter ihm zurück: die natürliche Grenze aber, der sie zustreben, ist zuvörderst noch eine einheitliche Contour, welche sich selbst nicht schneidet.

Auf eine genauere Untersuchung der Ungleichungen, denen unsere complexen Constanten genügen müssen, damit die natürliche Grenze den angegebenen Charakter behält, gehe ich an dieser Stelle nicht ein*). Es muss genügen, die allgemeine Möglichkeit gewisser η-Functionen bezeichnet zu haben. Wir sehen, dass es bei gegebenen p, n, l_k eine unendliche Anzahl brauchbarer Gebietseintheilungen sozusagen von demselben *Typus* giebt; unter ihnen bilden die Gruppen mit Hauptkreis, die wir seither allein betrachteten, wie ich fortan sagen will, den *Normalfall.* Offenbar sind unter den eindeutig umkehrbaren η-Functionen derselben Signatur p, n, l_k die hier in Betracht gezogenen dadurch charakterisirt, dass ihnen nicht nur ein *einfach zusammenhängender* Fundamentalbereich eignet, sondern dass auch von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche ein *einfach*

*) Was die explicite Formulirung derartiger Ungleichungen betrifft, so möchte ich hier auf die schon oben genannten Untersuchungen von Herrn Bausenberger im 20ten und 21ten Bande der Annalen verweisen. Uebrigens subsumiren sich seine Gruppen weder sämmtlich unter die hier im Texte betrachteten noch auch unter die anderen, welche im folgenden Paragraphen durch Ineinanderschiebung hergestellt werden. Man kann seine Ausgangsgruppen alle dadurch erhalten, dass man ein Kreisbogendreieck mit *reellen* oder beliebig *imaginären* Winkeln durch Spiegelung vervielfältigt (wobei die reellen Winkel natürlich ganzzahlige Theile von π sein müssen). Hernach dürfen die reellen Constanten, welche zur Fixirung der imaginären Winkel dienen, ins Complexe hinein variirt werden.

zusammenhängendes Flächenstück überdeckt wird. Dem entspricht, dass zwischen ihren erzeugenden Substitutionen S_i, T_i, U_k keine anderen Relationen existiren und überhaupt für sie ganz ähnliche Betrachtungen gelten, wie wir sie in § 12 für die Gruppen mit Hauptkreis dargelegt haben.

Wollen wir andere eindeutig umkehrbare η-Functionen finden, so müssen wir also dafür sorgen, dass entweder bereits der ursprüngliche Fundamentalbereich in der η-Ebene einen mehrfachen Zusammenhang hat, oder doch, dass ein mehrfacher Zusammenhang bei den Reproductionen desselben resultirt. Ich erläutere im folgenden Paragraphen einen Process, der uns mit unendlich vielen neuen η-Functionen der ersteren Art versieht. Es sind diess die allgemeinsten η-Functionen, mit denen ich mich im vorliegenden Aufsatze beschäftigen will, und mit ihrer Besprechung (§ 16—18) schliesst daher der gegenwärtige Abschnitt.

§ 16.

Der Process der Ineinanderschiebung.

Neben den Gruppen des vorangehenden Paragraphen, denen wir alle diejenigen zuzählen wollen, die wir in § 6 besprochen haben, kennen wir von früher her noch jene einfachen discontinuirlichen Gruppen, welche durch Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution erzeugt werden. Ist diese Substitution *elliptisch* oder *parabolisch*, so ist der Fundamentalbereich eine Sichel, hat also ebenfalls den Zusammenhang Eins. Dagegen wird der Fundamentalbereich ringförmig und somit zweifach zusammenhängend, wenn die Substitution *hyperbolisch* oder *loxodromisch* ist.

Es giebt nun einen allgemeinen Process, vermöge dessen wir aus irgendwie vorgegebenen brauchbaren Gruppen andere, gleichfalls brauchbare zusammensetzen können, deren Fundamentalbereich einen beliebig hohen Zusammenhang aufweist. *Man grenze nämlich ein Stück der η-Ebene durch mehrere solche Contouren ab, wie sie, einzeln genommen, vermöge der Substitutionen der vorgegebenen Gruppen, als Begrenzung zugehöriger Fundamentalbereiche auftreten können. Combinirt man dann die auf die verschiedenen Contouren bezüglichen erzeugenden Substitutionen, so entsteht von selbst eine brauchbare Gebietseintheilung, deren erster Fundamentalbereich jenes abgegrenzte Stück ist.*

Ich bezeichne dieses Verfahren als *Ineinanderschiebung,* und erläutere dasselbe zunächst an einigen Beispielen*).

Wir betrachten zuvörderst etwa (Figur 14) einen solchen Theil

*) Eben hier kommt die Anschauungsweise zur Geltung, welche durch die Figuren 2, 3, 5, 6, 10 entwickelt werden sollte.

der η-Ebene, welcher durch zwei Kreispaare: R_1', R_1'' und R_2', R_2'', begrenzt ist. Die Kreise R_1' und R_1'', sowie R_2' und R_2'' (die in der Figur durch Pfeile verbunden sind) ordnen wir je durch eine hyperbolische oder loxodromische Substitution, S_1 bez. S_2 zusammen, so zwar, dass unser Gebiet ein gemeinsames Stück der beiden ringförmigen, auf letztere Substitutionen bezüglichen Fundamentalbereiche ist. Dann finden die Gebiete $S_1^{\pm\alpha}$, $S_2^{\pm\beta}$, welche wir aus dem vorgegebenen Bereiche durch positive oder negative Anwendung der einzelnen erzeugenden Substitution ableiten können, gewiss lückenlos neben einander Platz: die ersteren sind den aufeinanderfolgenden Werthen von α entsprechend alle in R_1', bez. R_1'' eingeschlossen, die anderen in R_2', bez. R_2'', je nach den Werthen von $\pm\beta$. *Aber jedes dieser neuen Gebiete trägt in seinem Inneren wieder zwei kreisförmige Oeffnungen.* Und in diese Oeffnungen hinein legen sich, wiederum in lückenloser Aufeinanderfolge, die Gebiete $S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$, bez. $S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$; die ersteren sind jeweils in ein bestimmtes $S_2^{\pm\beta}$, die anderen in ein bestimmtes $S_1^{\pm\alpha}$ eingeschlossen. *Innerhalb der so gewonnenen Gebiete finden nun wieder die neuen* $S_2^{\pm\beta'} S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$ *resp.* $S_1^{\pm\alpha'} S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$ *Platz.* Und so geht der Process fort in's Unendliche. Eine Collision kann niemals eintreten, weil die neu construirten Bereiche immer solche Theile der η-Ebene überdecken, welche bis dahin noch nicht benutzt waren. Daher erzielen wir eine in der That brauchbare Gebietseintheilung. Alle Substitutionen der zugehörigen Gruppe sind loxodromisch (oder hyperbolisch) und die unendlich vielen, übrigens zerstreut liegenden Fundamentalpunkte dieser Substitutionen sind es, welche als natürliche Grenze des von den Fundamentalbereichen überdeckten Gesammtgebietes zu gelten haben.

