Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung.

Nach Vorlesungen von F. Klein.

ausgearbeitet von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Die folgenden Entwickelungen knüpfen an Vorlesungen an, welche Herr F. Klein im Wintersemester 1887/88 in Göttingen gehalten hat. Dieselben verfolgen in erster Linie den Zweck, eine Reihe von Gesichtspunkten, welche sich für die Theorie der elliptischen Functionen als fruchtbringend erwiesen haben, auf die hyperelliptischen Functionen I. Ordnung zu übertragen. Es wird daher, nach einer Einleitung, welche eine Reihe von Begriffen aus der Theorie der Integrale recapitulirt, zunächst eine gewisse Classification hyperelliptischer Functionen gegeben, welche sich enge an die entsprechende Classification („Stufeneintheilung") der elliptischen Functionen anschliesst; es folgen dann Anwendungen der entwickelten Principien auf speciellere Probleme, insbesondere auf die der Theilung und der Transformation. Dabei ist vor allem Gewicht darauf gelegt worden, die leitenden Gesichtspunkte in volle Beleuchtung zu rücken; Ausführung von Einzelheiten bleibt anderen Arbeiten überlassen, für welche durch diese „Grundzüge" der Boden geebnet sein soll.

Nach einer bestimmten Seite hin bieten, wie sogleich an dieser Stelle hervorgehoben sei, diese Entwickelungen in so fern eine Lücke dar, als darauf verzichtet wurde, das wesentlichste Hilfsmittel specieller Theorien, nämlich die *Thetafunctionen,* in die Systematik einzuordnen: eine Einordnung, die zwar durchaus zur Vollendung der Systematik erforderlich, aber mit eigenthümlichen Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint, so dass dieselbe einstweilen zurückgestellt werden musste. —

Der Herausgeber hat sich bei aller Freiheit, die er sich in der Durchführung der Einzelheiten gestatten zu sollen glaubte, vor allem bestrebt, die Ausführungen seines hochverdienten Lehrers möglichst getreu ihrem Inhalte nach wiederzugeben. Dabei hatte er sich vielfach der Unterstützung desselben zu erfreuen, wofür ihm auch an dieser Stelle verbindlichsten Dank auszusprechen gestattet sei.*)

Einleitung.

Vorbegriffe aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale.

§ 1.

Das zu Grunde gelegte algebraische Gebilde und die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 6 Verzweigungspunkten.

Jedes algebraische Gebilde vom Geschlechte $p = 2$ (jedes hyperelliptische Gebilde I. Ordnung) kann bekanntlich durch umkehrbar eindeutige Transformation bezogen werden auf eine *doppelt überdeckte Gerade* mit 6 Verzweigungspunkten (sommets). Die Hinzunahme der complexen Stellen des Gebildes bedingt die Erweiterung der Geraden zur *zweiblättrigen Riemann'schen Fläche*, deren Blätter dann ebenfalls in 6 Verzweigungspunkten mit einander zusammenhängen. Diese Fläche, bezw. die doppelt überdeckte Gerade, aus welcher sie hervorgegangen, erscheint sonach als *die canonische Form des hyperelliptischen Gebildes;* an sie sollen alle folgenden Entwickelungen anknüpfen.

Die einzelnen Punkte der Geraden sollen von einander unterschieden werden durch Einführung von homogenen binären Coordinaten:

$$x_1 : x_2;$$

von *homogenen* Coordinaten, indem die denselben zu Grunde liegende *projective* Vorstellungsweise die ganze Darstellung beherrschen soll. Ueber die Auswahl der Fundamentalpunkte dieser Coordinatenbestimmung soll keinerlei specielle Voraussetzung getroffen werden, vielmehr sollen alle allgemeinen Untersuchungen unter der Voraussetzung ganz willkürlicher Lage dieser Punkte geführt werden. Dadurch bleibt zugleich die Freiheit gewahrt, falls die Natur eines zu behandelnden speciellen Problems etwa eine besondere Wahl derselben als zweckmässig erscheinen lassen sollte, solchen Gründen der Zweckmässigkeit in jedem einzelnen Falle nachzugeben.

---

*) Indem die Ausarbeitung des Herrn Burkhardt in den Annalen zum Abdruck gelangt, darf ich nicht unterlassen, von mir aus ausdrücklich hervorzuheben, wie viel Arbeit von seiner Seite in derselben enthalten ist. In der That hatte Herr Burkhardt nicht nur den in meiner Vorlesung gegebenen Stoff zu sichten, neu anzuordnen und in druckfertige Form zu bringen, sondern er hatte auch manche Punkte, betreffs deren ich mich auf blosse Andeutungen beschränkte, tiefer zu ergründen und selbständig klarzulegen. So finden sich in den folgenden Paragraphen verschiedentlich über meine Vorlesungen hinausgehende Entwickelungen; ich nenne in dieser Hinsicht insbesondere Stücke der §§ 8, 23, 24, 40, 52, 54. F. Klein.

Ebenso wird ein etwa wünschenswerther Uebergang zu unhomogener Schreibweise durch die Substitution

$$x = x_1 : x_2$$

in jedem Falle ohne Schwierigkeit erfolgen können.

Die ebenfalls homogenen Coordinaten der 6 Verzweigungspunkte seien mit:

$$\alpha_1^0 : \alpha_2^0, \quad \alpha_1^1 : \alpha_2^1, \quad \alpha_1^2 : \alpha_2^2, \quad \alpha_1^3 : \alpha_2^3, \quad \alpha_1^4 : \alpha_2^4, \quad \alpha_1^5 : \alpha_2^5$$

bezeichnet, während die entsprechenden oberen Indices $0, 1 \ldots 5$ zugleich als Namen dieser Verzweigungspunkte gebraucht werden mögen. Es sei jedoch im Gegensatz zu sonst üblichen Festsetzungen ausdrücklich hervorgehoben, dass die Vertheilung dieser 6 Indices auf die 6 Verzweigungspunkte als eine durchaus willkürliche — keineswegs etwa durch die Grössenfolge ihrer Coordinaten bedingte — anzusehen ist; vielmehr werden diese Grössen als frei veränderlich zu gelten haben, und *die Untersuchung der Abhängigkeit der auftretenden Functionen auch von ihnen bildet einen wesentlichen Theil des Programms*, dessen Grundzüge hier skizzirt werden sollen. Es werden jedoch dabei diejenigen Fälle stets eine Ausnahmestellung einnehmen und einer besonderen Untersuchung bedürfen, in welchen zwei oder gar mehrere Verzweigungspunkte zusammenfallen. *Wo solche besondere Untersuchung nicht geführt ist, sollen diese Fälle im folgenden stets als stillschweigend ausgeschlossen gelten.*

Die 6 Verzweigungspunkte werden wir im folgenden zunächst nicht als einzeln gegeben voraussetzen, sondern nur durch ihre symmetrischen Functionen, also etwa durch die Coefficienten der Gleichung 6. Grades:

$$(1) \quad f(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^6 + 6 a_1 x_1^5 x_2 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + \cdots + a_6 x_2^6 = 0$$

oder unhomogen geschrieben:

$$f(x) \equiv a_0 x^6 + 6 a_1 x^5 + \cdots + a_6 = 0,$$

deren Wurzeln sie sind.

Es ist dann auch $\sqrt{f(x_1, x_2)}$ eine *eindeutige* Form ($\sqrt{f(x)}$ eine eindeutige Function) auf der Fläche, welche durch ihre Werthe zwei „*conjugirte*“ Stellen derselben unterscheidet; und es bestehen die beiden Sätze:

Jede eindeutige algebraische Function einer Stelle der Fläche ist rational darstellbar durch x und $\sqrt{f(x)}$;

Jede eindeutige algebraische Form einer Stelle der Fläche ist rational und ganz darstellbar durch x_1, x_2, $\sqrt{f(x_1, x_2)}$.

Durch die Werthe von x und $\sqrt{f(x)}$ ist die einzelne Stelle des Gebildes unzweideutig festgelegt.

§ 2.

Die canonischen Querschnittsysteme und die Integrale I. Gattung.

Auf der Riemann'schen Fläche werde nun ein System von $2p = 4$ Querschnitten:

$$A_1,\ A_2;\ \ B_1,\ B_2,$$

welche die Fläche nicht zerstücken, in folgender Weise gezogen: Die vier Paare von Querschnitten

$$A_1 A_2, \qquad B_1 B_2, \qquad A_1 B_2, \qquad A_2 B_1$$

sollen *keinen* gemeinsamen Punkt besitzen; dagegen sollen A_1 und B_1 sich in einem und nur einem Punkte schneiden, ebenso A_2 und B_2. Der *Sinn* dieser Querschnitte sei wie bei Riemann (ges. W. p. 123) so festgelegt, dass der Querschnitt A_k den Querschnitt B_k „von links nach rechts", also B_k den A_k „von rechts nach links" überschreite. Ein Querschnittsystem, welches diesen Bedingungen genügt, soll *canonisch* genannt werden.

Auch hier ist es für die *allgemeinen* Untersuchungen weder erforderlich noch auch nur zweckmässig weitere specielle Voraussetzungen über die Auswahl des zu Grunde gelegten canonischen Querschnittsystems zu machen.

Die Perioden, welche zwei von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung, etwa:

$$(2) \qquad w_1 = \int^{*} \frac{x_1(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad w_2 = \int^{*} \frac{x_2(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}$$

an den Querschnitten eines solchen canonischen Systems (d. h. bei Ueberschreitung derselben) besitzen, sollen mit:

(3)

	A_1	A_2	B_1	B_2
u_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
u_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

bezeichnet werden; dieselben sind bekanntlich nicht von einander unabhängig, sondern durch die bilineare Gleichung:

$$(4) \qquad \omega_{11}\omega_{23} - \omega_{13}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{24} - \omega_{14}\omega_{22} = 0$$

mit einander verknüpft; und ausserdem sind ihre reellen und imaginären Bestandtheile an gewisse Ungleichungen gebunden, deren explicite Aufstellung hier nicht erforderlich ist.

§ 3.

Die Periodendeterminanten, die transcendent-normirten Integrale I. Gattung und die Thetamoduln.

Die Unterdeterminanten der Matrix $\| \omega_{ik} \|, \; {\scriptstyle i=1,2,\, k=1,2,3,4}$, welche mit:

$$(5) \qquad p_{ik} = \omega_{1i}\,\omega_{2k} - \omega_{2i}\,\omega_{1k}$$

bezeichnet werden sollen, sind endlich und von Null verschieden, solange die Verzweigungspunkte alle von einander verschieden sind; das folgt daraus, dass es sonst nicht möglich sein würde, Integrale I. Gattung mit vorgeschriebenen Perioden am i^{ten} und k^{ten} Querschnitt zu bilden, die doch einem Riemann'schen Existenztheorem zu Folge existiren müssen.*) Es wird daher auch insbesondere möglich sein „*Normalintegrale I. Gattung*"

$$v_1, \; v_2$$

zu bilden, welche an den Querschnitten I. Art A beziehungsweise die Perioden:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

besitzen, während ihre Perioden an den Querschnitten II. Art B mit:

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{matrix}$$

bezeichnet und ihrer hauptsächlichen Verwendung wegen „*Thetamoduln*" genannt werden. Zwischen diesen neuen Grössen und den bereits eingeführten bestehen dann die Beziehungen:

$$(6) \qquad w_1 = \omega_{11} v_1 + \omega_{12} v_2, \quad w_2 = \omega_{21} v_1 + \omega_{22} v_2,$$

und umgekehrt:

$$(7) \qquad v_1 = \frac{\omega_{22} w_1 - \omega_{12} w_2}{p_{12}}, \quad v_2 = \frac{-\omega_{21} w_1 + \omega_{11} w_2}{p_{12}}$$

ferner:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{p_{32}}{p_{12}}, & \tau_{12} &= \frac{p_{42}}{p_{12}}, \\ \tau_{21} &= \frac{p_{13}}{p_{12}}, & \tau_{22} &= \frac{p_{14}}{p_{12}}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{t} = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = \frac{p_{34}}{p_{12}}.$$

*) Wegen des Beweises dieses Existenztheorems vgl. man den Math. Ann. Bd. 21, p. 157 abgedruckten Brief von Herrn H. A. Schwarz an Herrn F. Klein und die daran anknüpfenden Noten des Herrn Ascoli, Ist. Lomb. Rendic. ser. 2, t. 18, sowie die 2. Auflage des Werkes von Herrn C. Neumann über Abel'sche Functionen.

Die Bilinearrelation $p_{13} + p_{24} = 0$ (Gl. 4) geht damit über in:

(9) $$\tau_{12} = \tau_{21},$$

während die § 2 a. E. erwähnten Ungleichungen sich dahin zusammenfassen, dass die binäre quadratische Form:

(10) $$b_{11} m_1^2 + 2 b_{12} m_1 m_2 + b_{22} m_2^2,$$

deren Coefficienten b_{ik} die imaginären Bestandtheile der τ_{ik} sind, *definit und positiv* sein muss. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür sind bekanntlich:

(11) $$b_{11} > 0, \qquad b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$$

(also auch $b_{22} > 0$).

§ 4.

Uebergang von einem canonischen Querschnittsystem zu einem andern; Abel'sche Substitutionen.

Die in § 2 eingeführten Perioden waren definirt unter Zugrundelegung eines ganz bestimmten, wenn auch willkürlichen canonischen Querschnittsystems. Wird dasselbe durch ein anderes ersetzt, so treten an die Stelle der ω andere Perioden, die mit ω' bezeichnet werden sollen. Da aber unsere Integrale keine von den ω unabhängigen Perioden besitzen, so werden*) diese neuen Perioden lineare Functionen der alten mit ganzzahligen Coefficienten sein, welche folgendermassen geschrieben werden mögen:

(12) $$\begin{aligned} \omega'_{i1} &= a_1 \omega_{i1} + a_2 \omega_{i2} + a_3 \omega_{i3} + a_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i2} &= b_1 \omega_{i1} + b_2 \omega_{i2} + b_3 \omega_{i3} + b_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i3} &= c_1 \omega_{i1} + c_2 \omega_{i2} + c_3 \omega_{i3} + c_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i4} &= d_1 \omega_{i1} + d_2 \omega_{i2} + d_3 \omega_{i3} + d_4 \omega_{i4}, \end{aligned}$$

Da die Relation (4) auch von den neuen Perioden erfüllt werden muss, und da auch die alten Perioden ganzzahlige Functionen der neuen sein müssen, so müssen**) zwischen den Coefficienten der Substitution (12) sechs Relationen bestehen, welche kurz:

(13) $$\begin{aligned} &[a, b] = 0, \quad [a, c] = 1,^{***)} \quad [a, d] = 0, \\ &[b, c] = 0, \quad [b, d] = 1,^{***)} \quad [c, d] = 0, \end{aligned}$$

geschrieben werden sollen, indem zur Abkürzung:

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = [a, b]$$

*) Hermite, sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, § II. (C. R. t. 40, 1855).

**) a. a. O. § 3.

***) Dass hier $+1$ und nicht -1 steht, ist durch die § 2 a. E. erwähnten Ungleichungen bedingt.

gesetzt ist. Damit wird die Auflösung der Substitutionen (12) in der Form erhalten:

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
\omega_{i1} &= \quad c_3\omega'_{i1} + d_3\omega'_{i2} - a_3\omega'_{i3} - b_3\omega'_{i4},\\
\omega_{i2} &= \quad c_4\omega'_{i1} + d_4\omega'_{i2} - a_4\omega'_{i3} - b_4\omega'_{i4},\\
\omega_{i3} &= -c_1\omega'_{i1} - d_1\omega'_{i2} + a_1\omega'_{i3} + b_1\omega'_{i4},\\
\omega_{i4} &= -c_2\omega'_{i1} - d_2\omega'_{i2} + a_2\omega'_{i3} + b_2\omega'_{i4}
\end{aligned}
$$

und den Relationen (13) treten, wenn zur Abkürzung:

$$[1, 2] = a_1 c_2 - a_2 c_1 + b_1 d_2 - b_2 d_1$$

gesetzt wird, die folgenden an die Seite:

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
&[1, 2] = 0, \quad [1, 3] = 1, \quad [1, 4] = 0,\\
&[2, 3] = 0, \quad [2, 4] = 1, \quad [3, 4] = 0,
\end{aligned}
$$

welche mit jenen vollständig äquivalent sind.

Eine lineare Substitution, deren Coefficienten den Bedingungen (13) resp. (15) genügen wird nach Herrn C. Jordan*) „*Abel'sche Substitution*“ genannt. Wo im folgenden von *linearer Periodentransformation* die Rede ist, soll stets darunter verstanden werden, dass dieselbe durch eine Abel'sche Substitution geschehe.

§ 5.

Lineare Transformation der Normalintegrale und der Thetamoduln.

Zu dem in § 4 eingeführten „neuen“ Querschnittsystem, auf welches sich die gestrichenen Perioden beziehen, gehören auch neue Normalintegrale und Thetamoduln. Zwischen diesen und den „alten“ Normalintegralen und Thetamoduln besteht eine grosse Anzahl von Beziehungen, von welchen in den Anwendungen der allgemeinen Theorie auf specielle Probleme beständig Gebrauch zu machen ist. Da diese Beziehungen von verschiedenen Autoren**) abgeleitet sind, welche sich verschiedener Bezeichnungen bedient haben, so ist eine Zusammenstellung einer Reihe solcher Beziehungen in gleichmässiger Bezeichnungsweise vielleicht nicht überflüssig; es soll daher an dieser Stelle eine solche gegeben werden.

---

*) Traite des subst. p. 171. Uebrigens nennt Herr C. Jordan auch solche Substitutionen „abéliennes“, welche durch Bedingungen charakterisirt sind, in denen rechts statt wie in (13) und (15) eine 1, eine beliebige ganze Zahl k steht.

**) Vgl. z. B. Hermite a. a. O.; Thomae, die allg. Transformation der Θ-Functionen (Diss. Gött. 1864); Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen (Leipzig 1865); Königsberger, Cr. J. Bd. 65, p. 344 ff.; Witting, Ueber eine Configuration im Raume (Diss. Gött. abgedr. in Schlömilch's Zeitschr. 1887); sowie die zusammenfassende Darstellung bei Krause, Die Transformation der hyperell. Fct. I. O. (Leipzig 1886) p. 69 ff.