Nicht anders ist die Sache, wenn wir als Ausgangsbereich z. B. denjenigen Raum nehmen, der nach Art von Figur 15 zwei *Sicheln* gemeinsam ist. Die eine mag die Winkelöffnung $\frac{2\pi}{m}$, die andere die Oeffnung $\frac{2\pi}{n}$ besitzen, unter m, n ganze Zahlen verstanden; die zugehörigen Substitutionen, welche in der Figur durch Pfeile angedeutet sind, mögen Σ_1, Σ_2 heissen. Wir verfahren dann genau so, wie eben mit den S_1, S_2. Nur haben wir jetzt die Relationen $\Sigma_1^m = 1$, $\Sigma_2^n = 1$ und können dementsprechend die Exponenten $\pm\alpha$, $\pm\beta$ auf den Spielraum von 0 bis $(m-1)$, resp. von 0 bis $(n-1)$ beschränken. Es ist wohl kaum nöthig, den ganzen Process hier noch einmal geometrisch zu schildern. In gewissen Eckpunkten laufen nun jedesmal m Sicheln, in anderen n zusammen. Die zugehörige Gruppe enthält jetzt unendlich viele elliptische Substitutionen, aber keine anderen als diejenigen, die sich in der Gestalt $\pi\Sigma_1^\alpha\pi^{-1}$, oder $\pi\Sigma_2^\beta\pi^{-1}$ darstellen. Die natürliche Grenze für die Gesammtheit der Fundamentalbereiche wird wiederum von den Fundamentalpunkten derjenigen hyperbolischen oder loxodromischen Substitutionen gebildet, die an der Gruppe participiren. —

Nehmen wir endlich an (wobei ich keine nähere Specification eintreten lassen will), dass irgend eine Gruppe mit reellem Hauptkreis bei dem Ineinanderschiebungsprocesse betheiligt sei*). So wird auch dieser Kreis selbst bei den fortgesetzten Reproductionen des ursprünglichen Fundamentalbereiches unendlich oft vervielfältigt werden. Das Gebiet also, welches von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche überdeckt wird, zählt unter den Bestandtheilen seiner natürlichen Grenze neben anderen hier nicht näher bezeichneten Stücken jedenfalls unendlich viele Kreislinien. —

Diese Beispiele werden genügen, um den Begriff der Ineinanderschiebung beliebiger Theilgruppen geläufig zu machen. Wir wenden denselben nunmehr auf beliebige Zusammenstellungen der eben aufgezählten uns bekannten Gruppen an. Dabei lassen wir, in Uebereinstimmung mit früheren Festsetzungen, nur *die* Beschränkung eintreten, dass immer bloss eine *endliche* Zahl von Theilgruppen combinirt werden soll. Die neu entstehenden Gruppen, resp. Gebietseintheilungen, ordnen wir nach *Typen*, indem wir alle solche Gruppen zu demselben Typus rechnen, deren einzelne Theilgruppen resp. demselben Typus angehören. Innerhalb des einzelnen Typus bilden diejenigen Gruppen den *Normalfall*, welche, neben beliebig vielen isolirten Substitutionen, nur Theilgruppen mit Hauptkreis enthalten.

Es gilt jetzt, die Riemann'sche Fläche zu charakterisiren, welche der einzelnen so erzeugten discontinuirlichen Gruppe entspricht, und zugleich anzugeben, wie sich auf ihr unser η, als complexe Function des Ortes aufgefasst, verhält.

§ 17.

Die neue η-Function auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche.

Ich will annehmen, dass folgende Gruppen durch Ineinanderschiebung vereinigt wurden: zunächst q Gruppen, welche aus einer einzelnen elliptischen oder parabolischen Substitution, dann ferner r Gruppen, welche aus einer einzelnen hyperbolischen oder loxodromischen Substitution durch Wiederholung erwachsen, endlich aber s Gruppen vom Hauptkreistypus, die also entweder selbst einen Hauptkreis besitzen oder aus einer Gruppe mit Hauptkreis durch Variation der Constanten abgeleitet wurden. Die einzelne Gruppe unter den

*) Vielleicht ist es nützlich, auch solche Beispiele durchzudenken, wo der Hauptkreis imaginär oder in einen Punkt ausgeartet ist.

letztgenannten mag die Signatur π, ν besitzen (wo ich also die früheren lateinischen Buchstaben durch griechische ersetzt und der Kürze halber die Indices der einzelnen Verzweigungspunkte fortgelassen habe). Dann ist der Fundamentalbereich in der η-Ebene von $q + 2r + s$ verschiedenen Curven begrenzt. Jede Curve der ersten Art besteht aus zwei Stücken Q', Q'', welche, für sich genommen, eine Sichel von einer gewissen Winkelöffnung begrenzen*). Die $2r$ Curven zweiter Art gehören paarweise als R' und R'' vermöge der betreffenden hyperbolischen oder loxodromischen Substitution zusammen (vergl. noch einmal Fig. 14). Endlich die s Curven der letzten Art bestehen nach dem in § 10. geschilderten Schema aus $4\pi + 2\nu$ paarweise zusammengehörigen Stücken, die wir kurzweg wieder mit $\mathsf{A}_i\pm$, $\mathsf{B}_i\pm$, $\Lambda_k\pm$ bezeichnen mögen. — Den so definirten Fundamentalbereich denken wir uns nun durch eine äquivalente Riemann'sche Fläche ersetzt. So entspricht dem Linienpaare Q', Q'' je ein *Einschnitt* Q, der von einem beliebigen Punkte der Fläche beginnend zu einem anderen hinläuft: die beiden Endpunkte des einzelnen Einschnittes sind Verzweigungspunkte unserer η-Function. Den zusammengehörigen R', R'' dagegen correspondiren gewisse r auf der Fläche verlaufende und dieselbe nicht zerstückende *Rückkehrschnitte* R. Endlich jeder der weiteren Begrenzungscurven (π, ν) entspricht ein ganzes auf der Fläche befindliches *Schnittsystem*, welches in der früher beschriebenen Art einmal aus 2π Querschnitten A_i, B_i besteht, die von einem gewissen Punkte O auslaufend später in denselben wieder einmünden, dann aber aus ν Einschnitten, die von demselben Punkte O aus sich nach ν Verzweigungspunkten der η-Function hinziehen. *Hiernach haben wir, unter n die Gesammtzahl der Verzweigungspunkte unserer η-Function verstanden, sofort die folgende erste Formel:*

$$n = 2q + \sum \nu.$$

Des Ferneren berechnen wir [nach § 4. des ersten Abschnitts] das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche folgendermassen. Unser Fundamentalbereich hat als schlichtes Stück der Ebene eine Grundzahl, welche der Anzahl $q + 2r + s$ der Begrenzungscurven gleichkommt. Aber die Grundzahl unserer Riemann'schen Fläche, die wir gleich $2p$ setzen, wird durch jeden Einschnitt Q um eine Einheit vermehrt und durch jedes Schnittsystem (π, ν) um ($2\pi - 1$) vermindert. Die Rückkehrschnitte R sind auf die Grundzahl ohne Einfluss. *Daher folgt:*

$$2p = (q + 2r + s) - q + \sum_{1}^{s} (2\pi - 1),$$

*) Ich nenne diese Stücke Q', Q'' nicht ausdrücklich *Kreisbogen*, weil es mit Rücksicht auf die anderen Begrenzungsstücke bequem sein kann, ihnen eine andere Form zu ertheilen. Aehnliche Bewandtniss hat es mit der R', R'' etc.