Die zu den *alten* Querschnitten gehörenden Normalintegrale v besitzen an den Querschnitten des *neuen* Systems Perioden, welche mit:

	A_1'	A_2'	B_1'	B_2'
v_1	A_1	B_1	C_1	D_1
v_2	A_2	B_2	C_2	D_2

bezeichnet werden sollen;*) den Formeln (12) entsprechend ist dann:

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
A_1 &= a_1 + a_3\tau_{11} + a_4\tau_{12}, & A_2 &= a_2 + a_3\tau_{21} + a_4\tau_{22},\\
B_1 &= b_1 + b_3\tau_{11} + b_4\tau_{12}, & B_2 &= b_2 + b_3\tau_{21} + b_4\tau_{22},\\
C_1 &= c_1 + c_3\tau_{11} + c_4\tau_{12}, & C_3 &= c_2 + c_3\tau_{21} + c_4\tau_{22},\\
D_1 &= d_1 + d_3\tau_{11} + d_4\tau_{12}, & D_3 &= d_2 + d_3\tau_{21} + d_4\tau_{22}.
\end{aligned}
$$

Die zu den *neuen* Querschnitten gehörenden Normalintegrale $v_1'v_2'$ besitzen an eben diesen Querschnitten die Perioden:

	A_1'	A_2'	B_1'	B_2'
v_1'	1	0	τ_{11}'	τ_{12}'
v_2'	0	1	τ_{21}'	τ_{22}'

Die Vergleichung der Perioden an den beiden ersten Querschnitten liefert die Ausdrücke der v durch die v':

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
v_1 &= A_1 v_1' + B_1 v_2',\\
v_2 &= A_2 v_1' + B_2 v_2'
\end{aligned}
$$

und mit Hilfe dieser Ausdrücke liefert die Vergleichung der Perioden an den beiden andern Querschnitten die Relationen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetamoduln:

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
C_1 &= A_1\tau_{11}' + B_1\tau_{21}', & C_2 &= A_2\tau_{11}' + B_2\tau_{21}',\\
D_1 &= A_1\tau_{12}' + B_1\tau_{22}', & D_2 &= A_2\tau_{12}' + B_2\tau_{22}'.
\end{aligned}
$$

Werden ebenso die Perioden der *neuen* Normalintegrale an den *alten* Querschnitten bezeichnet mit:

$$
(16a)\quad
\begin{aligned}
III_c &= c_3 - a_3\tau_1' - b_3\tau_{12}', & III_d &= d_3 - a_3\tau_{21}' - b_3\tau_{22}',\\
IV_c &= c_4 - a_4\tau_{11} - b_4\tau_{12}', & IV_d &= d_4 - a_4\tau_{21}' - b_4\tau_{22}',\\
I_c &= -c_1 + a_1\tau_{11}' + b_1\tau_{12}', & I_d &= -d_1 + a_1\tau_{21}' + b_1\tau_{22}',\\
II_c &= -c_2 + a_2\tau_{11}' + b_2\tau_{12}', & II_d &= -d_2 + a_2\tau_{21}' + b_2\tau_{22}'
\end{aligned}
$$

---

*) Die doppelte Bedeutung der Buchstaben A, B wird nicht stören.

so werden die zu (17) und (18) analogen Relationen erhalten:

$$(17\text{a})\qquad \begin{aligned} v_1' &= III_c v_1 + IV_c v_2, \\ v_2' &= III_d v_1 + IV_d v_2 \end{aligned}$$

und:

$$(18\text{a})\qquad \begin{aligned} I_c &= III_c \tau_{11} + IV_c \tau_{21}, & I_d &= III_d \tau_{11} + IV_d \tau_{21}, \\ II_c &= III_c \tau_{12} + IV_c \tau_{22}, & II_d &= III_d \tau_{12} + IV_d \tau_{22} \end{aligned}$$

Die Relationen (17), (18) und (17a), (18a) enthalten rechts noch die Grössen beider Systeme; durch Elimination können aber aus ihnen andere erhalten werden, welche die Grössen des einen Systems durch die des andern ausdrücken. Um diese Relationen bequem schreiben zu können, mögen die Abkürzungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} (ab)_{12} &= (a_1 b_2 - a_2 b_1); \\ N &= A_1 B_2 - A_2 B_1 \\ &= (ab)_{12} + (ab)_{32}\tau_{11} + \big((ab)_{13} + (ab)_{42}\big)\tau_{12} + (ab)_{14}\tau_{22} + (ab)_{34}\mathfrak{t}, \\ N' &= III_c IV_d - IV_c III_d \\ &= (cd)_{34} - (ad)_{34}\tau_{11}' + \big(-(bd)_{34} + (ac)_{34}\big)\tau_{12}' + (bc)_{34}\tau_{22}' + (ab)_{34}\mathfrak{t}' \end{aligned}$$

eingeführt werden*); dann wird erhalten:

$$(20)\qquad \begin{aligned} N v_1' &= B_2 v_1 - B_1 v_2, & N v_2' &= -A_2 v_1 + A_1 v_2, \\ N \tau_{11}' &= B_2 C_1 - B_1 C_2, & N \tau_{21}' &= -A_2 C_1 + A_1 C_2, \\ N \tau_{12}' &= B_2 D_1 - B_1 D_2; & N \tau_{22}' &= -A_2 D_1 + A_1 D_2; \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(20\text{a})\qquad \begin{aligned} N' v_1 &= IV_d v_1' - IV_c v_2', & N' v_2 &= -III_d v_1' + III_c v_2', \\ N' \tau_{11} &= IV_d I_c - IV_c I_d, & N' \tau_{21} &= -III_d I_c + III_c I_d, \\ N' \tau_{12} &= IV_d II_c - IV_c II_d; & N' \tau_{22} &= -III_d II_c + III_c I_d. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Ausdrücke für τ_{12}' und τ_{21}', bezw. τ_{12} und τ_{21} liefert die Bilinearrelationen je für die Normalintegrale des einen und die Querschnitte des andern Systems in der Form:

$$(21)\qquad \begin{aligned} A_1 C_2 - A_2 C_1 + B_1 D_2 - B_2 D_1 &= 0, \\ I_c III_d - I_d III_c + II_c IV_d - IV_d II_c &= 0, \end{aligned}$$

deren entwickelte Formen:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &[1,2] + [3,2]\tau_{11} + ([1,3] + [4,2])\tau_{12} + [1,4]\tau_{22} + [3,4]\mathfrak{t} = 0, \\ &[a,b] + [c,b]\tau_{11}' + ([a,c] + [d,b])\tau_{12}' + [a,d]\tau_{22}' + [c,d)\mathfrak{t}' = 0 \end{aligned}$$

als Zusammenfassung der Relationen (13) und (15) angesehen werden können.

---

*) Herr Witting schreibt N' statt N.

Es mögen noch einige einfache Relationen angeführt werden, welche die zur Abkürzung eingeführten Grössen verbinden. Bestimmt man die Perioden der alten Integrale an den alten Querschnitten aus (17) mit Hilfe von (16a), so findet man:

$$(23)\quad \begin{array}{ll} 1 \;= A_1 III_c + B_1 III_d, & 0 \;= A_2 III_c + B_2 III_d, \\ 0 \;= A_1 III_c + B_1 IV_d, & 1 \;= A_2 IV_c + B_2 IV_d, \\ \tau_{11} = A_1 I_c \;\; + B_1 I_d \;\;, & \tau_{21} = A_2 I_c \;\; + A_2 I_d \;\;, \\ \tau_{12} = A_1 II_c \; + B_1 II_d \;, & \tau_{22} = A_2 II_c \; + B_2 II_e \end{array}$$

und ebenso aus (16) und (17a):

$$(23\text{a})\quad \begin{array}{ll} 1 \;= A_1 III_c + A_2 IV_c, & 0 \;= A_1 III_d + A_2 IV_d. \\ 0 \;= B_1 III_c + B_2 IV_c, & 1 \;= B_1 III_d + B_2 IV_d, \\ \tau'_{11} = C_1\, III_c + C_2\, IV_c, & \tau'_{21} = C_1\, III_d + C_2\, IV_d, \\ \tau'_{12} = D_1\, III_c + D_2\, IV_c, & \tau'_{22} = D_1\, III_d + D_2\, IV_d. \end{array}$$

Die Vergleichung der in diesen beiden Formelgruppen enthaltenen verschiedenen Ausdrücke für dieselben Grössen führt noch zu den Identitäten:

$$(24)\quad \begin{array}{ll} A_1 III_c = B_2 IV_d\,, & A_1 II_c \; + B_1 II_d \; = A_2 I_c \;\; + B_2 I_d, \\ A_2 IV_c \; = B_1 III_d, & C_1 III_d + C_2 IV_d \; = D_1 III_c + D_2 IV_d; \end{array}$$

endlich liefert der Multiplicationssatz der Determinantentheorie die Relation:

$$(25)\qquad NN' = 1$$

welche übrigens auch unmittelbar daraus folgt, dass, wie eine einfache Ueberlegung zeigt:

$$(26)\qquad N = \frac{p'_{12}}{p_{12}}, \quad N' = \frac{p_{12}}{p'_{12}}$$

ist.

§ 6.

Gleichzeitige Vermehrung der ursprünglichen und der transformirten Integrale um Vielfache der Perioden. Die Elementarcharakteristiken und ihre Transformation.

Ist ein bestimmtes System von canonischen Perioden:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$$

gegeben (der Kürze wegen seien die *ersten* Indices weggelassen), so erscheint jede andere Periode desselben Integrals als homogene lineare Function derselben, mit ganzzahligen Coefficienten:

$$(27)\qquad h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4,$$

oder wenn man bei der herkömmlichen Schreibweise stehen bleiben will:

(28) $$h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + g_1\omega_3 + g_2\omega_4.$$

Ueberhaupt kann, wie leicht zu sehen, jedes Werthepaar u_1, u_2 auf eine und nur eine Weise in der Form geschrieben werden:

(29) $$\begin{aligned} u_1 &= h_1\omega_{11} + h_2\omega_{12} + h_3\omega_{13} + h_4\omega_{14}, \\ u_2 &= h_1\omega_{21} + h_2\omega_{22} + h_3\omega_{23} + h_4\omega_{24}, \end{aligned}$$

wenn die h (zwar nicht mehr ganze, aber doch) *reelle* Zahlen bedeuten sollen. Ein solcher Complex von 4 reellen Zahlen, wie er hier dem einzelnen Paare zusammengehöriger Integralwerthe zugeordnet ist:

$$\begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

soll im Folgenden eine *Elementarcharakteristik**) heissen; insbesondere wird von solchen Elementarcharakteristiken die Rede sein, deren Elemente ganze Zahlen oder ganze Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind.

Die Elementarcharakteristiken sind definirt mit Zugrundelegung eines bestimmten Periodensystems; wie werden sie sich ändern, wenn man die Perioden einer linearen Transformation unterwirft? Die Antwort auf diese Frage ergiebt sich daraus, dass identisch sein muss:

(30) $$h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4 = h_1'\omega_1' + h_2'\omega_2' + h_3'\omega_3' + h_4'\omega_4'.$$

Der Inhalt dieser Gleichung kann unter Benutzung eines in der Invariantentheorie üblichen Ausdrucks folgendermassen ausgesprochen werden:

Die Transformation der Elementarcharakteristiken vollzieht sich in der Weise, dass ihre Elemente als zu den Perioden contragrediente Variable auftreten;

oder ausführlicher:

Die Substitution, welche die Elemente der alten Elementarcharakteristik durch die der neuen ausdrückt, geht durch Vertauschung der Zeilen mit den Colonnen der Coefficientenmatrix aus derjenigen Substitution hervor, welche die neuen Perioden durch die alten ausdrückt — und gleiches gilt bei Vertauschung der Worte „alt“ und „neu“.

Ausführlich geschrieben lauten die Substitutionsformeln der Elementarcharakteristiken folgendermassen:

(31) $$\begin{aligned} h_1 &= a_1 h_1' + b_1 h_2' + c_1 h_3' + d_1 h_4', \\ h_2 &= a_2 h_1' + b_2 h_2' + c_2 h_3' + d_2 h_4', \\ h_3 &= a_3 h_1' + b_3 h_2' + c_3 h_3' + d_3 h_4', \\ h_4 &= a_4 h_1' + b_4 h_2' + c_4 h_3' + d_4 h_4'; \end{aligned}$$

*) Später (§ 27) wird auch von „Primcharakteristiken“ die Rede sein.

und umgekehrt:

$$
(31\text{a})\qquad
\begin{aligned}
h_1' &= c_3 h_1 + c_4 h_2 - c_1 h_3 - c_2 h_4,\\
h_2' &= d_3 h_1 + d_4 h_2 - d_1 h_3 - d_2 h_4,\\
h_3' &= - a_3 h_1 - a_4 h_2 + a_1 h_3 + a_2 h_4,\\
h_4' &= - b_3 h_1 - b_4 h_2 + b_1 h_3 + b_2 h_4.
\end{aligned}
$$

Hieran mögen noch einige Formeln angereiht werden, welche auf einander entsprechende Perioden der Normalintegrale $v_1 v_2$ einerseits, $v_1' v_2'$ andererseits sich beziehen. Werden die v um simultane Perioden:

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
T_1 &= h_1 + h_3 \tau_{11} + h_4 \tau_{12},\\
T_2 &= h_2 + h_3 \tau_{21} + h_4 \tau_{22}
\end{aligned}
$$

vermehrt, so sind die v' gleichzeitig um die Perioden:

$$
(32\text{a})\qquad
\begin{aligned}
T_1' &= h_1' + h_3' \tau_{11}' + h_4' \tau_{12}',\\
T_2' &= h_2' + h_3' \tau_{11}' + h_4' \tau_{22}'
\end{aligned}
$$

zu vermehren; die h, h' bedeuten dabei nun wieder ganze Zahlen, welche durch die Relationen (31), (31a) verbunden sind.

Für diese T, T' erhält man nun die Relationen: aus (16) und (16a):

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
T_1 &= h_1' A_1 + h_2' B_1 + h_3' C_1 + h_4' D_1,\\
T_2 &= h_1' A_2 + h_2' B_2 + h_3' C_4 + h_4' D_1,
\end{aligned}
$$

und umgekehrt:

$$
(33\text{a})\qquad
\begin{aligned}
T_1' &= h_1 III_c + h_2 IV_c + h_3 I_c + h_4 II_c,\\
T_2' &= h_1 III_d + h_2 IV_d + h_3 I_d + h_4 II_d,
\end{aligned}
$$

welche (in ähnlicher Weise wie (30)) als Zusammenfassung der Relationen (31) und (31a) gelten können; ferner aus (17) und (17a):

$$(34)\qquad T_1 = A_1 T_1' + B_1 T_2', \qquad T_2 = A_2 T_1' + B_2 T_2'$$

und umgekehrt:

$$(34\text{a})\qquad T_1' = III_c T_1 + IV_c T_2, \qquad T_2' = III_d T_1 + IV_d T_2;$$

endlich aus (20) und (20a):

$$(35)\qquad N T_1' = B_2 T_1 - B_1 T_2, \qquad N T_2' = - A_2 T_1 + A_1 T_2$$

und umgekehrt:

$$(35\text{a})\qquad N' T_1 = IV_d T_2' - IV_c T_1', \qquad N' T_2 = - III_d T_1' + III_c T_2'.$$

§ 7.

Elementare Modificationen des Schnittsystems. Zusammensetzung aller Abel'schen Substitutionen aus 4 Erzeugenden.

Als *nothwendige* Bedingungen dafür, dass eine lineare ganzzahlige Substitution geeignet sei, ein canonisches Querschnittsystem in ein anderes überzuführen, sind oben (§ 5) die Relationen (13) bezw. (15)

gefunden worden. Es entsteht nun die Frage ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, m. a. W. die Frage:

Wenn irgend ein Querschnittsystem gegeben ist, kann man dann immer zu ihm ein zweites so finden, dass die zu den beiden Systemen gehörenden Perioden durch die Gleichungen (12) *bezw.* (14) *verbunden sind, wenn die in diesen Gleichungen auftretenden ganzen Zahlen den Bedingungen* (13) *bezw.* (15) *genügen, im übrigen aber willkürlich gegeben sind?*

Der Beweis dafür, dass diese Frage zu bejahen ist, zerfällt in zwei Theile, einen geometrischen und einen zahlentheoretischen. Zuerst wird nämlich gezeigt, wie alle überhaupt möglichen Querschnittsänderungen aus 4 einfachsten solchen Aenderungen sich zusammensetzen lassen; dann wird gezeigt, wie aus den jenen 4 Querschnittsänderungen entsprechenden Substitutionen alle diejenigen sich zusammensetzen lassen, welche den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen.

Der erste, geometrische Theil des Beweises beruht auf folgenden Ueberlegungen, welche im Wesentlichen von Herrn Thomae*) entwickelt worden sind.

Zunächst kann man die Benennungen der beiden Querschnittspaare $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$ mit einander vertauschen; das liefert eine Substitution:

(D) **) $$\omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \quad \omega_3' = \omega_4, \quad \omega_4' = \omega_3.$$

Zu dieser Substitution gehören die folgenden Umsetzungen der Normalintegrale und der Thetamoduln:

$$\begin{gathered} v_1' = v_2, \qquad v_2' = v_1, \\ \tau_{11}' = \tau_{22}, \qquad \tau_{12}' = \tau_{12}, \qquad \tau_{22}' = \tau_{11}. \\ N = N' = 1. \end{gathered} \tag{36}$$

Zweitens kann man aber auch die beiden Querschnitte eines Paares unter sich vertauschen, wenn man dabei den Sinn des einen ändert. Von den hierin begriffenen Vertauschungen braucht nur eine, etwa die von A_1 mit B_1, berücksichtigt zu werden, da die andere vermöge (D) aus ihr hervorgeht. Ihr entspricht die Substitution:

(B) $$\omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_2, \quad \omega_4' = \omega_4$$

mit den Umsetzungen der Normalintegrale und Thetamoduln:

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 12; auch Cr. J. Bd. 75, p. 230 ff. Herr Thomae hat noch eine grössere Anzahl elementarer Aenderungen.

**) Die Buchstaben für die Erzeugenden wie bei Krazer, ann. di mat. ser. II. t. XII p. 296.

$$
(37)\quad
\begin{aligned}
N &= -\tau_{11}, & v_1' &= -\frac{v_1}{\tau_{11}}, & v_2' &= \frac{-\tau_{21}v_1+\tau_{11}v_2}{\tau_{11}},\\
\tau_{11}' &= -\frac{1}{\tau_{11}}, & \tau_{12}' &= \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}, & \tau_{22}' &= \frac{-\tau_{11}\tau_{22}+\tau_{12}^2}{\tau_{11}};\\
N' &= \tau_{11}', & v_1 &= \frac{v_1'}{\tau_{11}'}, & v_2 &= \frac{-\tau_{21}'v_1'+\tau_{11}'v_2'}{\tau_{11}'},\\
\tau_{11} &= -\frac{1}{\tau_{11}'}, & \tau_{12} &= -\frac{\tau_{12}'}{\tau_{11}}, & \tau_{22} &= \frac{-\tau_{11}'\tau_{22}'+\tau_{12}'^2}{\tau_{11}'}.
\end{aligned}
$$

Es ist klar, dass aus den beiden Operationen (D) und (B) jede andere Aenderung des Querschnittssystems abgeleitet werden kann, welche auf eine blosse Aenderung der Bezeichnung sich zurückführen lässt. Weitere Querschnittänderungen können also nur noch erhalten werden dadurch, dass man einen der Querschnitte durch irgend eine Combination der andern erweitert und diese Operation — immer unter Berücksichtigung der für ein canonisches Querschnittsystem festgesetzten Regeln — eventuell an verschiedenen Querschnitten nach einander vornimmt. Nun sind wir aber vermöge (B) und (D) im Stande, jeden Querschnitt an irgend eine Stelle zu bringen; es wird also genügen zu untersuchen, wie wir etwa den Querschnitt B_1 erweitern können. Wir können ihn erweitern um den zugehörigen Querschnitt A_1; wir können ihn ferner erweitern um einen der Querschnitte des andern Paares, etwa um B_2. Die Vermehrung von B_1 und A_2 besonders zu betrachten, ist nicht erforderlich, da A_2 und B_2 vertauscht werden können, ohne dass B_1 seinen Platz wechselt.

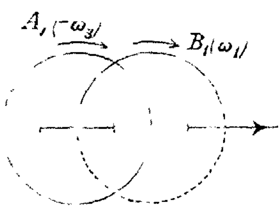

Fig. 1.

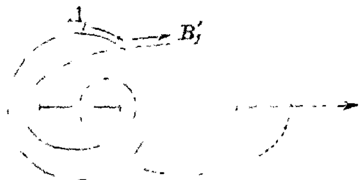

Fig. 2.

Wir erweitern also *drittens* B_1 um A_1 (vgl. die vorstehende Figur); das giebt die Substitution:

(A) $\qquad \omega_1' = \varphi_1 - \omega_3,\quad \omega_2' = \omega_2,\quad \omega_3' = \omega_3,\quad \omega_4' = \omega_4$

mit den Umsetzungen der v und τ:

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
N &= 1-\tau_{11}, & v_1' &= \frac{v_1}{1-\tau_{11}}, & v_2' &= \frac{\tau_{12}v_1+(1-\tau_{11})v_2}{1-\tau_{11}},\\
\tau_{11}' &= \frac{\tau_{11}}{1-\tau_{11}}, & \tau_{12}' &= \frac{\tau_{12}}{1-\tau_{11}}, & \tau_{22}' &= \frac{\tau_{22}-(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)}{1-\tau_{11}};\\
N' &= 1+\tau_{11}', & v_1 &= \frac{v_1'}{1+\tau_{11}'}, & v_2 &= \frac{-\tau_{12}'v_1'+(1+\tau_{11}')v_2'}{1+\tau_{11}'};\\
\tau_{11} &= \frac{\tau_{11}'}{1+\tau_{11}'}, & \tau_{12} &= \frac{\tau_{12}'}{1+\tau_{11}'}, & \tau_{22} &= \frac{\tau_{22}'+(\tau_{11}'\tau_{22}'-\tau_{12}'^2)}{1+\tau_{11}'}.
\end{aligned}
$$

Viertens endlich erweitern wir B_1 um B_2; dann wird aber B_1' von A_2 getroffen, was nicht sein soll. Um dem abzuhelfen, müssen wir A_2 so erweitern, dass es B_1' noch einmal im entgegengesetzten Sinne trifft, also um $(-A_1)$. So erhalten wir die Substitution:

$$\text{(C)} \qquad \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4 - \omega_3$$

mit den Umsetzungen der v und τ:

$$(39) \quad \begin{aligned} &N = 1, \quad v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2 - v_1, \quad \tau_{11}' = \tau_{11}, \quad \tau_{12}' = \tau_{12} - \tau_{11}, \\ &\qquad\qquad\qquad \tau_{22}' = \tau_{22} - 2\tau_{12} + \tau_{11}; \\ &N' = 1, \quad v_1 = v_1', \quad v_2 = v_2' + v_1', \quad \tau_{11} = \tau_{11}', \quad \tau_{12} = \tau_{12}' + \tau_{11}'; \\ &\qquad\qquad\qquad \tau_{22} = \tau_{22}' + 2\tau_{12}' + \tau_{11}'. \end{aligned}$$

Damit ist der Kreis der elementaren Operationen geschlossen und wir können das Resultat aussprechen:

Jede Aenderung unseres canonischen Querschnittsystems, welche dasselbe wieder in ein canonisches System überführt, und nur eine solche kann aus den 4 erzeugenden Operationen A, B, C, D zusammengesetzt werden.