oder kürzer geschrieben:

$$p = r + \sum_1^s \pi.$$

Wir fragen nun billig, wodurch sich die neue η-Function (p, n) von den früheren mit der gleichen Signatur unterscheidet. In dieser Hinsicht betonten wir schon oben, dass jetzt der Fundamentalbereich in der η-Ebene *mehrfach* zusammenhängend ist, während er es früher nicht war. *In Folge dessen giebt es jetzt auf der Riemann'schen Fläche* p, n *gewisse geschlossene, sich selbst nicht schneidende Wege, die sich nicht auf einen einzelnen Punkt zusammenziehen lassen und bei deren Durchlaufung sich* η *trotzdem identisch reproducirt.* Als solche Wege finden wir zunächst diejenigen, die um einen einzelnen Einschnitt Q herumlaufen, dann ferner die Rückkehrschnitte R selbst, endlich diejenigen Curven, welche das einzelne Schnittsystem (π, ν) umgeben. Von diesen Curven kann übrigens noch eine weggelassen werden. Denn eine Durchlaufung aller der genannten Curven hintereinander ist offenbar auf der Fläche mit der Umkreisung eines einzelnen Punktes äquivalent. *Diesem Verhalten entsprechend haben wir jetzt nur* $q + r + \sum_1^s (2\pi + \nu)$ *erzeugende Substitutionen und zwischen ihnen* s *Relationen vom Typus der früheren Fundamentalrelation.* Denn für die erzeugenden Substitutionen jeder Theilgruppe (π, ν) ergiebt sich jetzt eine solche Beziehung, indem wir den zugehörigen Punkt O auf der Riemann'schen Fläche umkreisen. Hierzu treten dann noch die weiteren Relationen, welche die Periodicität gewisser elliptischer Substitutionen aussagen.

Wir präcisiren zugleich den Unterschied, der zwischen den hier erzeugten η-Functionen und den allgemeinsten von derselben Signatur, die eindeutige Umkehrung gestatten, bestehen wird. Dieser Unterschied wurde schon in § 15. angedeutet. Unsere neuen η-Functionen haben Fundamentalbereiche von beliebig hohem Zusammenhange, aber es entstehen keine neuen Zusammenhänge, wenn wir den Fundamentalbereich vervielfältigen. Es kommt diess darauf hinaus, dass unter den Substitutionen der zugehörigen Gruppe keine anderen elliptisch oder parabolisch sind, als diejenigen, denen auf unserer Riemann'schen Fläche eine Umkreisung des einzelnen Verzweigungspunktes entspricht, und dass überhaupt für sie keine anderen Relationen statt haben, als die soeben angegebenen. [Man zeigt diess ganz ähnlich, wie es betreffs der η-Function mit Hauptkreis in § 12. geschehen ist]. Für die allgemeinsten eindeutig umkehrbaren η-Functionen müssen wir aber eine solche Möglichkeit offenhalten. Inzwischen gehen wir auf genauere Untersuchung in der hiermit angedeuteten Richtung an dieser Stelle nicht ein.

§ 18.

Constantenzahl des jeweiligen Normalfalles.

Wir bestimmen zum Schlusse noch, wie gross die Anzahl der Constanten ist, von denen die neue η-Function (p, n) im Normalfalle abhängt. Im genauen Anschlusse an die Entwickelungen des § 14. wollen wir dabei jede η-Function so oft zählen, als die zugehörige Riemann'sche Fläche (p, n) in verschiedener Weise den Vorstellungen des § 15. entsprechend zerschnitten werden kann. *Wir betrachten also geradezu als Bestimmungsstücke der η-Function diejenigen Coefficienten der zugehörigen erzeugenden Substitutionen, welche unabhängig bleiben, nachdem wir die zwischen den Substitutionen bestehenden Relationen identisch erfüllt haben.*

Für die einzelne Gruppe mit Hauptkreis fanden wir in § 14., unter (π, ν) die Signatur der Gruppe verstanden und übrigens unter der Voraussetzung, dass der Hauptkreis mit der Axe der reellen Zahlen coincidire, $6\pi + 2\nu - 3$ reelle Bestimmungsstücke. Diesen haben wir jetzt 3 weitere hinzuzufügen, da wir dem einzelnen Hauptkreise zuvörderst eine beliebige Lage ertheilen müssen. So kommen auf Rechnung der verschiedenen Gruppen mit Hauptkreis, die wir dem Ineinanderschiebungsprocesse unterworfen haben, $6\Sigma\pi + 2\Sigma\nu$ reelle Constante. Die q elliptischen (oder parabolischen) Substitutionen, welche beim Ineinanderschiebungsprocesse betheiligt sind, bringen ihrerseits $2q$, die r loxodromischen Substitutionen $3r$ Constante, aber *complexe* Constante mit sich. Da wir übrigens durchaus reelle Bestimmungsstücke zählen, werden wir beide zusammen als $(4q + 6r)$ in Rechnung stellen. Nun ist, dem vorigen Paragraphen zufolge, $(r + \Sigma\pi) = p$ und $(2q + \Sigma\nu) = n$. Daher haben wir im Ganzen $6p + 2n$ Constante. Aber von ihnen werden wir noch 6 Einheiten als unwesentlich in Abzug bringen, indem wir nämlich, wie in § 14., alle derartige η-Functionen als identisch erachten, welche linear von einander abhängen, jetzt aber die in $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ enthaltenen Constanten als complex betrachten müssen. Daher haben wir schliesslich:

Die Anzahl der reellen Constanten, von denen eine Normalgruppe (p, n) abhängt, ist, unabhängig von dem Typus, welchem die Gruppe angehören mag, gleich $(6p + 2n - 6)$.

Diese Constanten müssen natürlich wieder gewissen Ungleichungen genügen. Zu den Ungleichungen, welche wir oben bei der einzelnen Gruppe mit Hauptkreis andeuteten, treten hier weitere, von denen die einen aussagen, dass gewisse einzelne Substitutionen loxodromisch (oder hyperbolisch) sind, während sich die anderen auf die gegenseitige Stellung der Theilgruppen beziehen, die nothwendig ist, damit der

Process der Ineinanderschiebung Platz greifen kann. Auf eine nähere Discussion dieser Ungleichungen gehe ich aber hier ebenso wenig ein, als es früher bei den analogen Fragen geschehen ist.

Abschnitt IV.

Das Fundamentaltheorem.

§ 1.

Formulirung desselben.

Das allgemeine Theorem, welches ich nunmehr aussprechen werde und das ich wegen seiner Wichtigkeit (die im folgenden Abschnitte noch ausführlicher erläutert werden soll) das *Fundamentaltheorem* nenne, wird durch die eben bestimmte Zahl reeller Constanten: $(6p+2n-6)$ nahe gelegt. Es ist diess genau dieselbe Anzahl reeller Constanten, von der eine beliebige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes p mit n nach Willkür auf ihr angenommenen Punkten abhängt; man hat sich nur zu erinnern, dass die $3p-3$ *Moduln*, welche man, der gewöhnlichen Sprechweise nach, der Fläche beilegt, allgemein zu reden, complexe Grössen sind*). Die Frage ist, auf welchen Riemann'schen Flächen des Geschlechtes p mit n vorgegebenen Verzweigungspunkten von bestimmtem Index Normalfunctionen**) η von einem gewissen Typus existiren mögen. Der Typus wird festgelegt, indem wir auf unserer Fläche gewisse Paare von Verzweigungspunkten durch Einschnitte Q verbinden, dann irgendwelche, die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte R hinzufügen und endlich soviele Schnittsysteme (π, ν) construiren, dass die zerschnittene Fläche durchaus schlicht auf ein Stück der Ebene übertragen werden kann. Functionen η, welche linear von einander abhängen, will ich der Kürze halber wieder als identisch betrachten. Dann besagt unser Fundamentaltheorem:

Dass auf jeder Riemann'schen Fläche (p, n, l_k) *immer eine und nur eine Normalfunction von beliebig vorgegebenem Typus existirt.*

Zwei Specialfälle dieses Theorems mögen als besonders wichtig gleich hier hervorgehoben werden.