Nun haben die Herren Clebsch und Gordan*), andererseits Hr. Kronecker**) auf arithmetischem Wege gezeigt, dass in der That jede Substitution, deren Coefficienten den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen, aus jenen 4 Erzeugenden zusammengesetzt werden kann. Aus diesem Satze und dem vorhergehenden ergiebt sich dann das schliessliche Resultat als Antwort auf die zu Anfang des Paragraphen aufgeworfene Frage:

Die Gleichungen (13) *resp.* (15) *sind nicht nur nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen dafür, dass eine lineare Substitution der Form* (12) *resp.* (14) *eine zulässige Aenderung unseres Querschnittsystems darstellt.*

§ 8.

Monodromie der Verzweigungspunkte.

An die im vorigen Paragraphen discutirte Frage knüpft sich nun eine weitere, welche für die Entwicklung der Theorie nicht minder fundamental ist.

Wie bereits § 1 hervorgehoben, erfordert eine vollständige Durchbildung der Theorie durchaus, *die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche als frei veränderliche Grössen zu betrachten.* Die Perioden erscheinen dann als Functionen dieser Veränderlichen; sollen sie *stetige* Functionen derselben bleiben, so muss man die durch ihre Aenderung

---

*) Abel'sche Functionen p. 304.

**) In Vorlesungen, vgl. Berl. Ac. Monatsber. 1866 (abgedr. Cr. J. Bd. 68, p. 273).

bedingte Deformation der Riemann'schen Fläche und des auf derselben verzeichneten Querschnittsystems als in der Weise vor sich gehend sich vorstellen, dass die Verzweigungspunkte die Querschnitte vor sich herschieben*). (Rückt z. B. in der Figur der Verzweigungspunkt a nach a', so ist das Stück ced des Querschnitts bis etwa zu der Form $ce'd$ auszudehnen.)

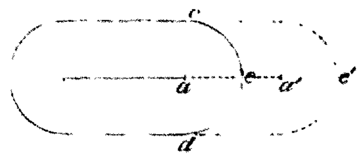

Fig. 8.

Diese Deformation der Fläche kann man nun — immer unter Vermeidung des Zusammenfallens von Verzweigungspunkten — solange fortsetzen, bis schliesslich jeder Verzweigungspunkt wieder eine Stelle einnimmt, welche schon in der ursprünglichen Gestalt der Fläche von einem solchen Punkte — sei es demselben, sei es einem andern — eingenommen war. Dann ist schliesslich die hyperelliptische Irrationalität wieder die ursprüngliche geworden, aber das Querschnittsystem hat eine Aenderung erlitten — natürlich unter Beibehaltung seiner Eigenschaft, ein canonisches System zu sein. Von einem solchen neuen Querschnittsystem soll nun unter Benutzung eines Terminus des Herrn Hermite**) gesagt werden: *es gehe durch Monodromie der Verzweigungspunkte aus dem ursprünglichen hervor.*

Die in Aussicht gestellte Frage ist dann diese:

*Lassen sich alle canonischen Querschnittsänderungen durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielen, oder zerfallen vielleicht die sämmtlichen Querschnittsysteme in eine Anzahl getrennter Classen derart, dass nur die je derselben Classe angehörenden Systeme durch Monodromie der Verzweigungspunkte in einander übergeführt werden können?****)

Um zu zeigen, dass in der That ersteres der Fall ist, dass also alle canonischen Querschnittsysteme in diesem Sinne zu einer und derselben Classe gehören, wird man an irgend ein passend zu wählendes Ausgangssystem anknüpfen dürfen: denn kann man von diesem zu jedem andern gelangen, so ist auch zwischen diesen andern der Uebergang möglich. Als solches Ausgangssystem möge das folgende (auch sonst schon mehrfach benutzte) gewählt werden:†)

Die Verzweigungspunkte 0 und 1, 2 und 3, 4 und 5 mögen

*) Vgl. die Figuren aus Riemann's Nachlass, ges. W. p. 404

**) C. R. Bd. 32 (1851).

***) Für die folgenden Entwicklungen vergleiche man die des Hrn. C. Jordan, tr. des subst. p. 357 ff. Dort leidet nur die Uebersicht darunter, dass die Frage mit der viel specielleren des Theilungsproblems verquickt und von dem anschaulichen Hilfsmittel der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche kein Gebrauch gemacht ist.

†) Das von Herrn Weierstrass und seinen Schülern benutzte Periodensystem wird aus dem im Texte gewählten dadurch erhalten, dass man A_2, B_2 durch B_2, $-A_2$ ersetzt.

durch Verzweigungsschnitte verbunden sein, von welchen keiner den andern trifft. Dann mögen

die Querschnitte:	A_1	A_2	B_1	B_2
die Punkte	0, 1	3, 4	1, 2	4, 5

in der in der Fig. 4 angegebenen Weise umschliessen (im obern Blatt verlaufende Linien sind ausgezogen, im untern verlaufende punktirt).

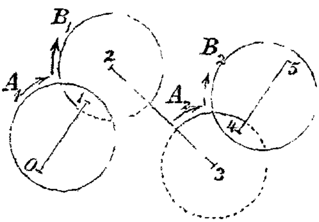

Fig. 4.

Durchlaufung der Querschnitte in positivem Sinne liefert dann*) die Perioden:

$$(40)\qquad \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ -\omega_3 & -\omega_4 & +\omega_1 & +\omega_2. \end{array}$$

Man kann nun leicht 4 Monodromien der Verzweigungspunkte angeben, deren Einfluss auf dieses Querschnittsystem gerade durch die erzeugenden Substitutionen A, B, C, D des § 7 dargestellt wird.

Lässt man nämlich *erstens* die Punkte 0 und 1 ihre Plätze wechseln, indem man den sie verbindenden Querschnitt um $+180^0$ um seine Mitte dreht, so nimmt das Querschnittssystem, wenn man gleichzeitig die übrigen Punkte in für die Zeichnung bequemer, sonst aber irrelevanter Weise verschiebt, die folgende Gestalt an:

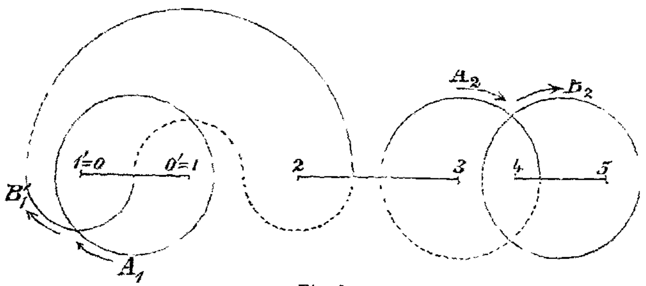

Fig. 5.

und man erhält aus dieser Figur, wie leicht zu übersehen, die folgenden Beziehungen zwischen den alten und neuen Perioden:

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2' = \omega_2,$$
$$\omega_3' = \omega_3, \qquad \omega_4' = \omega_4$$

— also genau die Substitution A.

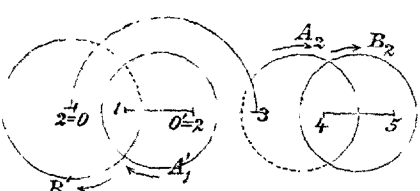

Fig. 6.

Lässt man *zweitens* die Punkte 0 und 2 ihre Plätze wechseln, indem man beide den Punkt 1 so umgehen lässt, dass er links von ihren Wegen bleibt, so gelangt man zu Figur 6, welche die

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 32, p. 392.

Relationen: $\omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_1, \quad \omega_4' = \omega_4$ zwischen den alten und neuen Perioden liefert — m. a. W. die Substitution B.

Lässt man *drittens* durch Vertauschung der Punkte 0 mit 1, 2 mit 3, 4 mit 5 das Querschnittsystem sich so verzerren, dass es die nachfolgende Gestalt erhält:

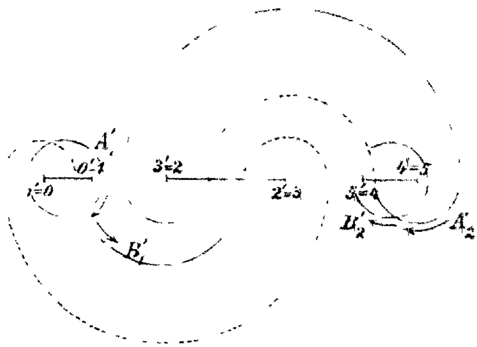

Fig. 7.

so erhält man folgende Substitution:

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4 = \omega_4 - \omega_3,$$

welche in § 7 mit C bezeichnet war.

Viertens endlich wird die Substitution D oder:

$$\omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \quad \omega_3' = \omega_4, \quad \omega_4' = \omega_3$$

erhalten durch Vertauschung von 0 mit 3, 1 mit 4, 2 mit 5 in der Weise dass die Figur in die folgende übergeht:

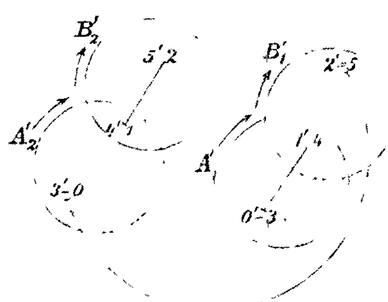

Fig. 8.

Es können also alle 4 erzeugenden Substitutionen durch Monodromie der Verzweigungspunkte erreicht werden. Nun haben wir aber in § 7 gesehen, dass jede lineare Periodentransformation aus diesen 4 Erzeugenden zusammengesetzt werden kann; also ergiebt sich in der That als Antwort auf die zu Beginn dieses Paragraphen aufgeworfene Frage der folgende Satz des Herrn C. Jordan*):

*Jede canonische Querschnittsänderung kann durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielt werden***).

§ 9.

Das Umkehrtheorem und die hyperelliptischen Functionen.

Nachdem alle diese vorbereitenden Betrachtungen erledigt sind, wenden wir uns zu dem fundamentalen Satze, welcher die Grundlage aller folgenden Entwicklungen bildet, nämlich zu dem *Jacobi'schen Umkehrtheorem*, das zunächst in seiner einfachsten Form ausgesprochen werden möge:

Sind w_1 *und* w_2 *mit den beiden Stellen* $(x, \sqrt{f(x)})$ *und* $(y, \sqrt{f(y)})$ *verbunden durch die Gleichungen:*

$$(41)\qquad \begin{aligned} w_1 &= \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^y \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \\ w_2 &= \int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^y \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \end{aligned}$$

in welchen unter a *ein Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche verstanden ist (von dessen Auswahl die Werthe der Integrale unabhängig sind), so sind die symmetrischen Functionen jener beiden Stellen eindeutige vierfach periodische Functionen von* w_1 *und* w_2***).

Unter symmetrischen Functionen sind dabei zunächst die rationalen symmetrischen Verbindungen beider Stellen, wie $x' + x''$ oder $\sqrt{fx'} + \sqrt{fx''}$ verstanden, des Weiteren aber auch bestimmte Categorien algebraischer Functionen dieser Verbindungen. Die letzteren sind durch mannigfache algebraische Relationen mit einander verknüpft, und die Theorie der vierfach periodischen Functionen besitzt eine Reihe von Mitteln, um solche Relationen in systematischer Weise abzuleiten und mit einander in Beziehung zu setzen. Man gelangt so durch die

---

*) Tr. des subst. p. 360.

**) Obwohl die Betrachtung hyperelliptischer Functionen höherer Ordnung ausserhalb des Rahmens dieser Vorlesungen liegt, so sei es doch an dieser Stelle gestattet ausdrücklich hervorzuheben, dass zwar die Entwicklungen von § 7, nicht aber die von § 8 für hyperelliptische Functionen von höherem p gültig bleiben; es soll dies an anderer Stelle ausgeführt werden (vgl. auch C. Jordan a. a. O. p. 364, art. 497).

***) Ueber eine allgemeinere Wahl der unteren Grenzen vergl. § 42.

Theorie dieser *transcendenten* Functionen hindurch zu einer tiefergehenden Erkenntniss bestimmter Classen *algebraischer* Relationen. So erscheint als eine Hauptaufgabe unserer Theorie:

Aufsuchung und Behandlung derjenigen algebraischen Probleme, in deren Natur man durch den Besitz der vierfach periodischen Functionen Einblick erhält. —

Solche Probleme sind es, welche den Gegenstand der folgenden Entwicklungen bilden; ihre genauere Bezeichnung kann erst im weiteren Verlauf gegeben werden.

I. Abschnitt.

Hyperelliptische Functionen und Formen; Gruppe.

§ 10.

Algebraische Definition hyperelliptischer Functionen.

Wir knüpfen zunächst an an das in § 9 aufgestellte Umkehrtheorem, indem wir damit beginnen, dass wir dasselbe in eine verallgemeinerte Form bringen. An Stelle der Gleichungen (41) schreiben wir nämlich die folgenden:

$$(42)\qquad v_i = \int_y^{x'} dv_i + \int_{y}^{x} dv_i + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} dv_i, \qquad i = 1, 2$$

indem wir 2ν von einander unabhängige Stellen $(x, \sqrt{f(x)})$ und $(y, \sqrt{f(y)})$ der Riemann'schen Fläche einführen und statt der allgemeinen Integrale I. Gattung w die Normalintegrale v benutzen. Die vierfach periodischen Functionen von v_1 und v_2 gehen dann über in rationale Functionen dieser Stellen; dieselben werden ausserdem noch abhängen von den Coefficienten a der Function $f(x)$, und wir wollen dahin übereinkommen, *dass wir für's erste* (d. h. in diesem Abschnitt) *nur solche Functionen in Betracht ziehen, welche auch von diesen Coefficienten in rationaler Weise abhängen.*

Die so erhaltenen Functionen der x, y, a sollen also zunächst *hyperelliptische* Functionen heissen.

Dieselben besitzen zwei charakteristische Eigenschaften. *Erstens* nämlich bringt eine lineare Transformation des zu Grunde liegenden algebraischen Gebildes keine Aenderung der v, τ mit sich. Die hyperelliptischen Functionen ändern sich also nicht, wenn man die x, y linear transformirt und gleichzeitig die a durch die Coefficienten derjenigen Function f ersetzt, in welche f durch jene Transformation übergeht; m. a. W.:

Hyperelliptische Functionen sind Covarianten der Function f und der Stellen $x' \ldots x^{(\nu)}$, $y' \ldots y^{(\nu)}$.

Zweitens aber bleiben unsere Functionen ungeändert, wenn man die Stellen x, y so durch andere ersetzt, dass die v_1, v_2 ungeändert bleiben. Wenn aber die 2ν Stellen x, y mit den 2ν Stellen $\xi' \ldots \xi^{(\nu)}$; $\eta' \ldots \eta^{(\nu)}$ durch die beiden Gleichungen:

$$(43) \qquad \int\limits_{y'}^{x'} dv_i + \cdots + \int\limits_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} dv_i = \int\limits_{\eta'}^{\xi'} dv_i + \cdots + \int\limits_{\eta^{(\nu)}}^{\xi^{(\nu)}} dv_i, \qquad (i = 1, 2)$$

verbunden sind, so existirt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems eine rationale Function $R(x)$ auf der Fläche, welche nur an den Stellen x und η Null und nur an den Stellen y und ξ unendlich gross wird (wobei etwa mehrfach auftretende Stellen in bekannter Weise zu berücksichtigen sind). Man nennt nun zwei Punktgruppen der Art, dass die Punkte der einen Gruppe Nullstellen, die der andern Unendlichkeitsstellen derselben rationalen Function auf der Fläche sein können, zu einander „corresidual“ oder „äquivalent“; und die erwähnte zweite Eigenschaft hyperelliptischer Functionen kann in der Weise ausgesprochen werden, dass man sagt:

Die hyperelliptischen Functionen bleiben ungeändert, wenn man die x, y durch andere Stellen ξ, η der Fläche ersetzt, welche die Eigenschaft haben, dass die x mit den η zusammen eine zu den y und den ξ äquivalente Punktgruppe bilden.

Es ist vielleicht gestattet die Definition der Aequivalenz auf Doppelgruppen der hier bezeichneten Art in der Weise auszudehnen, dass man die Doppelgruppe der x, y zu der Doppelgruppe der ξ, η dann äquivalent nennt, wenn die x mit den η zusammen zu den ξ und y im ursprünglichen Sinne äquivalent sind.

Beide charakteristischen Eigenschaften zusammen liefern dann die folgende algebraische Definition:

Hyperelliptische Functionen sind rationale Covarianten der Function f, welche von einer Doppelgruppe von Stellen $x', x'' \ldots x^{(\nu)}$, $y', y'' \ldots y^{(\nu)}$ in der Weise abhängen, dass sie sich nicht ändern, wenn man diese Doppelgruppe durch eine äquivalente Doppelgruppe ersetzt.

Insbesondere müssen sie also ungeändert bleiben, wenn man die x für sich oder die y für sich durch eine äquivalente einfache Gruppe ersetzt. Hieher gehört als einfachster Specialfall derjenige, in welchem die beiden äquivalenten einfachen Gruppen dieselben Stellen in veränderter Reihenfolge erhalten: *die hyperelliptischen Functionen sind symmetrisch in den x und symmetrisch in den y.*

§ 11.

Erweiterungen der Definition durch Heranziehung des formentheoretischen Gesichtspunkts und durch Einführung von Hilfspunkten.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Definition soll nun nach zwei Seiten hin erweitert werden.

Bereits in der Einleitung sind die einzelnen Stellen der Riemann'schen Fläche durch homogene Coordinaten definirt und die Coefficienten von f in homogener Weise eingeführt worden: in der grundsätzlichen Benutzung solcher homogener Veränderlicher soll die erste Erweiterung unserer Definition bestehen. Die bisher eingeführten Functionen werden dann *homogene Functionen nullter Dimension* der neuen Variabeln und die Consequenz der erweiterten Auffassung besteht nun eben darin, dass auch homogene Functionen von *anderer* Dimension betrachtet werden. *Solche homogene Functionen von anderer als der nullten Dimension sollen, wie es in der Algebra allgemein üblich ist, im folgenden kurz als Formen bezeichnet werden:* die Veränderung in der Auffassung der Fragestellungen, welche der Gebrauch von homogenen Variabeln mit sich bringt, lässt sich dann kurz in die Worte zusammenfassen:

Nicht allein Functionen, sondern auch Formen sollen Gegenstand der Untersuchung sein.

Die *zweite* Erweiterung unserer Definition knüpft an eine Auffassung der Grundbegriffe der Invariantentheorie, von welcher zwar in invariantentheoretischen Schriften gelegentlich Gebrauch gemacht worden ist, die aber trotz ihrer fundamentalen Bedeutung in die einleitenden Capitel der Lehrbücher, wohin sie gehört, noch keine Aufnahme gefunden hat.

Es handelt sich nämlich darum, dass man stets auch solche Formen mit in den Kreis der Betrachtung zu ziehen hat, welche ausser von den durch die jedesmalige Aufgabe bedingten Variabeln noch von gewissen Hilfsgrössen in beliebiger Anzahl abhängen. Diese Hilfsgrössen sind als zu den bereits vorhandenen cogrediente Veränderliche aufzufassen; ihre Einführung bedeutet also die Herbeiziehung von Covarianten mit einer noch grösseren Anzahl von Variabelnreihen, als sie an und für sich schon durch die Aufgabestellung bedingt ist.

Diese Einführung von Hilfsgrössen scheint auf den ersten Blick nur eine unnöthige Beschwerung der Formeln mit sich zu bringen; aber sie gewährt einen nicht geringen Vortheil. Es hindert nämlich nichts — und das ist der Gesichtspunkt, welcher hier hervorgehoben werden sollte — *den Nullpunkt, den Unendlichkeitspunkt und den Einheitspunkt des benutzten Coordinatensystems selbst als solche cogrediente*

Hilfspunkte einzuführen. Dadurch bekommen alle Rechnungen, welche an das Coordinatensystem anknüpfen, an sich invariantentheoretische Bedeutung. So erreichen wir mit viel geringeren Mitteln dieselben Vortheile, die man sonst wohl von der Einführung sogenannter „typischer" Coordinatensysteme erwartet.*)

Für unsere gegenwärtige Untersuchung bedingt diese Auffassung, dass wir *die symmetrischen Verbindungen der x und die Coefficienten von f* direct als die einfachsten hyperelliptischen Functionen auffassen dürfen.

§ 12.

Erste transcendente Definition hyperelliptischer Functionen; natürlicher Bereich der transcendenten Variabeln.

Neben die in den beiden vorigen Paragraphen erläuterte *algebraische* Definition der hyperelliptischen Functionen stellt sich nun eine zweite, welche als *transcendente* Definition bezeichnet werden soll. Sie beruht darauf, dass man statt der Stellen x, y des hyperelliptischen Gebildes und der Coefficienten a von f die durch Glchg. (42) definirten Normalintegrale v und ihre Thetamoduln τ als unabhängige Veränderliche ansieht. Die hyperelliptischen Functionen werden dadurch zu *eindeutigen Functionen der fünf Grössen:*

$$v_1,\; v_2,\; \tau_{11},\; \tau_{12},\; \tau_{22}, \tag{44}$$

welche ungeändert bleiben, wenn man v_1, v_2 durch

$$\begin{aligned} &v_1 + h_1 + h_3\tau_{11} + h_4\tau_{12}, \\ &v_2 + h_2 + h_3\tau_{12} + h_4\tau_{22} \end{aligned} \tag{44a}$$

ersetzt, unter h_1, h_2, h_3, h_4 beliebige ganze Zahlen verstanden.

Die fünf Grössen (44), welche als „*transcendente Argumente*" bezeichnet werden mögen, während die x, $\sqrt{f(x)}$ und a „*algebraische Argumente*" heissen sollen, sind nun ihrer ursprünglichen Entstehung zufolge auf einen *natürlichen Bereich* beschränkt: *die v können nur endliche Werthe annehmen, die τ nur solche, für welche die Ungleichungen* (11) *erfüllt sind.* Die Umkehrung des Abel'schen Theorems lehrt dann, dass *unsere hyperelliptischen Functionen im Innern dieses natürlichen Bereiches keine wesentlich singuläre Stelle**) besitzen.*

Unendlich grosse Werthe der v hingegen und diejenigen Werthe der τ, für welche eine jener Ungleichungen in eine Gleichung über-

---

*) Functionen, welche von solchen Hilfspunkten frei sind, werden wir wohl als *reine* Invarianten und Covarianten bezeichnen, ohne damit einen besonderen Vorzug derselben ausdrücken zu wollen. — Die „typischen" Coordinatensysteme behalten natürlich ihre Bedeutung für specielle Probleme.

**) Vgl. Weierstrass, Abh. zur Funct.-Lehre p. 130.

geht, sind als *Grenzstellen* des natürlichen Bereichs der Variabeln zu betrachten; in ihnen werden die hyperelliptischen Functionen wesentliche Singularitäten besitzen. Welcher Art aber diese Singularitäten sind, darüber ist bisher nur sehr wenig bekannt; und noch weniger weiss man darüber, ob jede Function der v und τ, welche die erwähnten Eigenschaften hat, wirklich eine hyperelliptische Function im Sinne der algebraischen Definition des § 10 ist. Es scheint daher vorläufig am zweckmässigsten zu sein, diese Frage ganz bei Seite zu lassen und der transcendenten Definition der hyperelliptischen Functionen die folgende Fassung zu geben:

Hyperelliptische Functionen im Sinne des § 10 sind solche eindeutige Functionen der transcendenten Argumente, welche in den algebraischen Argumenten rational sind.

§ 13.

Einführung des formentheoretischen Gesichtspunkts in die transcendente Definition.

Die zu Anfang von § 11 vorgenommene Einführung des formentheoretischen Gesichtspunkts in die algebraische Definition bedingt nun auch für die transcendente Definition eine analoge Umgestaltung. Um dieselbe zu erhalten, müssen wir zunächst von den Normalintegralen und Thetamoduln, die ja absolute Invarianten sind, wieder zurückgehen zu den ursprünglichen Integralen w und ihren Perioden. Wir haben dann die beiden Reihen von je fünf Veränderlichen:

$$(45)\qquad \begin{matrix} w_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14}, \\ w_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24}; \end{matrix}$$

die hyperelliptischen Formen werden homogene Functionen dieser Veränderlichen, deren Eigenschaften nun näher anzugeben sind.

Werden zunächst die x_1, x_2 linear transformirt, was der algebraischen Definition zufolge auf unsere Functionen ohne Einfluss ist, so transformiren sich auch die w und ω linear, sodass etwa:

$$w_1\ ,\ w_2 \text{ durch } \alpha w_1 + \beta w_2\ ,\ \gamma w_1 + \delta \omega_2$$

und gleichzeitig:

$$\omega_{i1}\,,\ \omega_{i2} \text{ durch } \alpha\omega_{i1} + \beta\omega_{i2}\,,\ \gamma\omega_{i1} + \delta\omega_{i2}$$

ersetzt werden. Bezeichnet man diese Operation als *Combination* der beiden Variabelnreihen (45), eine Form auf welche dieselbe keinen Einfluss hat, als eine *Combinante*, so kann man diese Eigenschaft so aussprechen:

Wir betrachten jetzt hyperelliptische Formen; dieselben sind Combinanten der beiden Variabelnreihen (45).

Nach den ersten Sätzen der Invariantentheorie setzen sich alle Combinanten von zwei Variabelnreihen aus den einfachsten derselben, den *zweigliedrigen Determinanten* zusammen. Solcher Determinanten treten hier 10 auf, nämlich die sechs bereits in § 3 als p_{ik} eingeführten, und ausserdem vier von der Form:

$$(46) \qquad \mathrm{v}_i = \omega_{2i} w_1 - \omega_{1i} w_2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Diese 10 Grössen sind durch eine Reihe von Identitäten mit einander verbunden, von welchen drei unabhängige z. B. sind:

$$(47) \qquad \begin{aligned} p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} &= 0, \\ p_{12}\mathrm{v}_3 + p_{23}\mathrm{v}_1 + p_{31}\mathrm{v}_2 &= 0, \\ p_{12}\mathrm{v}_4 + p_{24}\mathrm{v}_1 + p_{41}\mathrm{v}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ausserdem besteht noch die Relation (4):

$$p_{13} + p_{24} = 0.$$

Hyperelliptische Formen sind also eindeutige homogene Functionen dieser so verknüpften zehn Determinanten.

Zeichnet man eines der p_{ik}, etwa p_{12}, aus und dividirt mit ihm die übrigen Determinanten, so erhält man wieder die v und τ. Indem man die Identitäten (47) dazu verwendet, v_3, v_4, p_{34} durch diese Grössen auszudrücken, gelangt man zur Formulirung des Satzes:

Hyperelliptische Formen sind Functionen von $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, *multiplicirt mit einer Potenz von* p_{12}*).

§ 14.

Benutzung von Hilfsgrössen bei der transcendenten Definition.

Wie für die algebraische Definition (§ 11) kann es auch bei Benutzung der transcendenten Definition zweckmässig sein, auch solche Functionen in Betracht zu ziehen, welche von geeignet gewählten *Hilfsgrössen* abhängen. Soll insbesondere das Analoge zu dem erreicht werden, was dort die Auffassung der Grundpunkte des Coordinatensystems als cogredienter Hilfspunkte erzielte, so wird man hier solche Grössen einzuführen haben, dass man die w selbst als Combinanten auffassen kann. Dies wird am bequemsten dadurch erreicht, dass man die Coefficienten in den Ausdrücken der w durch die v, also die *vier Perioden erster Art*, **) selbst als solche Hilfsgrössen einführt. So gelangt man zu der folgenden erweiterten Bestimmung:

---

*) Ganz ebenso gelangt man im Falle der elliptischen Functionen dazu, die ganzen Invarianten $\wp$, $\wp'$, g_2, g_3 als Product je einer Potenz von ω_1 in eine Function von v und τ aufzufassen.

**) Vgl. z. B. auch Staude, diese Ann. Bd. 24, p. 288ff., wo die α_{ik} eben unsere ω_{ik} sind.

*Hyperelliptische Formen sind doppelt binäre Formen von ω_{11}, ω_{12} einerseits, ω_{21}, ω_{22} andererseits, deren Coefficienten eindeutige Functionen von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sind.**)

§ 15.

Die Hauptgruppe.

Es bleibt noch übrig, die unter (44a) gegebenen Eigenschaften der hyperelliptischen Functionen auf die Formen zu übertragen und dadurch die Definition derselben zu vervollständigen. Dazu müssen wir beachten, einmal, dass unsere algebraischen Argumente ungeändert bleiben bei Vermehrung der w um gleiche Vielfache ihrer entsprechenden Perioden; dann aber auch, dass jene Argumente unabhängig sind von der Art, wie die Querschnitte auf der Riemann'schen Fläche gezogen sind. Beides fassen wir zusammen in die Aussage:

Die hyperelliptischen Formen bleiben ungeändert, wenn ihre Variabeln vermöge folgender Gleichungen durch neue ersetzt werden:

$$(48)\qquad \begin{aligned} w' &= w + h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4,\\ \omega_1' &= \phantom{w+{}} a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4,\\ \omega_2' &= \phantom{w+{}} b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4,\\ \omega_3' &= \phantom{w+{}} c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4,\\ \omega_4' &= \phantom{w+{}} d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4. \end{aligned}$$

Die h, sowie die a, b, c, d bedeuten dabei ganze Zahlen; die letzteren müssen überdies den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen. Zur Abkürzung sind die Indices der w und die *ersten* Indices der ω weggelassen.

Werden zwei Substitutionen der Form (48) nach einander angewendet, so hat die resultirende Substition ebenfalls dieselbe Form; m. a. W.:

Alle in der Form (48) enthaltenen Operationen bilden eine Gruppe.

Diese Gruppe soll im folgenden kurz als „*die Hauptgruppe*“ bezeichnet werden; die transcendente Definition hyperelliptischer Formen nimmt dann folgende Gestalt an:

Hyperelliptische Formen sind eindeutige analytische Invarianten der Hauptgruppe (welche in den algebraischen Argumenten rational sind).

---

*) Hier zeigt sich der Theorie der elliptischen Functionen gegenüber insofern ein bemerkenswerther Unterschied, als man bei letzteren nicht im Stande ist, die Coefficienten von f_4 in ähnlicher Weise, wie dies im Texte mit denjenigen von f_6 geschehen ist, als Functionen der transcendenten Variabeln aufzufassen; man muss dort vielmehr bei den „reinen“ Invarianten stehen bleiben, weil man eben den v, τ nur eine Periode ω_1 hinzufügen kann, die gerade ausreicht, um überhaupt zu Formen zu gelangen.

Diejenigen hyperelliptischen Formen und Functionen welche die x, y, bezw. die w nicht enthalten, sondern allein von den a, bezw. den ω abhängen, sollen im Folgenden, analog der im Gebiete der elliptischen Functionen eingebürgerten Terminologie, als *hyperelliptische Modulformen und Modulfunctionen* von den *eigentlichen hyperelliptischen Formen und Functionen* unterschieden werden, welche von *beiden* Classen von Argumenten abhängen.

II. Abschnitt.

Untergruppen und Stufen.

§ 16.

Algebraische Functionen der algebraischen Argumente; Untergruppen von endlichem Index.

Neben den rationalen Functionen der algebraischen Argumente sollen nunmehr auch *solche algebraische Functionen der algebraischen Argumente* betrachtet werden, *welche eindeutige Functionen der transcendenten Argumente sind.*

Diese Functionen werden nun nicht mehr allen Operationen der Hauptgruppe (46) gegenüber sich invariant verhalten, sondern sie werden, wenn man alle diese Operationen auf sie anwendet, eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Da alle jene Operationen, welche einen Werth einer solchen Function ungeändert lassen, eine Untergruppe bilden, deren Index gleich ist der Anzahl der verschiedenen Werthe der Function, so folgt, dass *jede der neuen Functionen als Invariante zu einer Untergruppe von endlichem Index der Hauptgruppe* (46) *gehört.*

Bleibt andererseits eine Function bei allen Operationen einer solchen Untergruppe ungeändert, so wird sie, wenn alle Operationen der Hauptgruppe auf sie angewendet werden, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen, nämlich so viele, als der Index der Untergruppe beträgt. Die symmetrischen Functionen dieser verschiedenen Werthe werden daher bei allen Operationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, d. h. sie werden, falls sie den pag. 221 angedeuteten Bedingungen genügen, hyperelliptische Functionen im Sinne des ersten Abschnitts sein.

Die eingeführte erweiterte Definition hyperelliptischer Functionen erweist sich also als identisch mit der folgenden:

Hyperelliptische Functionen sind eindeutige Functionen der transcendenten Argumente, welche einer in der Hauptgruppe (46) *enthaltenen Untergruppe von endlichem Index gegenüber sich invariant verhalten und dabei von den algebraischen Argumenten algebraisch abhängen.*

Es würde daher eine erste Hauptaufgabe einer systematischen Theorie der hyperelliptischen Functionen sein:

Alle in der Hauptgruppe enthaltenen Untergruppen von endlichem Index aufzuzählen.

Die entsprechende Hauptaufgabe in der Theorie der elliptischen Functionen kann insofern als gelöst angesehen werden, als man im Stande ist, die zugehörigen „Fundamentalpolygone" in der Ebene der complexen Grösse τ anzugeben.

Soll diese Theorie auf hyperelliptische Functionen übertragen werden, so würde vor allem nöthig sein, dass Analogon zum „Fundamentaldreieck" der τ-Ebene, den Fundamentalbereich im sechsfach ausgedehnten Gebiete der drei complexen Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen. Auf die fundamentale Bedeutung dieser Frage sei deshalb hier nachdrücklich hingewiesen.

§ 17.

Congruenzuntergruppen und Stufen.*)

Die bis jetzt allein bekannten Untergruppen besitzen eine gemeinsame Eigenschaft, (welche keineswegs allen überhaupt möglichen Untergruppen zukommt, wie man aus dem Verhalten der elliptischen Functionen schliessen darf): die Operationen jeder dieser Untergruppen lassen sich dadurch von allen übrigen Operationen der Hauptgruppe trennen, dass ihre Coefficienten gewissen Congruenzen in Bezug auf einen Zahlenmodul n genügen.

Jede solche Untergruppe, deren Operationen sich durch Congruenzen modulo n definiren lassen, welchen ihre Coefficienten genügen, soll „Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe" heissen.

Das Wort „Stufe" wird dann von den Gruppen auf die zu ihnen gehörenden Functionen übertragen; wir sprechen von *hyperelliptischen Functionen n^{ter} Stufe* als von solchen, *welche bei den Operationen einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe ungeändert bleiben.*

Eine besonders erwähnenswerthe Art von Congruenzuntergruppen sind die *Principaluntergruppen*, welche folgendermassen zu definiren sind. *Eine Substitution der Hauptgruppe heisst modulo n zur Identität congruent, wenn in ihr alle Coefficienten bis auf a_1, b_2, c_3, d_4 der Null, diese vier aber der Eins congruent sind.* Zwei solche Substitutionen nach einander angewandt, liefern wieder eine Substitution derselben Eigenschaft; man kann daher sagen:

Alle Substitutionen, welche mod. n zur Identität congruent sind, bilden eine Gruppe, welche die zum Modul n gehörende Principaluntergruppe heissen soll.

*) Vgl. hier und im folgenden: Klein, zur Theorie der ell. Modulfunct., diese Ann. Bd. 17, p. 62.

Zwei Substitutionen, deren entsprechende Coefficienten nach dem Modul n congruent sind, sollen selbst nach diesem Modul congruent beissen. Nun kann man leicht zeigen: Zwei Substitutionen, deren eine durch Zusammensetzung mit einer zur Identität congruenten Substitution aus der andern hervorgeht, sind nach demselben Modul zu einander congruent; und umgekehrt: sind zwei Substitutionen zu einander congruent, so kann jede durch Zusammensetzung der andern mit einer nach demselben Modul zur Identität congruenten Substitution erhalten werden. Daraus folgt aber weiter: wenn man eine zur Identität congruente Substitution durch irgend eine Substitution der Hauptgruppe transformirt, erhält man wieder eine zur Identität congruente Substitution; m. a. W.:

Die Principaluntergruppen sind in der Hauptgruppe ausgezeichnet enthalten.

Der *Index der zum Modul n gehörenden Principaluntergruppe*, also die Anzahl der modulo n verschiedenen Substitutionen bestimmt sich*) für primzahlige Moduln folgendermassen:

Die Zahlen a in (12) können alle (mod. n) verschiedene Werthsysteme annehmen, mit Ausnahme des Systems:

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv 0 \pmod{n}$$

(mit welchem die Gleichung $[a, c] = 1$ nicht befriedigt werden könnte), im ganzen also $n^4 - 1$ Werthsysteme. Sind die a bestimmt, so können drei von den c noch willkürlich angenommen werden, was auf n^3 Arten möglich ist; das vierte ist dann durch $[a, c] = 1$ bestimmt. Sind die a und c fixirt, so müssen die b den Gleichungen $[a, b] = 0$, $[b, c] = 0$ genügen, was durch n^2 mod. n verschiedene Werthsysteme geschehen kann; von diesen ist aber wieder dasjenige unbrauchbar, in welchem alle b durch n theilbar sind. Die d können dann noch auf n Arten den drei übrigen Gleichungen (12) gemäss bestimmt werden.

Beschränkt man sich also auf Modulfunctionen, so hat man das Resultat:

Ist n eine Primzahl, so beträgt der Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Abel'schen Gruppe:

$$N = (n^4 - 1) \cdot n^3 \,.\, (n^2 - 1) \cdot n. \tag{49}$$

Werden auch die h in Betracht gezogen, welche n^4 mod. n verschiedene Werthe annehmen können, so folgt:

Der Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Hauptgruppe beträgt, wenn n Primzahl:

$$n^4 N. \tag{50}$$

*) C. Jordan, traité des subst. p. 176.

§ 18.

Der n^{ten} Stufe adjungirte Functionen.

Die Untersuchung derjenigen Functionen, welche im Sinne des § 15 zu einer bestimmten Stufe gehören, wird häufig dadurch erleichtert, dass man gleichzeitig mit ihnen noch gewisse andere Functionen betrachtet, welche bei den Operationen der zugehörigen Congruenzgruppe zwar nicht völlig ungeändert bleiben, aber doch nur einfache leicht angebbare Aenderungen erfahren. Insbesondere gilt das von denjenigen Functionen, bei welchen diese Aenderungen nur in dem Hinzutreten multiplicativer Einheitswurzeln bestehen. Diese werden daher mit einem besonderen Namen versehen, indem man definirt:

Aendert sich eine Function bei den Operationen einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe nur um multiplicative m^{te} Wurzeln der Einheit, so wird sie „in Bezug auf m^{te} Einheitswurzeln zur n^{ten} Stufe adjungirt" genannt.

Diejenige Untergruppe, zu welcher eine solche Function wirklich gehört, braucht dabei keineswegs eine Congruenzuntergruppe zu sein.

Bisher wurde daran festgehalten, dass nur *eindeutige* Functionen der transcendenten Variabeln in Betracht gezogen werden sollten. Dadurch würden alle diejenigen Formen ausgeschlossen werden, bei welchen die in dem Satze pag. 222 erwähnte Potenz von p_{12} keinen ganzzahligen Exponenten besitzt, also alle Formen von gebrochener Dimension in den transcendenten Argumenten. Gleichwohl drängen sich solche Formen vielfach der Untersuchung auf, und es scheint daher ihre Ausschliessung nicht gerechtfertigt. Es möge daher der Kreis der zu untersuchenden Functionen durch die folgende Festsetzung erweitert werden:

Neben den eindeutigen Formen der w, ω sollen auch solche mehrdeutige Formen derselben beigezogen werden, welche durch Multiplication mit einer gebrochenen Potenz von p_{12} in eindeutige Functionen der Normalintegrale und Thetamoduln übergehen.