Der erste Fall sei derjenige, in welchem die Einschnitte Q und die Rückkehrschnitte R überhaupt in Wegfall kommen, die Schnittsysteme (π, ν) aber sich auf ein einziges reduciren, welches mit (p, n) zu bezeichnen sein wird. Dann ist also das zugehörige η eine Func-

*) Der leichteren Ausdrucksweise wegen schliesse ich im Texte wieder die einfachsten Fälle $p=0, 1$ aus.

**) Befindet sich η, wie ich früher sagte, im Normalfall, so nenne ich es hier kurz eine Normalfunction.

tion mit festem Hauptkreis. Zugleich können wir von der speciellen Art der Zerschneidung hier durchaus absehen. Denn eine Umänderung des Schnittsystems bedeutet im vorliegenden Falle nur, dass die erzeugenden Substitutionen jener Gruppe, die zu η gehört, in anderer und anderer Weise gewählt werden, nicht aber, dass η selbst modificirt wird. Daher will ich ein solches η an dieser Stelle als *Hauptfunction* bezeichnen, übrigens im Folgenden durch einen Index 1 (η_1) kenntlich machen. Wir haben:

Auf jeder Riemann'schen Fläche (p, n, l_k) *giebt es eine und nur eine Hauptfunction.*

Es ist diess derjenige Specialfall des vorhin ausgesprochenen, allgemeinen Fundamentaltheorems, den ich in meiner zweiten Note über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich (Bd. XX dieser Annalen, pag. 49—51, dat. 27. 3. 82) mitgetheilt habe. Allerdings wurden dort der Einfachheit halber alle Indices l_k unendlich gesetzt und also nur von logarithmischen Verzweigungspunkten gesprochen. Dass die Indices der Verzweigungspunkte irgend welche sein können, hat Hr. Poincaré in seiner bezüglichen Note vom 10. April 1882 (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 94) hervorgehoben. In dem besonderen Falle $p = 0$ hatte Hr. Poincaré die Existenz der Hauptfunction schon vor längerer Zeit erkannt, man sehe die aufeinanderfolgenden und immer allgemeiner werdenden Angaben vom 18. April und 8. August 1881 (Comptes Rendus t. 92, 93) sowie in Nr. 10 seines Annalenaufsatzes (Bd. XIX, pag. 561, dat. 17. Dec. 1881).

Der zweite Specialfall unseres Fundamentaltheorems, der hier zur Sprache gebracht werden soll, ist derjenige, in welchem die Theilgruppen mit Hauptkreis überhaupt in Wegfall kommen, also, auf der Riemann'schen Fläche, nur die Einschnitte Q und im Ganzen p Rückkehrschnitte R vorhanden sind. Unser Satz behauptet:

Dass es allemal eine auf der so zerschnittenen Fläche eindeutige, eindeutig umkehrbare η-Function giebt, welche bei Ueberschreitung der Q elliptische Substitutionen von resp. vorgegebener Periode erleidet.

Diese Art von η-Function soll weiterhin mit η_2 bezeichnet werden. Auf ihre Existenz bezieht sich die erste der beiden von mir über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich veröffentlichten Noten (Annalen t. XIX, pag. 565—568, dat. 12. 1. 82). Ich habe dort nur, um die Sache etwas zu vereinfachen, jene Einschnitte Q, die wir auf der Riemann'schen Fläche beliebig construiren können, überhaupt weggelassen und also nur von irgend p auf der Fläche verlaufenden und dieselbe nicht zerstückenden Rückkehrschnitten gesprochen.

§ 2.

Ansatz zum Beweise.

Um für das hiermit formulirte Fundamentaltheorem wo nicht einen expliciten Beweis, so doch die allgemeinen Beweisgründe zu geben, verwende ich Vorstellungen der Mannigfaltigkeitslehre. Wir haben einerseits die Riemann'schen Flächen (p, n, l_k), die wir uns nach bestimmtem Typus zerschnitten denken. Sie bilden eine erste Mannigfaltigkeit M_1. Die Gestalt der einzelnen Querschnitte, sowie die Lage jener Punkte O, von denen aus sich die einzelnen Schnitte eines Systemes (π, ν) erstrecken werden, bringen wir bei dieser Auffassung nicht mit in Rechnung. Wohl aber zählen wir zwei Schnittsysteme auf derselben Fläche, auch wenn sie für die schliesslich in Betracht kommende η-Function äquivalent sein mögen, allemal dann als unterschiedene Individua von M_1, wenn sie sich nicht durch stetige Verschiebung über die Fläche hin zur Deckung bringen lassen. — Wir haben andererseits die Gesammtheit der zu dem betreffenden Typus gehörigen Normalfunctionen η, deren einzelne wir in Uebereinstimmung mit dem gerade Gesagten, und übrigens auch mit den früheren Festsetzungen, so oft zählen werden, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen in der früher geschilderten Weise aus erzeugenden Substitutionen zusammengesetzt werden kann. Die so gezählten η-Functionen bilden eine zweite Mannigfaltigkeit, M_2.

Die im vorigen Abschnitte gegebene Constantenzählung zeigt, dass M_1 und M_2 gleich viele Dimensionen haben (nämlich $6p - 6 + 2n$). Zudem sieht man mit leichter Ueberlegung, dass jede Mannigfaltigkeit, für sich genommen, ein einziges, zusammenhängendes Ganze bildet. Hinsichtlich der M_2 ist diess auf Grund der früheren Entwickelungen an sich klar. Denn wir können die einzelnen Theilgruppen, die, ineinandergeschoben, unsere Gruppe erzeugen, einzeln so variiren und übrigens in ihrer Stellung derart gegen einander verschieben, dass eine beliebige andere Gruppe desselben Typus resultirt. Hinsichtlich der M_1 aber beweist man es (wenn man es nicht als bekannt ansehen will) durch folgende Betrachtung der Analysis situs. Es soll möglich sein, jede Fläche (p, n) mit irgend vorgegebener Zerschneidung in jede andere desselben Typus derart continuirlich überzuführen, dass die zweierlei Zerschneidungen zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke ergänze man die auf den beiden Flächen vorgegebenen Schnittsysteme in der Weise durch weitere an correspondirenden Stellen eingeschaltete Schnitte, dass zwei einfach zusammenhängende Flächen entstehen, deren Randcurven in genau derselben Reihenfolge aus gewissen, paarweise zusammengehörigen Stücken bestehen. Diese beiden Flächen bilde man jetzt je auf eine Kreisfläche conform ab. Die Peripherie des einzelnen Kreises wird dann in eine Anzahl Stücke zerlegt erscheinen, die paarweise durch irgend ein analytisches Gesetz zusammengeordnet sind. Und zwar ist die Aufeinanderfolge der zusammengehörigen Stücke bei beiden Kreisen genau dieselbe. Wir denken uns jetzt, dass der einzelne Kreis (im Sinne der Entwickelungen des ersten, hier vorangehenden Abschnittes) vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Peripheriestücke die betreffende Riemann'sche Fläche (p, n) als Fundamentalbereich vertritt. Wir haben also nur zu zeigen, dass man, durch allmähliche Aenderung der Constanten, die eine Kreisfläche mitsammt der Zuordnung ihrer einzelnen Peripheriestücke in die andere Kreisfläche und deren Zuordnung überführen kann. Diess aber ist anschauungsmässig evident.