Solche Functionen werden sich, wenn die Variabeln geschlossene Wege durchlaufen, um Einheitswurzeln ändern können, die man nur zu bestimmen im Stande ist, wenn man die Wege kennt, welche die einzelnenen homogenen Variabeln durchlaufen haben (nicht nur den Weg ihres Verhältnisses).

Wie aber sind — so wird man fragen müssen — Formen dieser Art in die Stufeneintheilung einzuordnen? Das wird offenbar dadurch geschehen können, dass man die niedrigste Potenz der betreffenden Form bildet, welche von ganzzahliger Dimension und somit in den ω eindeutig ist. Gehört diese Potenz überhaupt nicht in die Stufentheorie, so wird die Form selbst um so weniger dahin gehören; bleibt die Potenz aber bei einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe ungeändert, so wird man berechtigt sein, die Form selbst als dieser Stufe adjungirt zu betrachten.

Diese Ueberlegungen mögen zusammengefasst werden in die Formulirung:

Im weiteren Sinne sollen auch solche Formen der n^{ten} Stufe adjungirt heissen, welche bei den Operationen dieser Stufe sich um multiplicative Einheitswurzeln ändern, die durch Angabe der Operation allein, ohne Angabe des Weges, auf welchen die ursprünglichen Werthe der homogenen Variabeln in die neuen übergeführt werden, sich nicht bestimmen lassen.

§ 19.

Rationalitätsbereiche, volle Formensysteme, volle Relationensysteme.

Durch die Stufeneintheilung ist nun den weiteren Entwickelungen ein bestimmtes Programm vorgezeichnet.

In erster Linie wird man verlangen, alle Functionen der einzelnen Stufe zu kennen. Das wird dann als erreicht angesehen werden können, wenn man eine endliche Anzahl solcher Functionen kennt, durch welche sich alle andern derselben Stufe rational darstellen lassen; oder um die gebräuchlichen Ausdrücke zu benutzen: es wird sich darum handeln, *den der einzelnen Stufe zugeordneten Rationalitätsbereich durch ein volles System associirter Formen festzulegen.*

Es wird dann weiter erforderlich sein, die *algebraischen Relationen* aufzusuchen, welche die Formen dieses Systems einerseits unter sich, andererseits mit den Formen der niedrigeren Stufen, besonders der ersten, verbinden. Diese Relationen besitzen bestimmte algebraische Eigenthümlichkeiten, über deren Natur eben der Umstand Aufklärung verschafft, dass man im Stande ist, alle in ihnen auftretenden Grössen derart als eindeutige Functionen unabhängiger Veränderlicher darzustellen, dass die Relationen identisch (für alle zulässigen Werthe dieser Variabeln) erfüllt werden. Damit ist dann zugleich, bestimmter als es schon in § 9 geschehen ist, den *algebraischen Anwendungen der* Theorie der Weg gewiesen: es wird sich darum handeln, *die algebraischen Eigenschaften derjenigen Relationen zu charakterisiren, in deren Natur man dadurch Einsicht erhält, dass man im Stande ist, sie durch Einsetzen hyperelliptischer Functionen von unabhängigen Veränderlichen identisch zu befriedigen*, oder wie man es häufig auszudrücken pflegt „*welche man durch hyperelliptische Functionen zu lösen im Stande ist.*“

Die Einführung des *formentheoretischen* Gesichtspunkts modificirt beide Fragestellungen. Man wird sein Augenmerk darauf richten können, alle *Formen* der einzelnen Stufe aufzustellen; und man wird dies dadurch zu erreichen streben, dass man nach einer endlichen Anzahl von Formen fragt, durch welche sich alle Formen derselben Stufe *rational und ganz* darstellen lassen.

Dass ein solches endliches volles Formensystem in jedem Falle existirt, wird man aus den Untersuchungen des Herrn Hilbert*) schliessen dürfen; man wird dann die Aufgabe folgendermassen zu formuliren haben:

Für jede Stufe ist ein zugehöriges volles Formensystem aufzustellen.

Dem ganz entsprechend würde die zweite Fragestellung zu modificiren sein. Man würde alle auftretenden Relationen so zu schreiben haben, dass sie aussagen: bestimmte ganze Functionen der Formen des Systems sind identisch Null. Man würde dann nur solche Relationen dieser Art als selbständig aufzufassen haben, deren linke Seiten sich nicht aus den linken Seiten einfacherer Relationen mit ganzen Functionen als Coefficienten rational und ganz zusammensetzen lassen, und man würde eine erschöpfende Aufzählung aller solcher selbständigen Relationen verlangen können; m. a. W. die Aufgabe würde sein, *dem vollen Formensystem ein volles Relationensystem an die Seite zu stellen.*

Uebrigens sind diese Fragen nach den vollen Systemen bei der gegenwärtigen Entwicklung der Theorie keineswegs von unmittelbarer Bedeutung: für diejenigen Fragen der Anwendung, welche zur Zeit allein in Betracht kommen, genügt stets die Kenntniss aller derjenigen Formen u. bezw. Relationen, *deren Grad eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.* Deren erschöpfende Aufzählung aber kann in den meisten Fällen mit weit einfacheren Mitteln geleistet werden. —

Alle diese Aufgaben nun, die hier für die ganze Stufe, m. a. W. für die Principaluntergruppe, ausgesprochen sind, werden in gleicher Weise für die übrigen Untergruppen der Stufe sich formuliren lassen.

Im Folgenden wird es sich nun keineswegs darum handeln, diese Aufgaben, sei es allgemein, sei es für specielle Untergruppen, zu lösen oder auch nur systematisch in Angriff zu nehmen. Vielmehr sollen alle diese allgemeinen Formulirungen zunächst nur dazu dienen, den folgenden Einzeluntersuchungen bestimmte anzustrebende Zielpunkte anzuweisen und die Stellen zu bezeichnen, an welchen die erhaltenen Einzelresultate in einer systematischen Entwicklung Platz finden würden.

*) Gött. Nachr. 1888, p. 450.

III. Abschnitt.

Specielle Discussion der ersten und der zweiten Stufe.

§ 20.

Hyperelliptische Formen I. Stufe.

Zum Zwecke der Aufstellung der hyperelliptischen Formen I. Stufe möge zurückgegriffen werden auf die algebraische Definition der §§ 10, 11. Zunächst handelt es sich um die Aufzählung der *Modulformen I. Stufe*: das sind nach den Erörterungen a. a. O. keine andern als die *sieben Coefficienten der Grundform f.*

Von eigentlichen hyperelliptischen Formen I. Stufe mögen hier allein diejenigen Erwähnung finden, welche von nur *zwei* Stellen $x'x''$ des algebraischen Gebildes abhängen. Für solche reducirt sich die in § 11 geforderte Eigenschaft, für alle corresidualen Werthsysteme denselben Werth anzunehmen, einfach auf die Symmetrie in x' und x''; denn ein allgemeines Punktepaar des hyperelliptischen Gebildes vom Geschlechte 2 ist nur mit sich selbst äquivalent. Alle *Functionen* dieser Art im erweiterten Sinne des § 11 werden sich, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, rational ausdrücken lassen durch die folgenden vier:

$$(51)\quad X_1 = x' + x'',\ X_2 = x' \cdot x'',\ X_3 = \sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')},\ Y = \sqrt{f(x')} + \sqrt{f(x'')}.$$

Aus diesen lassen sich an Formen gewinnen einmal die folgenden vier:

$$(52)\qquad \mathsf{X}_1 = x_1' x_1'',\quad \mathsf{X}_2 = x_1' x_2'' + x_2' x_1'',\quad \mathsf{X}_3 = x_2' x_2'',$$
$$\mathsf{X}_4 = \sqrt{f(x_1', x_2')} \cdot \sqrt{f(x_1'', x_2'')};$$

Dann aber noch (an Stelle des einen Y) vier weitere der Form:

$$(53)\quad \mathsf{Y}_\alpha = x_1'^{\alpha} x_2'^{3-\alpha} \sqrt{f(x_1'', x_2'')} + x_1''^{\alpha} x_2''^{3-\alpha} \sqrt{f(x_1', x_2')},\quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

welche auch unter Einführung eines Hilfspunkts zu:

$$(54)\qquad \mathsf{Y}_t = (x' t)^3 \sqrt{f(x_1'', x_2'')} + (x'' t)^3 \sqrt{f(x_1, x_2)}$$

zusammengezogen werden können und erst *diese 8 Formen werden zusammen mit den 7 Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_6$ das volle Formensystem I. Stufe darstellen.*

Diese Functionen und Formen sind nun durch eine Reihe Relationen verbunden. Die 7 Coefficienten a zwar sind von einander unabhängig; aber die vier Functionen (51) hängen von nur zwei unabhängigen Veränderlichen ab und müssen daher durch zwei Relationen mit einander verbunden sein. Solche zwei Relationen erhält man leicht in der Gestalt:

$$(55)\qquad X_3^2 = G_6(X_1, X_2);\qquad Y^2 = G_6'(X_1, X_2) + 2 X_3$$

indem G_6, G_6' ganze Functionen 6. Grades von X_1, X_2 bedeuten, deren Coefficienten sich rational (und ganz) aus den a zusammensetzen lassen.

§ 21.

Die Kummer'sche Fläche, bezogen auf ein rationales Coordinatensystem.

Statt der ersten Gleichung (55) kann auch eine Gleichung erhalten werden, welche nur vom 4. Grade ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur statt X_3 eine andere Function:

$$(56) \qquad \mathfrak{X}_3 = \frac{\sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')} + F(x', x'')}{(x'-x'')^2}$$

einzuführen, welche mit Y_3 durch eine umkehrbar eindeutige Beziehung mit in X_1, X_2 rationalen Coefficienten verbunden, also X_3 vollständig zu vertreten geeignet ist. Unter $F(x', x'')$ ist dabei eine ganze symmetrische Function von x' und x'' verstanden, welche in jeder dieser Grössen vom 3. Grade ist und für $x' = x''$ mit $f(x')$ identisch wird. Die verlangte Gleichung wird sofort erhalten, wenn man aus der Definition von $\mathfrak{X}_3$ die Wurzeln entfernt; man findet zunächst:

$$(57) \qquad \mathfrak{X}_3^2 - 2\,\mathfrak{X}_3 \cdot \frac{F(x', x'')}{(x'-x'')^2} + \frac{F(x', x'')^2 - f(x')\cdot f(x'')}{(x'-x'')^4} = 0.$$

Nun ist $(x'-x'')^2$ eine ganze Function 2. Grades, $F(x', x'')$ eine solche 3. Grades von X_1 und X_2; ferner ist $F(x', x'')^2 - f(x')\cdot f(x'')$ durch $x' - x''$, also wegen der Symmetrie in x' und x'' auch durch $(x'-x'')^2$ theilbar, und der Quotient ist eine ganze Function 4. Grades von X_1 und X_2. Wird also die Gleichung (57) mit $(x'-x'')^2$ multiplicirt, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(58) \qquad \mathfrak{X}_3^2 \cdot G_2(X_1 X_2) + \mathfrak{X}_3 \cdot G_3(X_1, X_2) + G_4(X_1, X_2) = 0,$$

in welcher G_2, G_3, G_4 ganze Functionen der angegebenen Grade bezeichnen.

Diese Gleichung (58), welche die erwähnte reducirte Gestalt der ersten Gleichung (55) vorstellt, ist vom vierten Grade in den drei Variabeln X_1, X_2, $\mathfrak{X}_3$. Deutet man diese als Punktcoordinaten im dreidimensionalen Raume, so stellt Gleichung (58) eine Fläche vierten Grades dar, welche wir eine *Kummer'sche Fläche**) nennen wollen, indem wir den Nachweis ihrer Identität mit der gewöhnlich so genannten Fläche auf später verschieben**).

---

*) Dies ist offenbar die einfachste Definition der Kummer'schen Fläche. Man vergleiche übrigens, was die Beziehung derselben zu den hyperelliptischen Functionen angeht, die zusammenfassende Darstellung bei Reichardt. (Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen, Leipz. Diss. 1887, auch Nova acta Leop. Bd. 50)

**) Vgl. p. 241, Fussnote.

Die Werthe von X_1 und X_2 bestimmen vier Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes, die etwa (vgl. z. B. diese Ann. Bd. 27, p. 446) mit:

$$x', x'', \quad \bar{x}', \bar{x}'', \quad x', \bar{x}'', \quad \bar{x}', x''$$

bezeichnet werden mögen. Wird noch der Werth von X_3 oder $\overline{X}_3$ hinzugenommen, so werden von diesen vier Punktepaaren die beiden letzten ausgeschlossen, während die beiden ersten bleiben. Dass kann aber folgendermassen ausgedrückt werden:

Jedem Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes entspricht ein und nur ein Punkt der Kummer'schen Fläche, aber jedem Punkte der Kummer'schen Fläche entsprechen im allgemeinen zwei und nur zwei Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes.

Die Trennung dieser beiden Punktepaare geschieht nun dadurch, dass man noch die Function Y mit heranzieht, welche für das eine jener Punktepaare den entgegengesetzten Werth annimmt wie für das andere. Das legen wir uns auf Grund der zweiten Gleichung (55) dahin aus, dass wir uns die Kummer'sche Fläche als doppelt überdeckt vorstellen; und wir erhalten so das Resultat:

„*Die Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes entsprechen im allgemeinen in umkehrbar eindeutiger Weise den Punkten der doppelt überdeckten Kummer'schen Fläche.*“

Was die in den beiden letzten Sätzen beigefügten Worte „im allgemeinen“ betrifft, so sind dieselben dahin zu präcisiren, dass nur *eine* Ausnahme besteht, indem *dem unendlich fernen Punkte der Fläche auf der $\overline{X}_3$-Axe* (für welchen also $\overline{X}_3 = \infty$, X_1 und X_2 endlich), *die Gesammtheit der specialisirten Punktepaare des Gebildes entspricht,* d. h. derjenigen Punktepaare, für welche $x' = \bar{x}''$ ist. Weitere Ausnahmen aber sind nicht vorhanden.

Die doppelte Ueberdeckung der Fläche ist übrigens über derselben *unverzweigt*, indem $Y^2 = 0$ eine *Berührungsfläche* der Kummer'schen Fläche vorstellt.

Will man die Gleichung der Kummer'schen Fläche in homogener Form haben, so muss man, um den Nenner von $\overline{X}_3$ zu beseitigen, die übrigen Coordinaten mit $(x'x'')^2$ multipliciren. Man würde also an Stelle der vier Formen (52) die vier folgenden zu Grunde zu legen haben:

$$(59) \qquad \begin{aligned} \overline{X}_1 &= (x'x'')^2 x_1' x_1''; & \overline{X}_2 &= (x'x'')^2 (x_1' x_2'' + x_2' x_1''); \\ \overline{X}_3 &= (x'x'')^2 x_2' x_2''; & X_4 &= \sqrt{f(x')}\,\sqrt{f(x'')} + F(x', x''). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Kummer'schen Fläche nimmt dann die Gestalt an:

$$(60) \qquad \overline{X}_4^2 \cdot G_2(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3) + \overline{X}_4\, G_3(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3) + G_4(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3) = 0$$

in welcher unter den G ganze homogene Functionen der Grade 2, 3, 4 zu verstehen sind. Der Ausnahmepunkt von welchem soeben die Rede war, hat in diesem homogenen Systeme die Coordinaten:

$$(61) \qquad \overline{X}_1 = 0, \quad \overline{X}_2 = 0, \quad \overline{X}_3 = 0, \quad \overline{X}_4 \gtrless 0;$$

er ist also ein Knotenpunkt und:

$$G_2(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3) = 0$$

ist die Gleichung des Tangentialkegels, welchen die Fläche in ihm besitzt.

Die doppelte Ueberdeckung der Fläche stellt sich in diesem homogenen Systeme durch irgend eine der Gleichungen:

$$(62) \qquad \mathrm{Y}_t^2 = G_6(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4)$$

dar, welche als Analoga zu der zweiten Gleichung (55) erhalten werden, wenn:

$$(63) \qquad \overline{\mathrm{Y}}_t = (x'x'')^3 (t't'')^3 \mathrm{Y}_t$$

gesetzt wird. Welche von diesen Gleichungen gewählt wird, ist gleichgültig; denn man zeigt leicht, dass auch Gleichungen der Form bestehen:

$$(64) \qquad \mathrm{Y}_t \cdot \mathrm{Y}_\tau = G_6(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4),$$

sodass also die verschiedenen Y sich rational durch einander ausdrücken und die den verschiedenen Werthe von t entsprechenden Gleichungen (62) dieselbe Irrationalität auf der Fläche definiren. Wir haben sonach eine ganze Schaar Berührungsflächen 6. Ordnung, welche alle dieselbe Irrationalität auf der Kummer'schen Fläche definiren.

Das *Coordinatensystem*, auf welches die Kummer'sche Fläche in den Gleichungen (58) oder (60) bezogen erscheint, kann als ein *rationales* bezeichnet werden, insofern die Coefficienten mit deren Hilfe sich die Coordinaten der einzelnen Punkte als rationale Functionen der Punktepaare des algebraischen Gebildes ausdrücken, rational von den Coefficienten der Grundform f abhängen. Wollte man aber von der — etwa in einem ganz beliebigen Coordinatensystem gegebenen — Kummer'schen Fläche ausgehen, so würde man zur *Einführung* unseres Coordinatensystems allerdings einer Irrationalität bedürfen, da der durch (61) bestimmte Knotenpunkt der Fläche von einer solchen abhängt.*)

*) Wollte man Gewicht darauf legen, keine entbehrlichen Hilfspunkte zu benutzen, wie es in den Formeln des Textes die Grundpunkte des Coordinatensystems sind (vgl. § 11), so würde man in den Formen $\mathrm{X}_1\ \mathrm{X}_2\ \overline{\mathrm{X}}_3$ die bilinearen Factoren, welche nach Abtrennung des Determinantenquadrats übrig bleiben, zu ersetzen haben durch Polaren von irgend drei quadratischen Covarianten von f, etwa l_x^2, m_x^2, n_x^2 *) und die Form F durch eine Polare von f selbst, sodass man erhielte:

*) Vgl. Clebsch, binäre Formen p. 296.

§ 22.

Hyperelliptische Modulformen II. Stufe.

Die Untersuchung der hyperelliptischen Formen II. Stufe soll in den folgenden Paragraphen in der Weise geführt werden, dass mit der gruppentheoretischen Untersuchung der Principaluntergruppe II. Stufe begonnen wird. Daran wird sich die Aufstellung eines Systems von hyperelliptischen Formen schliessen, die bei den Operationen dieser Gruppe ungeändert bleiben. Jede einzelne dieser Formen, und ebenso bestimmter Combinationen derselben, wird aber auch noch bei andern Operationen ungeändert bleiben; und dadurch werden wir zu einer Reihe weiterer Untergruppen II. Stufe gelangen.

Diese Untersuchung möge begonnen werden mit einer Reihe von Sätzen des Herrn C. Jordan, für deren Beweis auf dessen traité des substitutions verwiesen werde:

I. *Jede Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt, kann zusammengesetzt werden aus einer Anzahl elementarer Aenderungen, welche darin bestehen, das jedesmal ein Verzweigungspunkt einen andern umkreist.**)

II. *Jede solche elementare Aenderung bewirkt eine Transformation der Perioden, welche modulo 2 zur Identität congruent ist.***)

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

III. *Jede Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt, bewirkt eine Transformation der Perioden, welche mod. 2 zur Identität congruent ist.****)

IV. *Die Principaluntergruppe II. Stufe entsteht aus folgenden fünf erzeugenden Substitutionen.*†)

$$X_1 = (x'x'')^2\, l_{x'}\, l_{x''}, \qquad X_2 = (x'x'')^2 m_{x'}\, m_{x''}, \qquad X_3 = (x'x'')^2 n_{x'}\, n_{x''},$$

$$X_4 = \sqrt{f(x')\, f(x'')} + a^3_{x'}\, a^3_{x''}.$$

(Vgl. auch diese Ann. Bd. 27, p. 463) Die Coefficienten in der Gleichung der Kummer'schen Fläche werden dann rationale ganze Functionen der vier geraden Fundamentalinvarianten A, B, C, D der Form 6. Ordnung (vgl. etwa Clebsch, a. a. O. p. 451 ff.) wo die betr. Rechnung für $x = x'$ durchgeführt ist. Dagegen kann eine Form der Art wie Υ überhaupt nicht ohne Einführung mindestens eines Hilfspunktes gebildet werden, da die Form 6. Ordnung keine Covariante entsprechender Natur mit nur zwei Reihen von Variabeln besitzt. Man würde also immer genöthigt sein eine Form wie etwa das Υ_t des Textes zu benutzen.