Auf Grund des hiermit Gesagten stellt sich unsere Aufgabe jetzt folgendermassen. Aus dem ersten Abschnitte des Früheren wissen wir, dass jedem Individuum in M_2 ein und nur ein Individuum in M_1 entspricht. *Es gilt zu zeigen, dass umgekehrt jedem Individuum von M_1 ein und nur ein Individuum in M_2 correspondirt.*

Hierzu entwickele ich im folgenden Paragraphen zuvörderst einen Hülfssatz, welcher zeigt, dass niemals *mehrere* Individua in M_2 ein und demselben Individuum in M_1 entsprechen können.

Sodann bringt § 4. die allgemeinen Continuitätsgründe, aus denen ich glaube, unser Fundamentaltheorem erschliessen zu können.

§ 3.

Hülfssatz, betreffend die Eindeutigkeit der Beziehung.

Ich werde jetzt, wie in Aussicht gestellt, zuvörderst nachweisen, *dass auf einer in bestimmter Weise zerschnittenen Fläche (p, n, l_k) immer nur eine zugehörige Normalfunction η existiren kann.* Was die Formulirung dieser Behauptung angeht, so erinnere ich an die frühere Verabredung, derzufolge zwei η-Functionen, welche linear von einander abhängen, schlechthin als identisch bezeichnet werden sollen.

Zum Beweise denke man sich die vorgegebene und in bestimmter Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche auf die Ebenen beider Variabeln η, η' (deren Existenz wir hier voraussetzen mögen) simultan abgebildet. Wir erhalten dann in den zweierlei Ebenen zwei erste Fundamentalbereiche, die ausnahmslos conform und zwar in der Weise auf einander bezogen sind, dass der analytischen Fortsetzung des einen, die durch geeignete lineare Substitution des η bewirkt wird, genau diejenige analytische Fortsetzung des anderen entspricht, welche vermöge der correspondirenden linearen Substitution des η' resultirt. Indem wir jetzt den Process der analytischen Fortsetzung, so wie er durch die erzeugenden linearen Substitutionen vermittelt wird, beiderseits in's Unbegrenzte verfolgen. werden immer ausgedehntere Theile der Ebene η auf die entsprechenden Theile der Ebene η' durchaus conform bezogen. Es kann dabei niemals eine Vieldeutigkeit entstehen. Denn da η und η' nach Voraussetzung demselben Typus angehören, so bestehen zwischen den erzeugenden Substitutionen der η-Gruppe und zwischen den entsprechenden Substitutionen der η'-Gruppe beziehentlich genau dieselben Relationen; es finden sich also auch in der η-Ebene zwischen den verschiedenen Fundamentalbereichen dieselben Zusammenhänge, wie in der η'-Ebene, und umgekehrt.

Nun bedeckt die Gesammtheit der in der einzelnen Ebene gelegenen Fundamentalbereiche ein gewisses Gebiet, welches einmal von unendlich vielen discreten Punkten, dann aber auch von unendlich vielen Kreislinien begrenzt sein kann. Ich sage jetzt, *dass die conforme Abbildung der beiden durch die unendlich vielen Fundamentalbereiche überdeckten Gebiete keinerlei unstetige Unterbrechung erleidet, wenn man in beide Gebiete jene isolirten Unstetigkeitspunkte und die genannten Kreisperipherieen mit aufnimmt*, — d. h. also, wenn man die beiden Gebiete nicht bloss mit *Ausschluss* der Begrenzungen (wie es zunächst gemeint ist), sondern mit *Einschluss* derselben in Betracht zieht. In der That scheint diess aus bekannten Sätzen über die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ zu folgen, wenn man noch hinzunimmt (was durch Nichteuklidische Betrachtungen bewiesen werden kann), dass die Gebiete, welche in der η- und der η'-Ebene durch die successiven Fundamentalbereiche überdeckt werden, *gleichmässig* ihren Begrenzungen zustreben.

Man nehme nun einen Augenblick die beiden Functionen η_1 und η_2 (die wir soeben, in § 1. des gegenwärtigen Abschnittes, auszeichneten) vorweg. *Für beide ist der in diesem Paragraphen zu erbringende Nachweis mit dem nun Gesagten bereits erledigt.* Bei η_1 nämlich haben wir es überhaupt nicht mit isolirten Grenzpunkten, sondern nur mit *einem* Hauptkreise zu thun. Daher ist eine volle Kreisfläche der η-Ebene auf eine ebensolche der η'-Ebene ausnahmslos conform abgebildet, und dies geschieht, wie man weiss, nothwendig durch *lineare* Beziehung. — Bei η_2 hinwieder haben wir nur isolirte Grenzpunkte und keinerlei Hauptkreis. Daher ist das Gebiet, welches von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche unter Hinzunahme der Grenzen überdeckt wird, mit der unbegrenzten Ebene identisch. Die vollen Ebenen η und η' sind daher ausnahmslos conform auf einander bezogen, und wir haben wieder zwischen η und η' auf Grund bekannter Sätze eine nothwendig *lineare* Beziehung. Das heisst aber beidemal mit Rücksicht auf die oben getroffene Verabredung, *dass η und η' im Wesentlichen identisch sind*, was zu beweisen war.

In den allgemeineren Fällen, wo unendlich viele Hauptkreise an der Begrenzung des Gebietes, sowohl der η- als der η'-Ebene, betheiligt sind, müssen wir noch einen Schritt weiter gehen. *Wir gebrauchen nämlich das Princip der Symmetrie in seiner gewöhnlichen, auf eine reelle Kreislinie bezüglichen Form* (siehe § 4 des Abschnitts II). Indem wir jedes der gesammten Gebiete an jedem seiner Begrenzungskreise spiegeln, wissen wir vermöge des erwähnten Princips, dass die so erhaltenen Spiegelbilder in Folge der ursprünglichen conformen Abbildung einander ebenfalls entsprechen. Jetzt fahren wir mit dem Spiegelungsprocesse, indem wir jeden neu erhaltenen Begrenzungskreis selbst wieder als Inversionskreis benutzen, ins Unendliche fort. So wird allmählich die ganze η-Ebene, wie auch die η'-Ebene, mit Ausnahme wieder von unendlich vielen zerstreut liegenden Punkten, welche die natürliche Grenze bilden, durch die unendlich vielen Spiegelbilder überdeckt. Diese Grenzpunkte nehmen wir schliesslich, so, wie sie einander entsprechend in der η- und der η'-Ebene gewonnen werden, in unsere conforme Abbildung mit auf. Hierdurch erleidet, genau wie oben bei dem entsprechenden Processe, die conforme Abdildung keinerlei Unterbrechung der Stetigkeit. Daher sind schliesslich die Ebenen η und η' ausnahmslos conform auf einander bezogen, *η und η' hängen also nothwendig linear von einander ab*, und der Beweis, den wir in Aussicht stellten, ist also auch im allgemeinen Falle erbracht.

§ 4.

Continuitätsbeweis.