*) a. a. O. p. 357 f.

**) a. a. O. p. 361, Z. 8.

***) a. a. O. p. 361, Z. 10.

†) a. a. O. p. 360.

$$
(65)\quad
\begin{array}{llll}
S_1 : \omega_1' = \omega_1 + 2\omega_3, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_2 : \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3 - 2\omega_1, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_3 : \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2 + 2\omega_4, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_4 : \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4 - 2\omega_2, \\
S_5 : \omega_1' = \omega_1 - 2\omega_2, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4 + 2\omega_3.
\end{array}
$$ *)

V. *Jede dieser fünf Substitutionen kann durch Monodromie der Verzweigungspunkte in der Weise erzielt werden, dass jeder einzelne Verzweigungspunkt in seine Anfangslage zurückkehrt.***)

Aus IV und V ergiebt sich folgende Umkehrung des Satzes III:

VI. *Jede Transformation der Perioden, welche mod. 2 zur Identität congruent ist, kann bewirkt werden durch eine Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt.*

Den Sätzen III und VI möge noch folgende erweiterte Fassung ertheilt werden:

IIIa. *Zwei Monodromieänderungen der Verzweigungspunkte, welche dieselben in gleicher Weise permutiren, bewirken nach dem Modul 2 congruente Periodentransformationen.*

IVa. *Zwei nach dem Modul 2 congruente Periodentransformationen können bewirkt werden durch Monodromieänderungen der Verzweigungspunkte, welche dieselben in gleicher Weise permutiren.*

In der That ist die Anzahl der modulo 2 verschiedenen linearen Periodentransformationen nach (49) $= 15 . 8 . 3 . 2 = 720$, also genau gleich der Anzahl aller möglichen Permutationen der sechs Verzweigungspunkte.

Nun übertragen wir diese Sätze von den Gruppen auf die zugehörigen Functionen; dann sagen sie aus:

Jede rationale Function der Nullstellen von $f(x)$ ist eine hyperelliptische Modulfunction II. Stufe.

Jede hyperelliptische Modulfunction II. Stufe ist eine rationale Function der Nullstellen von $f(x)$.

Daneben bestehen zwei analoge Sätze, welche aus diesen beiden hervorgehen, indem man dem Wort „*rational*" den Zusatz „*und ganz*" giebt und für „Modulfunction" „*Modulform*" schreibt.

---

*) Die hier als S_5 bezeichnete Substitution ist in der Bezeichnung des Herrn C. Jordan $S_5 S_4 S_4$.

**) a. a. O. p. 360, Z. 21.

§ 23.

Die Richelot'sche Normalform.

Die im vorigen Paragraphen betrachteten Functionen sind invariant in dem erweiterten Sinne des § 11, indem der Uebergang von der Form f_6 selbst zu ihren sechs Linearfactoren die Einführung von fünf Hilfsgrössen bedingt. Will man die Einführung solcher Hilfsgrössen vermeiden, was hier in der That in einfacher Weise möglich ist, so wird man folgendermassen verfahren. Man wird die Form $f(x)$, in ihre linearen Factoren zerlegt, etwa folgendermassen schreiben:

$$(66) \qquad f_x^6 = (\alpha x)(\beta x)(\gamma x)(\delta x)(\varepsilon x)(\zeta x).$$

Dann werden sich alle rationalen Invarianten der sechs Factoren, welche keine Hilfsgrössen enthalten, zusammensetzen lassen aus den 15 Determinanten:

$$(67) \qquad (\alpha\beta),\ (\alpha\gamma),\ \ldots (\alpha\zeta),\ (\beta\gamma) \ldots (\varepsilon\zeta).$$

Aber nicht jede Function dieser Determinanten wird eine reine Invariante der Grundform f sein. Diese ändert sich nämlich nicht, wenn man etwa α_1, α_2 durch $m\alpha_1$, $m\alpha_2$ und gleichzeitig β_1, β_2 durch $m^{-1}\beta_1$, $m^{-1}\beta_2$ ersetzt. *Ein Product aus einer Anzahl der Determinanten* (67) *ist daher nur dann eine reine hyperelliptische Modulform — eine Form der Coefficienten von f selbst — wenn es jedes der Symbole $\alpha, \beta \ldots \zeta$ ebenso oft enthält als jedes andere.**)

Jede solche Invariante kann aufgefasst werden als das Product aus einer *absoluten* Invariante in eine Potenz irgend einer linearen Invariante. Man wird also im Besitze aller reinen Modulformen II. Stufe sein, sobald man alle absoluten Invarianten der sechs Linearformen (αx), $(\beta x) \ldots (\zeta x)$ und ausserdem eine lineare Invariante kennt.

Diese absoluten Invarianten sind nun sämmtlich rationale Functionen der aus den Determinanten (67) zu bildenden *Doppelverhältnisse;* die letzteren aber lassen sich rational aus drei geeigneten unter ihnen zusammensetzen, als welche etwa:

$$(68) \qquad \varkappa^2 = \frac{(\gamma\zeta)(\beta\alpha)}{(\gamma\alpha)(\beta\zeta)},\quad \lambda^2 = \frac{(\delta\zeta)(\beta\alpha)}{(\delta\alpha)(\beta\zeta)},\quad \mu^2 = \frac{(\varepsilon\zeta)(\beta\alpha)}{(\varepsilon\alpha)(\beta\zeta)}$$

gewählt werden mögen. Eine lineare Invariante, welche später noch Verwendung finden wird und deshalb auch hier gleich benutzt werden möge, ist:

$$(69) \qquad E = \frac{(\beta\zeta)^2}{(\alpha\beta)(\alpha\zeta)} \cdot (\gamma\alpha)(\delta\alpha)(\varepsilon\alpha).$$

Damit ist das Resultat erhalten:

Alle reinen Modulfunctionen II. Stufe sind rationale Functionen

*) Auch dieser Punkt sollte in den Lehrbüchern der Invariantentheorie mehr hervorgehoben werden, als es bis jetzt der Fall ist.

von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2; alle reinen Modulfunctionen II. Stufe sind Producte solcher Functionen in Potenzen von E.

An diese Modulfunctionen II. Stufe knüpft eine canonische Darstellung des hyperelliptischen Gebildes an, von welcher vielfach Gebrauch gemacht wird und auch im folgenden gelegentlich Gebrauch gemacht werden soll: *die Richelot'sche Normalform.**) Um die allgemeine Form auf diese zurückzuführen, setze man:

$$(70)\qquad \begin{aligned}(\alpha x) &= \frac{\varrho}{(\beta\zeta)}\, y_1,\\ (\zeta x) &= \frac{\varrho}{(\beta\alpha)}\, y_2;\end{aligned}$$

damit wird zugleich erhalten:

$$\begin{aligned}(\beta x) &= \frac{\varrho(\beta\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2-y_1),\\ (\gamma x) &= \frac{\varrho(\gamma\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2-\varkappa^2 y_1),\\ (\delta x) &= \frac{\varrho(\delta\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2-\lambda^2 y_1),\\ (\varepsilon x) &= \frac{\varrho(\varepsilon\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2-\mu^2 y_1).\end{aligned}$$

Soll die Substitutionsdeterminante zu 1 gemacht werden, so ist:

$$(71)\qquad \varrho = \sqrt{(\beta\alpha)(\alpha\zeta)(\beta\zeta)}$$

zu setzen. Geschieht dies, so geht die Form f über in:

$$(72)\quad F = E\cdot y_1\cdot y_2\cdot(y_2-y_1)\cdot(y_2-\varkappa^2 y_1)\cdot(y_2-\lambda^2 y_1)\cdot(y_2-\mu^2 y_1).$$

Wird der Factor E nicht berücksichtigt und unhomogene Schreibweise benutzt, so erhält f diejenige Gestalt, welche als Richelot'sche Normalform bezeichnet zu werden pflegt, nämlich:

$$(73)\qquad F = y(1-y)(1-\varkappa^2 y)(1-\lambda^2 y)(1-\mu^2 y).$$

§ 24.

Eigentliche Functionen II. Stufe.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung des Systems der eigentlichen hyperelliptischen Functionen II. Stufe. Als eindeutige Functionen der transcendenten Argumente dürfen dieselben über der Riemann'schen Fläche nicht verzweigt sein; *über der x-Ebene dürfen sie daher nur in den Punkten $x = \alpha, \beta, \ldots \zeta$ Verzweigungen besitzen.* Ferner sollen sie nach zweimaliger Durchlaufung eines Periodenwegs zum Anfangswerth zurückkehren; nach einmaliger Durchlaufung eines solchen werden

*) Crelle J. Bd. 16, p. 226.

sie daher eine Aenderung von der Periode zwei erfahren haben. Daraus folgt nach einem bekannten Principe:

Alle hyperelliptischen Functionen II. Stufe lassen sich rational aus solchen Functionen zusammensetzen, welche höchstens das Zeichen wechseln, wenn eines der algebraischen Argumente einen Periodenweg durchläuft.

Sie setzen sich also zusammen aus Ausdrücken der Form:

$$\sqrt{(\alpha x)},\ \sqrt{(\beta x)},\ \ldots \sqrt{(\zeta x)}. \tag{74}$$

Versuchen wir also aus den Ausdrücken dieser Form Functionen aufzubauen, welche unsern sonstigen Bedingungen genügen. Wir erhalten zunächst einmal die folgenden sechs hyperelliptischen Functionen II. Stufe:

$$\begin{aligned} D_0 &= \sqrt{(\alpha x')(\alpha x'')},\ D_1 = \sqrt{(\beta x')(\beta x'')},\ D_2 = \sqrt{(\gamma x')(\gamma x'')}, \\ D_3 &= \sqrt{(\delta x')(\delta x'')},\ D_4 = \sqrt{(\varepsilon x')(\varepsilon x'')},\ D_5 = \sqrt{(\zeta x')(\zeta x'')}. \end{aligned} \tag{75}$$

Soll dem Homogeneitätsgesetz in Bezug auf die $\alpha, \beta \ldots \zeta$ genügt werden, so sind diese Formen noch mit geeigneten Invarianten zu multipliciren. Dass solche, wenn die Rationalität in den $\alpha, \beta \ldots \zeta$ gewahrt werden soll, nur unter Benutzung von Hülfsgrössen gebildet werden können, stört uns ja nicht.

Aus diesen sechs Formen (75) werden nun alle symmetrischen Formen sich zusammensetzen lassen, welche nur *eine* Quadratwurzel aus einem Producte von Linearfactoren $(\alpha x')$, $(\alpha x'')$ ... enthalten; dieselben können als *gerade* bezeichnet werden, indem sie auch dem Zeichen nach ungeändert bleiben, wenn gleichzeitig x' durch $\bar{x}'$, x'' durch $\bar{x}''$ ersetzt wird. Aber man wird auch *ungerade* Formen der verlangten Art bilden können durch additive Vereinigung zweier solcher Wurzelgrössen, welche bei Vertauschung von x' mit x'' in einander übergehen. Wenn nun eine solche Wurzel einen der Punkte $\alpha \ldots \zeta$ in zwei Factoren enthält, so kann man einen der Factoren $(\alpha x')$, $(\alpha x'')$, D_0 u. s. w. herausheben. Sind alle solchen Factoren beseitigt, so bleibt unter dem Wurzelzeichen ein Product, das jedes der Variabelnpaare $\alpha \ldots \zeta$ einmal enthalten muss; denn sonst könnte es nur durch Hinzufügung solcher Factoren in $\alpha, \beta \ldots \zeta$ homogen gemacht werden, welche als Functionen dieser Grössen noch an andern Stellen als x' und x'' verzweigt wären, was nicht sein darf. Es bleiben also nur Wurzel grössen der folgenden drei Typen:

$$D_{(1,5)} = \sqrt{(\alpha x')(\beta x'')(\gamma x'')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')}; \tag{76}$$

$$D_{(2,4)} = \sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x'')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')}; \tag{77}$$

$$D_{(3,3)} = \sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')}. \tag{78}$$

Nun geht $D_{(1,5)}$ durch Multiplication mit D_0 über in $(\alpha x')\sqrt{f(x'')}$, und

$D_{(2,4)}$ durch Multiplication mit D_1 in $(\beta x')$. $D_{(1,5)}$ oder durch Multiplication mit D_2 in $(\gamma x'')$ $D_{(3,3)}$: ausser den Formen (75) und rationalen Formen von x (Formen I. Stufe) kommen daher nur die aus (78) entspringenden Formen in Betracht, nämlich:

$$\sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')} + \sqrt{(\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x''(\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')}$$

welche, wenn:

$$(79) \qquad (\alpha x)(\beta x)(\gamma x) = \varphi(x), \quad (\delta x)(\varepsilon x)(\zeta x) = \psi(x)$$

gesetzt wird, folgendermassen in Determinantenform geschrieben werden können:

$$(80) \qquad D_{\varphi,\psi} = \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi(x')} & \sqrt{\psi(x')} \\ -\sqrt{\varphi(x'')} & \sqrt{\psi(x'')} \end{vmatrix}.$$

Sollen die zehn verschiedenen Formen dieser Art auseinandergehalten werden, so möge mit:

$$D_{\substack{h\,i\,k \\ l\,m\,n}}$$

diejenige bezeichnet werden, für welche:

$$\varphi(x) = (\alpha_h x)(\alpha_i x)(\alpha_k x). \quad \psi(x) = (\alpha_l x)(\alpha_m x)(\alpha_n x)$$

ist.

Wir haben also zunächst das Resultat, dass *alle Formen II. Stufe sich rational aus den Formen I. Stufe und den* 16 *Formen* (75) *und* (80) *zusammensetzen lassen.*

Aber auch die Formen I. Stufe sind rational ausdrückbar durch die D, wie man am bequemsten mit Hilfe der Richelot'schen Normalform erkennt. Für dieselbe wird nämlich:

$$(81) \qquad D_0 = \sqrt{y'y''}, \quad D_1 = \sqrt{(1-y')(1-y'')}, \quad D_5 = 1;$$

man hat also:

$$(82) \qquad \begin{aligned} y' + y'' &= D_0^2 + D_5^2 - D_1^2, \\ y'y'' &= D_0^2 \end{aligned}$$

und dazu:

$$(83) \qquad \sqrt{F(y')}\sqrt{F(y'')} = D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5;$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass jede *gerade* hyperelliptische Form I. oder II. Stufe sich rational durch die $D_0, D_1 \ldots D_5$ allein ausdrücken lässt. Zu diesen Formen gehören auch die Quadrate der Determinanten (80), sowie ihre Producte zu je zweien; in der That ist z. B.:

$$(84) \qquad \begin{aligned} D^2_{\substack{012 \\ 345}} = \; & (\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'') \\ & + (\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x'')(\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x') \\ & + 2\sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')}; \end{aligned}$$

$$(85)\quad D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} = D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\}$$
$$+ D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\varepsilon x')(\beta x'')\},$$

und die hier noch nicht durch die D ausgedrückten Bestandtheile lassen sich mittelst der Formeln (82) und (83) sofort in dieselben umsetzen.

(In ganz analoger Weise kann nun auch gezeigt werden, dass die ungeraden Formen I. Stufe sich rational durch die D ausdrücken lassen; der Gleichung (42) zufolge genügt es, diesen Nachweis für eine derselben zu führen. So erhält man z. B.:

$$(86)\quad D_{\substack{012\\345}} \cdot \{(x't)^3 \sqrt{f(x'')} + (x''t)^3 \sqrt{f(x')}\}$$
$$= D_0 D_1 D_2 \{(x't)^3 (\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'') + (x''t)^3 (\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')\}$$
$$+ D_3 D_4 D_5 \{(x't)^3 (\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x'') + (x''t)^3 (\alpha x')(\beta x')(\gamma x')\}$$

und kann auch hier die Klammergrössen sofort in die D_i umsetzen).

Damit ist in der Tat der Satz gewonnen:

Alle hyperelliptischen Formen II. Stufe lassen sich mit Hilfe der 15 Determinanten $(\alpha\beta)$ *rational ausdrücken durch 7 Formen, nämlich durch die 6 Formen* D_i *und irgend eine der 10 Formen* $D_{\substack{hik\\lmn}}$.

Man könnte sich demnach auf diese sieben Formen beschränken; dass es sich jedoch aus Symmetriegründen empfiehlt, die 10 $D_{\substack{hik\\lmn}}$ sämmtlich beizubehalten, bedarf keiner weiteren Erörterung.*)

§ 25.

Relationen II. Stufe.

Von den Relationen, welche die Functionen II. Stufe unter sich verbinden, ist eine Anzahl bereits in § 24 zur Sprache gebracht worden. Dieselben sind jedoch nicht die einfachsten, welche es giebt; vielmehr existiren noch einfachere, welche in diesem Paragraphen abgeleitet werden sollen.**) Um dieselben möglichst einfach zu schreiben, werde die Abkürzung:

$$(87)\quad \overline{D}_i = (x'x'')\, D_i$$

eingeführt.

I. Zwischen den Quadraten von je vieren unter den sechs Formen

*) Diese Formen D sind natürlich längst aus der Theorie der Thetafunctionen bekannt.

**) Auch diese Relationen sind aus der Theorie der Thetafunctionen längst bekannt.

D_i (oder auch $\overline{D}_i$) besteht eine homogene lineare Relation. Eine von den 15 so erhaltenen Relationen ist:

$$\begin{vmatrix} D_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ D_1^2 & \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \\ D_2^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_2^2 \\ D_3^2 & \delta_1^2 & \delta_1\delta_2 & \delta_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$(88)\quad (\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)D_3^2 - (\beta\gamma)(\gamma\delta)(\delta\beta)D_0^2 + (\gamma\delta)(\delta\alpha)(\alpha\beta)D_1^2 - (\delta\alpha)(\alpha\beta)(\eta\delta)D_2^2 = 0.$$

II. Die $D_{\substack{kik\\lmn}}$ verschwinden für $x' = \overline{x}''$ und nehmen für $x' = x'$ alle denselben Werth an. Die Differenzen ihrer Quadrate sind also Null sowohl für $x' = x''$, als für $x' = \overline{x}''$, daher durch $(x'x'')$ und als symmetrische Functionen von x' und x'' durch $(x'x'')^2$ theilbar. In der That findet man z. B. aus (84):

$$(89)\quad (\alpha\gamma)\cdot\left\{D^2_{\substack{012\\345}} - D^2_{\substack{024\\135}}\right\}$$
$$= (\alpha\gamma)(\beta\varepsilon)(x'x'')\left\{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') - (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\right\}.$$

Wird rechts in der Klammer $(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x'')$ addirt und subtrahirt, so geht die rechte Seite über in:

$$(\beta\varepsilon)(x'x'')^2\left\{(\alpha\gamma)(\gamma\delta)(\alpha x')(\zeta x'') + (\alpha\gamma)(\alpha\zeta)(\gamma x'')(\delta x'\right\}$$

und wenn man in der neuen Klammer $(\alpha\zeta)$ $(\gamma\delta)$ $(\alpha x')$ $(\gamma x'')$ addirt und subtrahirt, in:

$$(\beta\varepsilon)\,(x'x'')^2\left\{(\gamma\delta)\,(\gamma\zeta)D_0^2 - (\alpha\delta)\,(\alpha\zeta)D_2^2\right\}.$$

Man erhält somit die Relation:

$$(90)\quad (\alpha\gamma)\left\{D^2_{\substack{012\\345}} - D^2_{\substack{024\\135}}\right\} = (\beta\varepsilon)(\gamma\delta)(\gamma\zeta)D_0^2 - (\beta\varepsilon)(\alpha\gamma)(\alpha\zeta)D_2^2,$$

welche, wie man leicht abzählt, 90 gleichgebaute Relationen vertritt, die aus ihr durch Vertauschung der Verzweigungspunkte hervorgehen.*)

III. Zu einer dritten Gruppe von Relationen giebt die Reduction der Formen (77) Anlass, indem dieselbe auf verschiedene Weisen geschehen kann. So z. B. hat man, wenn zur Abkürzung:

$$\sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x'')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')} = R_1,$$
$$\sqrt{(\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x')(\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')} = R_2$$

*) Aus den beiden Gruppen von Relationen I und II in Verbindung mit (82), (83), (86) kann man schliessen, dass die Formen X des § 21 sich durch die Quadrate von vier geeigneten unter den Formen $D_{\substack{kik\\lmn}}$ und $\overline{D}_i$ ausdrücken lassen. Auf diesem Wege gelangt man zur Ueberführung der Gleichung der Kummer'schen Fläche aus der Form (60) in die gewöhnlich benutzte, wodurch der pag. 231 Fussn. versprochene Nachweis geliefert ist.

gesetzt wird, die drei Relationen:

$$
(91)\qquad
\begin{aligned}
(\gamma x')R_1 + (\gamma x'')R_2 &= D_2 D_{\substack{012\\345}},\\
(\delta x')R_1 + (\delta x'')R_2 &= D_3 D_{\substack{013\\245}},\\
(\varepsilon x')R_1 + (\varepsilon x'')R_2 &= D_4 D_{\substack{014\\235}},
\end{aligned}
$$

aus welchen durch Elimination von R_1 und R_2 erhalten wird:

$$
(92)\qquad (\gamma\delta)D_4 D_{\substack{014\\235}} + (\delta\varepsilon)D_2 D_{\substack{012\\235}} + (\varepsilon\gamma)D_3 D_{\substack{013\\245}} = 0,
$$

— eine von 60 gleichgebauten Relationen.