Um weiter vorwärts zu gehen, bedarf ich einer Prämisse, die ich, obgleich sie mir unzweifelhaft richtig scheint, hier nicht in Kürze explicite erledigen kann. Es handelt sich darum, dass die Beziehung zwischen beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 eine *analytische* ist. Ich zweifele nicht, dass man eine solche Behauptung durch Weiterentwickelung jener Existenzbeweise, über welche im ersten Abschnitte Bericht erstattet wurde, also genau im Sinne der Riemann'schen Theorie, wird erledigen können. Uebrigens bliebe, wenn ein solches Verfahren auf Schwierigkeiten stossen sollte, immer noch der Recurs auf die *Formeln*, welche Herr Poincaré (wenn ich mich so ausdrücken darf) für den Zusammenhang der Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 aufgestellt hat.

Auf Grund dieser Prämisse kommen für die Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die gewöhnlichen Continuitätsvorstellungen zur vollen Geltung. Ich erinnere in diesem Betracht insbesondere an zwei Sätze. Zunächst daran, dass ein System von m analytischen Functionen von ebensoviel Variabeln in der Nähe jeder Stelle, für welche die Functionaldeterminante weder verschwindet, noch unendlich wird, eindeutig umgekehrt werden kann, — dass aber auch rückwärts, wenn die Umkehr in der Nähe einer Stelle nicht vieldeutig wird, das reguläre Verhalten der Functionaldeterminante folgt. Dann aber an den Weierstrass'schen Satz, dass eine analytische Function die obere Grenze derjenigen Werthe, deren sie in einem Bereiche fähig ist, allemal auch wirklich erreicht.

Unsere Aufgabe ist es nun, zu zeigen, dass innerhalb M_1 keine Gebietstheile (sozusagen „Inseln") vorhanden sein können, in welche man durch Fortschreiten in M_2 nicht hineingelangte. Hier bietet sich der Vorstellung zunächst eine doppelte Möglichkeit: Es kann sein, dass die Randpunkte eines solchen Gebietes (die Uferpunkte der Insel) noch zu dem zugänglichen Gebiete gehören, es kann aber auch sein, dass man durch Fortschreiten in M_2 überhaupt niemals die Randpunkte erreicht. Aber beides erweist sich vermöge der voraufgeschickten zwei Sätze als unmöglich.

Wäre nämlich das Ufer der Insel zugänglich, so würde dem Uferpunkte in M_2 eine Stelle entsprechen, deren *volle* Umgebung sich nur auf einen *Theil* der Umgebung des Uferpunktes abbilden könnte. Das aber widerspricht dem regulären Verhalten der bezüglichen Functionaldeterminante, welches seinerseits nothwendig ist, weil dem Hülfssatze des vorigen Paragraphen zufolge keinem Punkte von M_1 mehrere Punkte von M_2 entsprechen können.

Unzugänglich hinwiederum kann das Ufer unserer Insel auch nicht sein. Denn das hiesse geradezu, dass unser Functionensystem eine gewisse obere Grenze niemals erreichen könne, und widerspräche also dem Weierstrass'schen Satze.

Daher kann von Inseln in M_1, die unzugänglich wären, überhaupt nicht die Rede sein; jedem Punkte in M_1 entspricht ein Punkt in M_2, und unser Fundamentaltheorem ist erwiesen.

Ich brauche kaum auf die Analogie aufmerksam zu machen, welche zwischen dem hiermit geschilderten Beweisgange und einem bekannten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra Statt hat.

Abschnitt V.

Vergleich mit den elliptischen Functionen.

Ein Vergleich der neuen η-Functionen mit den elliptischen Functionen liegt von Vorneherein nahe und er ist wohl bei allen Bearbeitern, die sich diesen Untersuchungen zugewandt haben, das hodegetische Princip gewesen. Wir können einem solchen Vergleiche hier eine um so grössere Präcision ertheilen, als unser Fundamentaltheorem die in jedem Falle zur Verfügung stehenden Constanten übersehen lässt. Ich will mich bei der folgenden Darlegung auf jene beiden Functionsclassen η_1 und η_2, die in § 1 des vorigen Abschnitts bereits ausgezeichnet wurden, beschränken. In wie weit die betreffenden Aussagen auch noch für die allgemeineren von uns in Betracht gezogenen Functionsclassen gültig sind, wird Jeder selbst mit Leichtigkeit entscheiden.

Die Theorie der elliptischen Functionen betrachtet als independente Variable zunächst das eine auf der Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 1 existirende überall endliche Integral, welches wir mit u bezeichnen und übrigens so normiren wollen, dass es die Perioden 1 und $\frac{iK'}{K}$ besitzt. Darüber hinaus aber ist es die Exponentialfunction $v = e^{2i\pi u}$, welche bei vielen Entwickelungen zu Grunde gelegt wird. *Ich sage nun zunächst, dass es eben diese beiden Functionen sind, welche, im Falle $p = 1$, jenen η_1 und η_2 entsprechen, die auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keine Verzweigungspunkte besitzen.*

Was den ersten Theil dieser Behauptung angeht, so ist diess so zu verstehen, dass der Hauptkreis der Ebene η_1 in der Ebene u durch einen einzelnen Punkt, den Unendlichkeitspunkt, ersetzt ist. In der That verwandelt sich bei dieser Annahme jener kanonische Fundamentalbereich, den wir in § 10 des dritten Abschnittes für die η_1-Function construirten, in das Parallelogramm der doppeltperiodischen Functionen. Die erwähnte Umänderung wird dadurch nothwendig, dass nun von den erzeugenden Substitutionen der zu η_1 gehörigen Gruppe nur zwei, S_1 und T_1 existiren, für diese aber die Fundamentalrelation in folgender Form geschrieben werden kann:

$$S_1 T_1 = T_1 S_1,$$

so dass also S_1 und T_1 *vertauschbar* sein müssen.

Der andere auf v bezügliche Theil unserer Behauptung, ist aus der conformen Abbildung unmittelbar deutlich. Denn beim Uebergange zur v-Ebene verwandelt sich das Periodenparallelogramm der Ebene u (und also das Bild der Riemann'schen Fläche $p = 1$) in einen ringförmigen, um den Coordinatenanfangspunkt einfach herum gelegten Bereich, dessen Begrenzungscurven, der Periode $\frac{iK'}{K}$ von u entsprechend, durch die hyperbolische oder loxodromische Substitution:

$$v' = e^{-\frac{2K'}{K}\cdot\pi} \cdot v$$

zusammengeordnet sind.

Als nächsten und zuvörderst wichtigsten Zweck der elliptischen Functionen darf man nun wohl bezeichnen, dass sie gestatten, alle diejenigen complexen Functionen des Ortes, welche auf der Riemann'schen Fläche $p = 1$ *unverzweigt* sind, als *eindeutige* Functionen der

Grösse u darzustellen. Ich erinnere in dieser Beziehung zunächst natürlich an jene algebraischen Functionen des Ortes, deren irgend zwei, w und z, durch eine algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Geschlechte 1 verbunden sind. Ich erinnere ferner an diejenigen Integrale $\int R(w, z) \cdot dz$, welche keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte haben (Integrale 2. Gattung). Ich erinnere endlich aber an die modernen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten, wie sich dieselben an Herrn Hermite's Behandlungsweise der Lamé'schen Gleichung anschliessen. — Was die Grösse v betrifft, so ergeben sich mit ihrer Hülfe ähnliche Darstellungen, nur in beschränkterem Umfange. Auf einem bestimmten auf der Riemann'schen Fläche gelegenen Wege reproducirt sich v identisch: es ist derjenige, bei dessen Durchlaufen u die Periode 1 erlangt. Ein Gleiches müssen wir von allen solchen complexen Functionen des Ortes verlangen, die in v eindeutig sein sollen. Es ist diess aber auch die einzige Bedingung, welche zu der anderen, dass die Functionen durchaus unverzweigt sein sollen, hinzutritt.