IV. Endlich lassen sich noch einfache Relationen aus der Formel (85) gewinnen; man erhält z. B., indem man die vier Punkte $\alpha\gamma\delta\zeta$ auf drei Arten in zwei Gruppen von zweien theilt:

$$
(93)\qquad
\begin{aligned}
D_{\substack{012\\345}} \cdot D_{\substack{024\\135}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\}\\
&\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\};\\
D_{\substack{015\\234}} \cdot D_{\substack{045\\123}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x'')(\zeta x') + (\alpha x'')(\gamma x')(\delta x')(\zeta x'')\}\\
&\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\};\\
D_{\substack{013\\245}} \cdot D_{\substack{034\\125}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x')\}\\
&\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\}.
\end{aligned}
$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen zu je zweien erhält man die drei neuen Gleichungen:

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
&D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} - D_{\substack{015\\243}} D_{\substack{045\\123}}\\
&= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\delta x'') - (\alpha x'')(\delta x')\}\,\{(\gamma x')(\zeta x'') - (\zeta x')(\gamma x'')\}\\
&\qquad = (\alpha\delta)(\gamma\zeta)\overline{D_1}\,\overline{D_4};\\
&D_{\substack{015\\234}} D_{\substack{045\\123}} - D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} = (\alpha\gamma)(\zeta\delta)\overline{D_1}\,\overline{D_4};\\
&D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} - D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} = (\alpha\zeta)(\delta\gamma)\overline{D_1}\,\overline{D_4};
\end{aligned}
$$

aus welchen sich durch Combination von je zweien derselben die folgende vierte ergiebt:

$$
(95)\qquad (\alpha\gamma)(\delta\zeta)D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} + (\alpha\delta)(\zeta\gamma)D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} + (\alpha\zeta)(\gamma\delta)D_{\substack{015\\234}} D_{\substack{025\\123}} = 0.
$$

Solcher Systeme von vier Gleichungen, wie (94) und (95) existiren 15, entsprechend den 15 Paaren von Verzweigungspunkten. —

Dass aus diesen vier Gruppen von Relationen eine grosse Anzahl weiterer durch geeignete Combination sich ableiten lassen, ist von selbst klar. Wir wollen jedoch diesen Punkt nicht weiter verfolgen, sondern uns einer andern Frage zuwenden: der Frage nämlich, welche von diesen Relationen von einander unabhängig sind. Da die 16 Formen D von drei unabhängigen Veränderlichen X_1, X_2, X_3 (52) abhängen, so können zwischen ihnen nur *dreizehn* unabhängige Relationen bestehen. Um solche aus den Relationen (88)—(95) auszuwählen, kann man folgendermassen verfahren:

Zunächst sind von den 15 Relationen I sicher *drei* solche von einander unabhängig, in welchen drei der auftretenden D_i feste Indices haben, während der vierte Index der Reihe nach die drei übrigen Werthe hat. Aus diesen dreien werden neun von den zwölf übrigen Relationen I dadurch erhalten, dass man je eines der D_i aus je zweien von ihnen, die drei letzten, indem man je zwei D_i aus allen dreien eliminirt; sodass also unter der Gruppe I keine weiteren von einander unabhängigen Relationen vorkommen. Von den 90 Relationen der Gruppe II sind dann sicher *neun* solche von einander und von den Relationen I unabhängig, welche ein und dasselbe $D_{\substack{hik\\lmn}}$ der Reihe nach mit den neun übrigen combinirt enthalten. Durch Elimination des festgehaltenen D aus je zweien von diesen folgen dann 36 weitere Relationen; jede der so erhaltenen 45 Relationen kann mit Hilfe der Relationen I auf zwei Arten in die Gestalt (90) gebracht werden, sodass wir bereits alle 90 Relationen (90) aus den bisher festgestellten unabhängigen erhalten. Um die volle Zahl von dreizehn unabhängigen Relationen zu bekommen, ist es demnach erforderlich noch *eine* Relation aus einer der Gruppen III oder IV hinzuzunehmen.

Aus den so ausgewählten dreizehn Relationen werden sich dann alle übrigen auf *algebraischem* Wege ableiten lassen müssen. Aber es wird nicht immer möglich sein, diese Ableitung in rationaler Weise auszuführen; wie schon daraus hervorgeht, dass z. B. die Relationen der I. und II. Gruppe, sowie die Relation (92) ungestört bleiben, wenn man D_2, D_3, D_4 gleichzeitig im Vorzeichen ändert, ohne die übrigen D zu ändern, während dies bei andern Relationen der III. und IV. Gruppe nicht der Fall ist.*) Es ist eine unerledigte Frage, wie man eine kleinste Zahl von Relationen zwischen den D erhalten kann, aus welchen alle übrigen sich auf rationalem Wege ableiten lassen, welche also zur Charakterisirung des von den D gebildeten algebraischen Gebildes nothwendig und ausreichend sind. Noch weniger ist bekannt, wie viele Relationen zur *ganzen* Darstellung aller übrigen erforderlich sind.

*) Vgl. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel (Leipzig 1882), art. 16 a. E.

§ 26.

Verschiedene Rationalitätsbereiche II. Stufe.

Die Gesammtheit der 16 Formen D und der 15 Determinanten $(\alpha\beta)$ constituirt den Rationalitätsbereich, welcher zu der Principaluntergruppe II. Stufe gehört. Es giebt aber noch engere Rationalitätsbereiche II. Stufe, welche im Gebiete der Modulfunctionen charakterisirt sind durch die *rationalen Functionen der Wurzeln der Gleichung* $f(x)=0$, im Gebiet der eigentlichen hyperelliptischen Functionen durch gewisse *kleinere aus der Gesammtheit herausgegriffene Systeme von Formen D*. Von diesen sollen im folgenden eine Anzahl Erwähnung finden, welche bei speciellen Problemen bereits vielfach aufgetreten sind.

I. Jedem der einzelnen D_i entspricht eine Wurzel der Gleichung $f_6=0$ selbst.

II. Jedem der $D_{\substack{hik\\lmn}}$ entspricht eine Wurzel derjenigen Resolvente 10. Grades, von welcher die Zerspaltungen von f_6 in zwei cubische Factoren abhängen. An den damit gegebenen Rationalitätsbereich knüpft die von Herrn Staude*) in Vorschlag gebrachte Bezeichnung der D an, welche in folgendem besteht. Dasjenige $D_{\substack{hik\\lmn}}$, welches man auszeichnen will, wir wollen annehmen $D_{\substack{024\\135}}$, wird mit D ohne Index bezeichnet; alle übrigen D erhalten je zwei Indices. An Stelle von D_h wird geschrieben D_{ik}, wo i, k die beiden Zahlen sind, welche mit h das eine der beiden Tripel 024, 135 bilden; denjenigen D, welche in der Bezeichnung des § 23 sechs Indices haben, werden je diejenigen beiden Zahlen als Indices beigelegt, durch deren Vertauschung das zugehörige Tripelpaar in das ausgezeichnete Tripelpaar 024, 135 übergeht (also z. B. D_{41} statt $D_{\substack{012\\345}}$ u. s. f.).

In dieser Bezeichnung ist demnach ein D gerade oder ungerade, je nachdem die Summe seiner Indices gerade oder ungerade ist. Die Imprimitivität der Gleichung 9. Grades, in welche die erwähnte Resolvente 10. Grades durch Adjunction einer ihrer Wurzeln übergeht, findet ihren Ausdruck in der folgenden Gruppirung der ungeraden D:

$$\begin{matrix} D_{01} & D_{21} & D_{41}, \\ D_{03} & D_{23} & D_{43}, \\ D_{05} & D_{25} & D_{45}. \end{matrix} \tag{96}$$

III. Wird *gleichzeitig ein gerades und ein ungerades D* ausgezeichnet, so gelangt man zu demjenigen Rationalitätsbereiche,

*) Staude, dieser Ann. Bd. 24, p. 284. 300.

welcher der Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass zu Grunde liegt.*)

IV. Zugrundelegung der *symmetrischen Functionen der Richelot'schen Moduln* ergiebt einen Rationalitätsbereich, welchem (bei geeigneter Einführung dieser Moduln) auch die symmetrischen Functionen der in je einer Zeile des Schema's (93) stehenden D angehören.

V. Weitere bemerkenswerthe Untergruppen werden von den verschiedenen in § 24 aufgezählten Relationen geliefert, indem immer die in einer solchen auftretenden D zusammen einen Rationalitätsbereich constituiren; noch andere solche Bereiche werden durch gleichzeitige Betrachtung mehrerer solcher Relationen erhalten. Hierher gehören auch diejenigen Rationalitätsbereiche, welche den aus der Theorie der Thetafunctionen bekannten Quadrupeln, Sextupeln etc. von Formen D entsprechen. In Bezug hierauf möge als besonders einfaches Resultat erwähnt werden, dass den 15 sogenannten „Göpel'schen Quadrupeln von 4 geraden Thetafunctionen" die 15 Zerlegungen der f_6 in 3 quadratische Factoren entsprechen. Zu einer solchen Zerlegung gehören nämlich 4 Zerlegungen in zwei cubische Factoren, welche von jedem jener quadratischen Factoren je einen Linearfactor enthalten. So z. B. gehören zu der Zerlegung:

$$f(x) = (\alpha x)(\beta x)\cdot(\gamma x)(\delta x)\cdot(\varepsilon x)(\zeta x)$$

die 4 Formen D:

$$(97)\qquad D_{\substack{024\\135}},\quad D_{\substack{025\\134}},\quad D_{\substack{034\\125}},\quad D_{\substack{035\\124}}$$

oder in der Bezeichnung von Weierstrass:

$$D_5,\quad D_4,\quad D_{23},\quad D_{01}$$

— in der That ein Göpel'sches Quadrupel.

Es würde auf Grund der Angaben des Herrn C. Jordan (vgl. hierüber § 22, IV. V.) nicht schwierig sein, die zu jedem dieser Rationalitätsbereiche gehörende Untergruppe durch Congruenzen mod. 2 zu definiren; indess soll dies hier nicht näher ausgeführt werden.

§ 27.

Uebergang von den Formen II. Stufe zu den Sigmafunctionen. Die Primcharakteristiken und ihre Transformation.

Aus den Formen D entstehen durch Multiplication mit der Primform $\Omega(x', x'')$ die *Sigmafunctionen***). Diese fallen aus unserer Stufeneintheilung heraus, insofern sie auf der Riemann'schen Fläche unendlich vieldeutig sind: sie sind zwar eindeutige Functionen der transcendenten

*) Vgl. Staude a. a. O.

**) Diese Annalen Bd. 32, p. 563.

Argumente, aber die Operationen unserer Hauptgruppe, bei welchen sie ungeändert bleiben, bilden keine Untergruppe von endlichem Index. Vielmehr tritt zu der einzelnen Sigmafunction, wenn eine der Variabeln einen Querschnitt überschreitet, ein Factor der Form:

$$(98) \qquad (-1)^{g_\alpha} e^{\sum \eta_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)},$$

unter den g_α (*mod. 2 zu betrachtende*) ganze Zahlen verstanden (von deren Bestimmung dieser Ann. Bd. 32 p. 358 ausführlich die Rede ist).

Für einen beliebigen Periodenweg, welcher die Querschnitte:

$$A_1 \quad A_2 \quad B_1 \quad B_2$$

bezw.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

mal überschreitet, erhält man mit Rücksicht auf die zwischen den ω und η bestehenden Bilinearrelationen dann als den zu derselben Sigmafunction tretenden Factor:

$$(99) \qquad (-1)^{a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4} e^{\sum_\alpha \eta'_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\omega'_\alpha\right) + \pi i (a_1 a_3 + a_2 a_4)},$$

in welchem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \omega'_\alpha &= a_1 \omega_{\alpha 1} + a_2 \omega_{\alpha 2} + a_3 \omega_{\alpha 3} + a_4 \omega_{\alpha 4}, \\ \eta'_\alpha &= a_1 \eta_{\alpha 1} + a_2 \eta_{\alpha 2} + a_3 \eta_{\alpha 3} + a_4 \eta_{\alpha 4} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

gesetzt ist. Indem man dem Factor (99) entsprechende Factoren für alle Querschnitte eines neuen Systems bestimmt, gewinnt man das folgende Resultat:

Werden die Perioden ω vermöge der Substitution (12) *durch neue ersetzt, so treten an Stelle der Zahlen g andere g', welche mit den ursprünglichen durch die Congruenzen verbunden sind:*

$$(100) \quad \begin{cases} g_1' \equiv a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4 + a_1 a_3 + a_2 a_4, \\ g_2' \equiv b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4 + b_1 b_3 + b_2 b_4, \\ g_3' \equiv c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 + c_4 g_4 + c_1 c_3 + c_2 c_4, \\ g_4' \equiv d_1 g_1 + d_2 g_2 + d_3 g_3 + d_4 g_4 + d_1 d_3 + d_2 d_4. \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

Diese Zahlen g transformiren sich also wesentlich anders als die Elementarcharakteristiken des § 6; sie sollen im Folgenden, da ihre Einführung mit Hilfe der *Primform* Ω geschieht, als *Primcharakteristiken* der Sigmafunctionen sowohl, als der Formen II. Stufe bezeichnet werden, aus welchen jene gebildet sind.*)

*) Die „Elementarcharakteristiken" sind identisch mit den „Gruppencharakteristiken", die „Primcharakteristiken" mit den „eigentlichen Charakteristiken" des Herrn Noether, der den Unterschied beider Arten wiederholt hervorgehoben hat (vgl. dieser Ann. Bd. 16 p. 271; Bd. 26 p. 354). — Die im Text citirten Entwicklungen in Bd. 32 geben übrigens eine allgemeine Regel zur Bestimmung der Primcharakteristik einer vorgelegten Form in Bezug auf ein gegebenes Querschnittsystem.

§ 28.

Vorzüge des Formensystems der II. vor demjenigen der I. Stufe.

Bei consequenter Durchführung des Rationalitätsprincips würden für alle Untersuchungen specieller Fragen die Functionen I. Stufe in den Vordergrund treten müssen: sie würden den Functionen II. Stufe gegenüber Vorzugsrechte ähnlicher Art besitzen, wie sie von demselben principiellen Standpunkte aus im Gebiete der elliptischen Functionen dem $\wp u$ und $\wp' u$ des Herrn Weierstrass gegenüber sin am u etc. zukommen.

Gleichwohl sind die Functionen II. Stufe in mehreren Beziehungen der Untersuchung weit leichter zugänglich.*) Richten wir unser Augenmerk zunächst auf Modulformen, so besitzen diejenigen der II. Stufe den Vorzug, dass sie sich aus 4 *von einander unabhängigen und von Hilfspunkten freien* Formen rational zusammensetzen, während wir bei den Formen I. Stufe nur die Wahl haben, *entweder* mit 7 Formen zu operiren — den Coefficienten von f_6 — die *zwar von einander unabhängig sind*, *aber* 3 *Hilfsvariable enthalten*, *oder* mit den 5 Fundamentalinvarianten, die *von Hilfsvariabeln frei*, *aber durch eine* (*sehr complicirte*) *Relation***) *unter sich verbunden sind*.

Nehmen wir nun die eigentlichen Formen hinzu, so kommen wir zwar auch bei den Formen II. Stufe nicht ganz ohne Hilfsgrössen (bei den D_i) und ohne überzählige Formen aus; allein die Art und Weise wie die Hilfsgrössen in die Formen eingehen, ist eine viel übersichtlichere und die verbindenden Relationen besitzen einen viel einfacheren Charakter als bei den Formen I. Stufe.

Damit hängt ein weiterer Umstand eng zusammen. Die Hilfsmittel, über welche man zur eingehenden Behandlung einzelner Fragen verfügt, werden hauptsächlich von der *Theorie der Thetafunctionen* dargeboten, an welcher sich historisch die ganze Theorie der hyperelliptischen Functionen entwickelt hat und welche die bequemsten analytischen Darstellungen der in dieser auftretenden Functionen liefert. Die Thetafunctionen sind nun zwar ebenso wie die Sigmafunctionen (§ 27) an und für sich nicht in die Stufentheorie einzureihen, stehen aber wie diese zu den Functionen II. Stufe in nächster Beziehung.

Aus allen diesen Erwägungen wird man bei Behandlung specieller Probleme es vorziehen, an die Functionen II. Stufe anzuknüpfen. Für allgemeine Discussionen dagegen ist es oft vortheilhaft, in erster Linie die Functionen I. Stufe in's Auge zu fassen, weil für diese eine Reihe von Fallunterscheidungen wegfallen, die die Verhältnisse bei den

---

*) Auch die elliptischen Functionen II. Stufe haben vor denjenigen der ersten Stufe analoge, wenn auch nicht so weitgehende, Vorzüge.

**) Clebsch, binäre Formen p. 293

Functionen II. (und höherer) Stufe compliciren. Sind einmal die allgemeinen Gesichtspunkte an den Functionen I. Stufe gefunden, so bietet die Uebertragung auf Functionen höherer Stufe meist wenig Schwierigkeit.

IV. Abschnitt.

Einleitung in Theilung und Transformation.

§ 29.

Theilung und Transformation als Bruchstücke des allgemeinen Programms.

Mit den Functionen II. Stufe möge die systematische Uebersicht abgebrochen werden, da es für die Functionen höherer Stufen an Vorarbeiten zu einer solchen so gut wie gänzlich mangelt. Dagegen möge ein anderer Gesichtspunkt in den Vordergrund treten: die Frage nach bestimmten Problemen, welche von Functionen niederer zu solchen höherer Stufe führen. Zwei solche Probleme hat die historische Entwicklung der Theorie, anknüpfend an die Theorie der elliptischen Functionen, seit etwa 40 Jahren besonders begünstigt: das Problem der Theilung und das der Transformation. Zwar lässt die Analogie der elliptischen Functionen erwarten, dass hier so wenig als dort das allgemeine Programm durch diese beiden Probleme, selbst wenn man dieselben im weitesten Sinne auffasst, erfüllt werden wird; indessen bieten sie die günstigsten Angriffspunkte, und so soll desshalb im Folgenden ausschliesslich von ihnen die Rede sein. Um sie aber mit den Erörterungen der beiden letzten Abschnitte in Verbindung zu setzen und deren Resultate für sie nutzbar zu machen, wird es vor allem erforderlich sein auszuführen, in welcher Weise diese Probleme in das allgemeine Programm des § 18 sich einordnen.