Genau entsprechende Behauptungen werden nun offenbar bei einer Fläche eines beliebigen p hinsichtlich unserer η_1, η_2 richtig sein.

Wir dürfen diese Behauptungen sogar noch generalisiren, indem wir η_1 und η_2, statt sie unverzweigt zu nehmen, mit irgend welchen vorgegebenen Verzweigungspunkten ausstatten. Nehmen wir diese Verzweigungspunkte, um gleich den äussersten Fall zu betrachten, sämmtlich von unendlich hohem Index, so werden alle solche Functionen auf unserer Riemann'schen Fläche, welche nur an den vorgegebenen Stellen verzweigt sind, in η_1 eindeutig sein. Sollen sie es auch in η_2 sein, so kommt die Bedingung hinzu, dass sie sich bei Durchlaufung der Rückkehrschnitte $R_1, R_2, \cdots, R_p$, sowie bei Umkreisung der Einschnitte $Q_1, Q_2, \cdots$, die für das einzelne η_2 charakteristisch sind, identisch reproduciren müssen.

Wir haben damit denjenigen Gesichtspunkt, den Herr Poincaré bei seinen Untersuchungen über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich bisher in erster Linie verfolgt hat. Insbesondere hat er sein Interesse solchen linearen Differentialgleichungen zugewandt, deren Lösungen in dem jeweiligen η eindeutig werden, und so den unbestimmten Ideen, welche Herr Fuchs bei Gelegenheit in dieser Richtung entwickelt hat*), das erforderliche Substrat gegeben.

*) Göttinger Nachrichten vom 7. Februar 1880, pag. 173, sowie Borchardt's Journal, t. 89, pag. 158—162 (datirt vom 14. Febr. 1880) und ebenda, t. 90, pag. 72—73 (vom 7. Juni 1880). Ich bezeichne diese Entwickelungen im Texte als „unbestimmte Ideen", weil die Resultate, die Herr Fuchs allerdings in sehr bestimmter Form ausspricht, als solche unrichtig sind. Es liegt überall die Verwechselung der *unverzweigten* und der *eindeutigen* Functionen vor. Uebrigens

Hierzu eine kleine Bemerkung: Die genannten Entwickelungen stehen bei Herrn Poincaré so sehr im Vordergrunde, dass es fast aussieht, als bestände das Wesen der neuen Transcendenten in ihrer Bedeutung für die linearen Differentialgleichungen. Dem muss hier, so

---

sind die betreffenden Ueberlegungen der Art nach keineswegs vollständig neu. Ich möchte z. B. auf eine Stelle im 14ten Annalenbande pag. 159, 160 (datirt: Anfang Mai, 1878) aufmerksam machen, wo ich im Verfolg ähnlicher Ueberlegungen sage: „Man erhält z. B. den Satz: *Alle hypergeometrischen Reihen, welche nach k^2 fortschreiten, lassen sich als eindeutige Modulfunctionen darstellen.* Doch greift ein Verfolg dieser Ideen, die sich schliesslich alle auf die *Transformation der hypergeometrischen Reihen* beziehen, natürlich weit über die Grenzen des gegenwärtigen Aufsatzes hinaus.“

Im 19ten Bande dieser Annalen, pag. 564, hatte ich gelegentlich bemerkt, dass Herr Fuchs über jene eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, welche einen *Hauptkreis* besitzen, (ich benutze hier die Ausdrucksweise meines gegenwärtigen Aufsatzes), nirgends publicirt habe. Dem ist mittlerweile Herr Fuchs in den Göttinger Nachrichten vom 4. März 1882 entgegengetreten, indem er sich einmal auf die vorgenannten Arbeiten, dann aber auf sein Schreiben an Herrn Hermite im 83. Bande von Borchardt's Journal [Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces; datirt: November 1876] bezieht. So wenig persönliche Discussionen im Allgemeinen nützlich sind, so glaube ich doch hier mit einigen Zeilen antworten zu sollen. Denn durch die Note des Herrn Fuchs, insbesondere die Schlussbemerkung derselben, erscheint der Gesammtcharakter jener unter sich zusammenhängender Arbeiten, die ich seit sieben Jahren in diesen Annalen publicirt habe, in Zweifel gezogen.

Was zunächst den engeren Streitpunkt betrifft, so kann ich wirklich nicht verstehen, wie so in jenen Aufsätzen, an die Herr Poincaré anknüpft, von Functionen „mit Hauptkreis“ die Rede sein soll. Aber allerdings lässt Herr Fuchs in seiner Note diesen Zusatz auch fort und argumentirt so, als hätte ich schlechthin von eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich gesprochen! Jenen Brief an Herrn Hermite aber (von welchem uns hier nur derjenige Theil interessirt, der auf das Integral erster Gattung Bezug hat) habe ich auch bei meinen früheren Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen mit Absicht übergangen. Denn er enthält von den hier in Betracht kommenden Ideenbildungen Nichts, was nicht aus früheren Arbeiten zugleich *correcter* und *vollständiger* bekannt gewesen wäre. In ersterer Hinsicht brauche ich nur an die merkwürdige Unrichtigkeit zu erinnern (pag. 14 der Einleitung und pag. 27 des Textes), welche schon Herr Dedekind im 83ten Bande von Borchardt's Journal, pag. 286—287, zur Sprache gebracht hat. In letzterer Beziehung aber verweise ich z. B. auf die wiederholt citirte Arbeit von Herrn Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal, Bd. 75, datirt 1872). Es werden dort pag. 318, 319 die für den Modul k^2 charakteristischen Kreisbogendreiecke (von denen sich bei Herrn Fuchs keine Andeutung findet) in durchaus verständlicher und anschaulicher Weise besprochen. Oder soll ich noch weiter zurückgreifen und z. B. an jene Stelle im Gaussischen Nachlasse erinnern (Bd. 3 der gesammelten Werke, pag. 477, 478), aus der hervorgeht, dass Gauss bereits das Sachverhältniss völlig correct erkannt hat? —

Hierüber hinaus bezieht sich nun Herr Fuchs zum Schlusse seiner Note auf meine Arbeiten über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen wichtig diese Anwendung ohne Zweifel ist, und so sehr sie dem augenblicklichen Interesse des mathematischen Publicums entgegenkommt, doch widersprochen werden. Die Lösungen linearer Differentialgleichungen sind unter den übrigen Functionen, welche in η eindeutig werden, immer nur ein einzelnes Beispiel.

Doch kehren wir zu den elliptischen Functionen zurück! Ich will hier an zweiter Stelle diejenigen Entwickelungen und Betrachtungen hervorheben, welche man unter dem Namen: *Theorie der elliptischen Modulfunctionen* zusammenzufassen pflegt. Es handelt sich bei ihnen darum, die *Constanten*, welche in den algebraischen Gleichungen vom Geschlechte Eins auftreten, oder auch die Perioden der Integrale 2. Gattung etc. als Functionen von $\frac{iK'}{K}$ (dem Periodenverhältnisse des Integrals 1ter Gattung) oder auch von $e^{-\frac{K'}{K}\cdot\pi}$ (dem Jacobi'schen q) aufzufassen. Der Gewinn ist zumal wieder der, dass sämmtliche Ausdrücke, welche die Theorie zu betrachten hat, in den neuen Variabelen, bei zweckmässiger Einführung derselben, eindeutig werden. Dabei wolle man beachten, *dass die genannten transcendenten Moduln nichts Anderes sind, als die Coefficienten derjenigen erzeugenden Substitutionen, welche bei u und v in Betracht kommen**). Hiermit aber bietet sich von selbst die Verallgemeinerung. Die Coefficienten der erzeugenden Substitutionen der zur jeweiligen η-Function gehörigen Gruppe haben wir schon oben als Bestimmungsstücke der η-Function betrachtet. *Wir werden dieselben jetzt geradezu als Moduln der Riemann'schen Fläche (p, n, l_k) bezeichnen.* Also, wenn wir $n = 0$ nehmen und uns auf die

---

zweiter Ordnung (man sehe Bd. XI und XII dieser Annalen) und vermuthet, dass die enge Verbindung, in welcher meine damaligen Untersuchungen zu den seinigen stehen, auch in der Folge für mich von massgebendem Einflusse gewesen sein dürften. Ich würde einen solchen Einfluss, wenn er vorhanden gewesen wäre, nur dankbar anerkennen, aber er hat thatsächlich nicht stattgefunden. Ich habe in der Einleitung zum gegenwärtigen Aufsatze alle diejenigen Momente zur Sprache gebracht, welche für die Entwickelung meines eigenen Ideenkreises, soweit er hier in Betracht kommt, von Belang waren. Jene Beschäftigung mit den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vom Sommer 1876 und Frühjahr 1877) hatte für mich bislang nur die Bedeutung einer Episode. Auch habe ich meine damalige Methode keineswegs, wie Herr Fuchs es auf Grund meiner eigenen Angabe auf pag. 118 des 11ten Annalenbandes zu deduciren sucht, der in Vergleich kommenden Fuchs'schen Arbeit vom Juli 1875 entnommen. Es ist seine Arbeit für mich nur der Anlass gewesen, um eine Fragestellung aufzugreifen, die mir bis dahin bloss unbestimmt vorschwebte; meine damalige Methode aber ruht durchaus selbständig auf meiner früheren, im Juli 1874 publicirten Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen.

*) Genau genommen ist nicht q sondern q^2 ein solcher Coefficient; in der That ist wohl auch q^2 in der Theorie der elliptischen Functionen als die zunächst wichtige Grösse zu betrachten.

Functionen η_1 und η_2 beschränken, so haben wir einmal $(6p-6)$ reelle, das andere Mal $(3p-3)$ complexe Grössen als Moduln der allgemeinen Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p. Zu jedem Modulsysteme gehört nur eine Fläche, und die verschiedenen Modulsysteme, welche dieselbe Fläche liefern, setzen sich aus einem beliebigen derselben in charakteristisch einfacher Weise zusammen. *Hiermit haben wir aber nicht nur einen Ausblick auf eine ausgedehnte Theorie neuer Modulfunctionen, sondern es wird überhaupt zum ersten Male, wie es scheint, die Lehre von den Moduln Riemann'scher Flächen in einer alle Fälle umfassenden Weise wirklich zugänglich.*

Und nun zuletzt noch ein dritter Vergleichspunkt, bei dem es sich allerdings mehr um eine Analogie als um eine Uebereinstimmung handelt.

Die Gruppe der doppeltperiodischen Functionen

$$u' = u + m \cdot 1 + n \cdot \frac{iK'}{K}$$

hat eine besonders einfache Structur. In Folge dessen ist sie mit allen Substitutionen der Form $u' = \pm u + C$ vertauschbar; überdiess sind alle in ihr enthaltenen Untergruppen von endlichem Index mit ihr selbst ähnlich. Functionentheoretisch führt der erstere Umstand zum *Additionstheoreme* oder zu dem Satze, dass jede Riemann'sche Fläche $p=1$ unendlich viele eindeutige Transformationen in sich selbst besitzt, welche sich auf zwei Schaaren vertheilen, — der zweite aber zur Lehre von der *Transformation*.

In ersterer Hinsicht ist die Analogie bei den Flächen von höherem p und den zugehörigen η-Functionen nur eine eventuelle. Ich betrachte zunächst wieder das überall unverzweigte η_1. Dann kann man folgendermassen sagen: Die Gruppe der zu η_1 gehörigen linearen Substitutionen ist im Allgemeinen keineswegs in einer umfassenderen Gruppe mit brauchbarer Gebietseintheilung als ausgezeichnete Untergruppe enthalten. Ebensowenig gestattet die zugehörige Riemann'sche Fläche im Allgemeinen eindeutige Transformationen in sich selbst. *Wenn aber Eines von Beiden statt hat, so tritt auch nothwendig das Andere ein**). — Man beweist diess durch Betrachtungen, die den in § 3 des vorigen Abschnitts gegebenen genau parallel laufen. Uebrigens kann man bei diesem Satze auch *inverse* Transformationen in Betracht ziehen. Wegen eines Beispiels, das alle diese Verhältnisse erläutert, siehe Annalen XX, p. 50. — Sollen ähnliche Sätze für die überall unverzweigte η_2-Function aufgestellt werden, so dürfen natürlich nur solche eindeutige Transformationen der Fläche in sich in Be-

*) Die umfassende Gruppe hat dann nothwendig den Hauptkreis der η_2-Function auch ihrerseits zum Hauptkreise. Es folgt diess schon aus dem Umstande, dass nur *ein* solcher Kreis bei der η_1-Function vorhanden ist.

tracht gezogen werden, bei denen die Definition des einzelnen η_2 erhalten bleibt, bei denen also jene Rückkehrschnitte $R_1, R_2, \cdots, R_p$, die zur Festlegung des η_2 dienen, in äquivalente Rückkehrschnitte übergehen. Ich habe bereits im 19ten Bande dieser Annalen (pag. 567, 568) ausgeführt, dass mit Rücksicht auf solche Sätze die überall unverzweigte η_2-Function besonders geeignet scheint, die Gesammtheit der *symmetrischen* Flächen eines bestimmten p zu definiren.

Der *Transformationstheorie* aber stellen sich jetzt diejenigen Betrachtungen zur Seite, welche aus der zu der η-Function gehörigen Gruppe linearer Substitutionen irgend eine Untergruppe herausheben und nun solche eindeutige Functionen von η construiren, welche bei den Substitutionen der Untergruppe ungeändert bleiben. Ich will hier nur dasjenige η_1 ins Auge fassen, welches an irgend vorgegebenen Stellen logarithmisch verzweigt ist. Dann heisst das Gesagte nichts Anderes, als dass wir über einer gegebenen Riemann'schen Fläche (p, n) *irgend eine* andere Fläche, welche nur an den gegebenen Punkten verzweigt und übrigens irgendwie verschlungen ist, mit beliebig vielen Blättern ausbreiten und nun die algebraischen Irrationalitäten bestimmen, welche zu dieser neuen Fläche gehören. Wir werden also zu einem Probleme geführt, das in der Riemann'schen Theorie von je eine principielle Bedeutung hatte, und erkennen zugleich, dass man dasselbe jedesmal durch Vermittelung einer geeigneten η-Function lösen kann.

Leipzig, den 2. October 1882.