Das Problem der **Theilung** verlangt:

wenn die Functionen der Argumente:

$$w_\alpha,\quad \omega_{\alpha 1},\quad \omega_{\alpha 2},\quad \omega_{\alpha 3},\quad \omega_{\alpha 4} \qquad \alpha = 1, 2$$

gegeben sind, aus ihnen die Functionen der Argumente:

$$\frac{w_\alpha}{n},\quad \omega_{\alpha 1},\quad \omega_{\alpha 2},\quad \omega_{\alpha 3},\quad \omega_{\alpha 4}$$

oder, was dasselbe sagt, *die Functionen der Argumente:*

$$w_\alpha,\quad n\omega_{\alpha 1},\quad n\omega_{\alpha 2},\quad n\omega_{\alpha 3},\quad n\omega_{\alpha 4}$$

zu berechnen, unter n eine ganze Zahl verstanden. Seien es, um im Sinne des § 28 mit dem einfachsten Fall zu beginnen, zunächst Functionen I. Stufe, welche zu „theilen“ sind*). Durch dieselben sind die

*) In genauer Ausdrucksweise müsste man nicht von der Theilung der Functionen, sondern von der ihrer Argumente reden.

Integrale ω nur bis auf Multipla der Perioden bestimmt; aus jeder Lösung $\left(\frac{w_\alpha}{n};\ \omega_{\alpha\beta}\right)$ des Theilungsproblems werden sich daher n^4 Lösungen ergeben, welche alle in der Form:

$$(101)\qquad \left(\frac{w_\alpha + h_1\omega_{\alpha 1} + h_2\omega_{\alpha 2} + h_3\omega_{\alpha 3} + h_4\omega_{\alpha 4}}{n};\ \omega_{\alpha\beta}\right)$$

enthalten sind, indem die ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3, h_4 unabhängig von einander alle Werthe von 1 bis n durchlaufen. Es zeigt aber diese Darstellung der Lösungen, dass jede einzelne derselben ungeändert bleibt, wenn die w, ω solchen Operationen der Hauptgruppe unterworfen werden, welche modulo n zur Identität congruent sind. Das heisst aber in unserer Terminologie:

Die Theilung der Functionen I. Stufe führt auf Functionen n^{ter} Stufe.

Die Aufgabe der **Transformation****) möge zunächst nicht in ihrer allgemeinsten, sondern in einer speciellen Fassung formulirt werden. In dieser erscheint sie gewissermassen als die Hälfte der Aufgabe der Theilung: *sie verlangt den Uebergang von:*

$$w_\alpha \quad \omega_{\alpha 1} \quad \omega_{\alpha 2} \quad \omega_{\alpha 3} \quad \omega_{\alpha 4}$$

zu:

$$w_\alpha \quad \omega_{\alpha 1} \quad \omega_{\alpha 2} \quad n\,\omega_{\alpha 3} \quad n\,\omega_{\alpha 4},$$

unter n wieder eine ganze Zahl verstanden.

Auch hier zeigt die Untersuchung (vgl. § 52), dass die einzelne Lösung des Transformationsproblems nur bei solchen Operationen unserer Hauptgruppe ungeändert bleibt, deren Coefficienten gewissen Congruenzen nach dem Modul n genügen; m. a. W.:

Auch die Transformation der Functionen I. Stufe führt zu Functionen n^{ter} Stufe.

§ 30.

Theilung und Transformation von Functionen höherer Stufen.

In gleicher Weise, wie die Functionen I. Stufe, kann man nun auch Functionen höherer Stufen „theilen" und „transformiren". Verlangt man dabei zunächst die Stufenzahl der entstehenden Functionen zu wissen, so wird es einen wesentlichen Unterschied bedingen, ob die Stufenzahl m der Functionen, von welcher man ausgeht, zur Theilungs- oder Transformationszahl n relativ prim ist oder nicht. Ist nämlich ersteres der Fall, so stören sich die Congruenzen, welche die Stufe der ursprünglichen Functionen mit sich bringt, und diejenigen, welche die Theilung oder Transformation bedingt, gegenseitig insofern nicht, als sie sich zu einem Systeme von Congruenzen

**) Mit „Transformation" ist also hier das gemeint, was man sonst seit Jacobi (z. B. ges. W. Bd 1, p. 463 ff.) als *„transformatio irrationalis sive inversa"* bezeichnet.

mod. mn vereinigen, dessen Lösungen sich aus den einzelnen Lösungen jener beiden Congruenzensysteme zusammensetzen lassen. Haben aber m und n einen Theiler δ gemeinsam, so gilt das nicht: der Modul der resultirenden Congruenzen wird dann im allgemeinen nicht mn sondern $\frac{mn}{\delta_1}$ sein, wo δ_1 irgend ein Theiler von δ ist. In Folge dessen wird die Unterscheidung einer Reihe von Fällen erforderlich werden. Doch gehen wir auf diese Fragen hier nicht näher ein, sondern begnügen uns damit, das Gesagte in dem Satze zusammenzufassen:

Transformation n^{ten} Grades und n-Theilung von Functionen m^{ter} Stufe führt stets zu Functionen mn^{ter} Stufe, wenn m und n theilerfremd sind. Haben aber m und n einen gemeinsamen Theiler δ, so erhält man Functionen der Stufe $\frac{mn}{\delta_1}$, wo δ_1 ein Theiler von δ ist, (der auch 1 *oder δ selbst sein kann).*

§ 31.
Affect, Monodromiegruppe, arithmetische Gruppe. Allgemeine und specielle Probleme.

Das ganz besondere Interesse, welches die Theilungs- und Transformationsaufgaben darbieten, liegt in dem *Affect* der entstehenden Gleichungen, in ihren gruppentheoretischen Eigenschaften. Man versteht bekanntlich nach Herrn Kronecker unter dem Affect einer Gleichung die Gesammtheit der Besonderheiten, welche sie mit Rücksicht auf *Resolventenbildung* darbietet. Ist es möglich, Resolventen von besonders niedrigem Grade zu bilden, kann man gar die Auflösung der gegebenen Gleichung auf die Auflösung einer Reihe von Resolventen zurückführen, deren jede für sich betrachtet einfacher ist, als die gegebene Gleichung selbst, so sagt man, die Gleichung besitzt einen besonderen Affect. Der weitgehendste Affect, welchen eine Gleichung haben kann, ist, dass ihre Auflösung auf eine Reihe von *Abel'schen* Gleichungen zurückkommt, m. a. W. dass sie in bekannter Weise auf reine Gleichungen zurückgeführt werden kann.*)

Ob man nun einer vorgelegten Gleichung einen solchen Affect zuzuschreiben hat, durch welchen sie sich leichter lösen lässt, als eine allgemeine Gleichung desselben Grades, das kann erst entschieden werden, wenn festgesetzt ist, welche Grössen als bekannt anzusehen sind, m. a. W. *welcher Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt werden soll.*

Für unsere Theilungs- und Transformationsprobleme stellt sich diese Frage nun so, dass als rational bekannte Parameter die Formen derjenigen Stufe anzusehen sind, für welche das zu behandelnde Problem gestellt ist. Dagegen wird man irrationale Functionen dieser

*) Vgl. Hölder, dieser Ann. Bd. 34.

Parameter nicht als bekannt ansehen wollen. *Was also die Parameter betrifft, so ist die Definition des Rationalitätsbereichs, in welchem wir uns bewegen wollen, durch die an die Spitze gestellte Einordnung der Fragestellung in die Stufentheorie bereits gegeben.*

Damit aber der Rationalitätsbereich vollständig bestimmt sei, muss auch festgesetzt werden, welche *Zahlencoefficienten* als rational gelten sollen: man muss sich darüber entscheiden, ob man sich auf rationale Zahlen im eigentlichen Sinne beschränken, oder ob man auch bestimmte numerische Irrationalitäten, wie z. B. Einheitswurzeln, als zulässig ansehen will. Dadurch ist eine gewisse Spaltung der folgenden Untersuchungen bedingt, indem immer die beiden Fragen zu beantworten sein werden:

I. *Welchen Affect haben die vorgelegten Gleichungen, wenn man sich um die Zahlencoefficienten gar nicht kümmert, sondern rein numerische Irrationalitäten, deren man etwa im Laufe des Reductions-, bezw. Auflösungsprocesses bedarf, immer gleich adjungirt?*

II. *Welchen Affect besitzen dieselben, wenn auch allen zu benutzenden Zahlencoefficienten die Bedingung auferlegt wird, gemeine rationale Zahlen zu sein?*

Nun existirt bekanntlich für jedes Gleichungssystem und jeden Rationalitätsbereich eine *Gruppe von Vertauschungen der Lösungssysteme*, welche die doppelte Eigenschaft besitzt:

einmal, dass jede rationale Function der Lösungssysteme, welche bei allen Vertauschungen dieser Gruppe ihrem numerischen Werthe nach ungeändert bleibt, rational bekannt ist;

dann aber auch, dass jede rationale Function der Lösungssysteme, deren Zahlenwerth rational bekannt ist, bei den Vertauschungen dieser Gruppe numerisch ungeändert bleibt.

Diese Gruppe heisst *„die Galois'sche Gruppe"* oder einfach *„die Gruppe"* des Gleichungssystems in diesem Rationalitätsbereich.

Die Aufgabe, die Galois'sche Gruppe eines vorgelegten Theilungs- oder Transformationsproblems zu bestimmen, spaltet sich der oben erörterten doppelten Auffassung des Rationalitätsbereichs entsprechend wieder in 2 Aufgaben. Legt man den strengen Rationalitätsbereich zu Grunde, der sein Gesetz auch den Zahlencoefficienten auferlegt, so fragt man nach der *„arithmetischen Gruppe"* des Problems; lässt man die Zahlencoefficienten bei Seite und achtet nur auf die Parameter, so fragt man nach der *„Gruppe der Monodromie."* Letztere besteht aus denjenigen Vertauschungen der Lösungssysteme, welche man erhält, wenn man die Parameter irgend welche geschlossene Wege in ihrem Werthgebiete beschreiben lässt. Dass die so definirte Gruppe der Monodromie mit der Galois'schen Gruppe der vorgegebenen Gleichung übereinstimmt, sofern man numerische Irrationalitäten als unwesentlich ansieht, darauf hat Herr Hermite 1851 aufmerksam gemacht; dass damit nur eine Seite der Frage getroffen wird, hat Herr Kronecker wiederholt betont.

Bevor wir uns zur Discussion der einzelnen Probleme wenden, mögen noch die üblichen Bezeichnungen: „*allgemeine*" und „*specielle*" Probleme erläutert werden. Wenn man nämlich nur nach den *Modulformen* fragt, die zu den neuen Argumenten gehören, so hat man es mit dem „*speciellen*" Problem zu thun; das „*allgemeine*" Problem fasst die *eigentlichen Formen* in's Auge. Entstanden ist die Benennung in der Theorie der elliptischen Functionen, deren Werthe für „den speciellen Argumentwerth $w \equiv 0$" in naher Beziehung zu den Moduln der betreffenden Stufe stehen, ja selbst als solche Moduln gewählt werden können; sie möge aber der Kürze halber auch für die hyperelliptischen Functionen beibehalten werden, obwohl hier der Uebergang vom speciellen zum allgemeinen Problem erst einen besondern Grenzübergang erfordert. Es entspricht nämlich das Werthsystem $(w_1, w_2) = (0, 0)$ bekanntlich den sämmtlichen specialisirten Punktepaaren $(x'' = \overline{x'})$, (vgl. § 21); die eigentlichen hyperelliptischen Functionen werden daher für dasselbe — zum Theil wenigstens — unbestimmt, indem sie in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

V. Abschnitt.

Theilung durch eine ungerade Primzahl.

§ 32.

Formulirung des allgemeinen Theilungsproblems.

Das Problem der allgemeinen Theilung ist bereits § 29 in folgender Weise formulirt worden:

Gegeben sind die hyperelliptischen Functionen der Argumente

$$w_\alpha, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4},$$

gesucht die Functionen der Argumente:

$$\frac{w_\alpha}{n}, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4}.$$

Sind die w gegeben als Summen einer geraden Anzahl von Integralen mit bekannten oberen Grenzen und einem und demselben Verzweigungspunkt a, von dessen Auswahl sie dann unabhängig sind*), in den unteren:

$$(102) \qquad w_\alpha = \int_a^{y'} dw_\alpha + \int_a^{y''} dw_\alpha + \cdots \int_a^{y^{(2\mu)}} dw_\alpha,$$

*) Wegen einer allgemeineren Wahl der unteren Grenzen vgl. § 42.

so erscheint die Aufgabe als identisch mit der folgenden: Punkte x zu bestimmen, für welche:

$$(103) \qquad \frac{w_\alpha}{n} = \int_a^x dw_\alpha + \int_a^{x'} dw_\alpha + \cdots \int_a^{x^{(2\nu)}} dw_\alpha$$

ist. Von diesen 2ν Punkten x sind natürlich $2\nu - 2$ willkürlich; *die Gesammtheit der unter einander äquivalenten Lösungssysteme soll im Folgenden nur als eine Lösung gezählt werden.* In dieser Festsetzung ist inbegriffen, dass die Reihenfolge der Stellen x als gleichgültig betrachtet, m. a. W. dass nur nach den symmetrischen Verbindungen derselben gefragt wird.

In diesem Sinne hat das Problem n^4 Lösungen. Denn die w sind durch die y nur bestimmt bis auf ganzzahlige Multipla der Perioden; die $\frac{w}{n}$ werden aber nur dann um ganze Perioden sich ändern, wenn die w um n-fache Perioden geändert werden. Aendert man w um

$$h_1 w_1 + h_2 w_2 + h_3 w_3 + h_4 w_4,$$

so gelangt man zu incongruenten Werthen der $\frac{w}{n}$, wenn man incongruente Zahlen h wählt. Indem jede derselben unabhängig von den andern n (mod. n) verschiedene Werthe annehmen kann, erhält man in der That n^4 verschiedene Systeme der $\frac{w}{n}$ und damit den in Aussicht genommenen Satz:

Das allgemeine Theilungsproblem besitzt n^4 Lösungen.

Der Fall $n = 2$ ist hier mit inbegriffen, soll aber im Folgenden bei Seite gelassen und später besonders behandelt werden, da er gewisse Besonderheiten darbietet. Ferner ist klar, dass die Theilung durch eine zusammengesetzte Zahl zurückkommt auf die Theilungen durch die einzelnen Factoren. Demgemäss bedeute n *in diesem ganzen Abschnitt eine ungerade Primzahl.*

§ 33.

Formulirung des speciellen Theilungsproblems.

Ist das gegebene Werthsystem $(w_1, w_2) \equiv (0, 0)$, so ist ein Werthsystem der $\frac{w}{n}$ ebenfalls $\equiv (0, 0)$ und die zugehörigen x sind rational bekannt, indem ein beliebiges System von paarweise conjugirten Punkten die Aufgabe löst. Die übrigen Werthsysteme der $\frac{w}{n}$ sind Perioden-n^{tel} und gruppiren sich, wenn n wie vorausgesetzt ungerade ist, in einfacher Art paarweise zusammen. Ist nämlich $\frac{w}{n}$ ein Perioden-n^{tel}, so gilt dasselbe für $-\frac{w}{n}$, und diese beiden Werthe sind incongruent, gehören also zu verschiedenen Lösungssystemen. Fasst man beide zusammen, so erhält man das Resultat:

Der Grad des speciellen Theilungsproblems kann von n^4 *auf:*

$$\frac{1}{2}(n^4 - 1) \tag{104}$$

reducirt werden), indem eine Lösung sich abspaltet und die andern sich paarweise zusammenordnen.*

Wird zur Vereinfachung der Darstellung in (103) $\nu = 1$ genommen, was stets angeht, so verlangt die Aufgabe, dass**)

$$n\left\{\int_a^{x'} + \int_a^{x''}\right\} \equiv 0 \text{ (modd. Perioden)} \tag{105}$$

werden soll. Das heisst aber nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems nichts anderes, als dass x' und x'', n-fach gezählt, Nullpunkte einer ganzen Function auf der Riemann'schen Fläche sind, m. a. W. dass zwei ganze rationale Functionen g_n und γ_{n-3}***) von x existiren, sodass die Gleichung:

$$g_n + \gamma_{n-3}\sqrt{f_6} = 0 \tag{106}$$

zwei n-fache Wurzeln besitzt, welche dann eben x' und x'' sein werden. Die conjugirten Punkte $\overline{x'}$, $\overline{x''}$ ergeben dann ebenfalls eine Lösung desselben Theilungsproblems $\Big($entsprechend dem Periodenbruchtheil $-\frac{P}{n}$, wenn die erste Lösung dem $+\frac{P}{n}$ entsprach$\Big)$, und sind Nullpunkte von:

$$g_n - \gamma_{n-3}\sqrt{f_6} = 0. \tag{107}$$

Die 4 Stellen x', x'', $\overline{x'}$, $\overline{x''}$ zusammen sind aber auch Nullstellen einer quadratischen Form in x, die mit u_2 bezeichnet werden möge. Die n^{te} Potenz dieser Form wird an denselben Stellen von derselben Ordnung Null, wie das Product der beiden Formen auf den linken Seiten der Gleichungen (106) und (107); wird also eine multiplicative Constante in u_2 mit einbegriffen gedacht, so muss eine Identität folgender Gestalt bestehen:

$$u_2^n \equiv g_n^2 - \gamma_{n-3}^2 \cdot f_6. \tag{108}$$

Umgekehrt, wenn es gelingt, 3 Formen u_2, g_n, γ_{n-3} so zu bestimmen, dass eine solche Identität besteht, so kann man zunächst die rechte Seite derselben in die beiden Factoren $g_n + \gamma_{n-3}\sqrt{f_6}$ und

---

*) Also für $n = 3, 5, 7 \ldots$ bezw. auf 40, 312, 1200.

**) In bekannter abkürzender Schreibweise.

***) Die Indices der Formen bezeichnen hier und im Folgenden ihren Grad in x.

$g_\varkappa - \gamma_{\varkappa-3}\sqrt{f_6}$ spalten. Während nun u in zwei Paaren conjugirter Stellen verschwindet, kann an jeder einzelnen dieser Stellen immer nur einer jener Factoren Null werden. Es zerlegen sich also die zwei Paare conjugirter Stellen andererseits in zwei Paare entsprechend den beiden Factoren der rechten Seite; die Stellen jedes dieser letzteren Paare geben eine Lösung des Problems.

Das Resultat dieser Ueberlegungen ist also:

Jedes Paar conjugirter Lösungen des speciellen Theilungsproblems führt zu 3 Formen u_2, $g_\varkappa$, $\gamma_{\varkappa-3}$, welche mit f durch eine Identität von der Form (108) *verbunden sind; umgekehrt, so oft drei solche Formen gefunden sind, kann man aus ihnen zwei conjugirte Lösungen des speciellen Theilungsproblems ableiten.*

In der That ist die Aufgabe, u, g, γ in dieser Weise zu finden, ein ganz bestimmtes algebraisches Problem. Die Anzahl der Coefficienten dieser drei Formen ist nämlich:

$$3 + (n+1) + (n-2) = 2n + 2;$$

einer von ihnen kann jedoch der Formulirung der Aufgabe entsprechend willkürlich angenommen werden. Andererseits ist die Gleichung (108) vom Grade $2n$ in x; damit sie identisch bestehe, sind $2n+1$ Verbindungen jener Coefficienten gleich Null zu setzen. *Das specielle Theilungsproblem ist also bei diesem Ansatz zum Ausdruck gebracht durch $2n+1$ Gleichungen zwischen $2n+1$ Unbekannten.*

In erster Linie kommen von diesen $2n+1$ Unbekannten die Coefficienten von:

(109) $$u_2 \equiv ax^2 + 2bx + c = 0$$

in Betracht, indem dieselben die doch eigentlich gesuchten symmetrischen Functionen der Stellen x', x'' vorstellen; in der That ist in der Bezeichnung (52):

(110) $$X_1 : X_2 : X_3 = c : (-2b) : a.$$

§ 34.

Untersuchungen von Clebsch.

Die Abhandlung von Clebsch: *Zur Theorie der binären Formen 6. Ordnung und der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen**) beschäftigt sich mit einem speciellen Fall ($n = 3$) dieses algebraischen Problems, nämlich mit der Aufgabe, die Gleichung:

(111) $$u_2^3 = v_3^2 - f_6$$

zu einer identischen zu machen.

Für Clebsch hatte diese Aufgabe zunächst ein rein algebraisches Interesse, indem er (wie vorher schon Herr Cayley) in $u_2^3 - v_3^2$ eine Art Normalform der binären Form 6. Grades sah. Er verschaffte sich

*) Gött. Abh. Bd. 14, 1869.

einen Zugang zu diesem Problem, indem er damit begann, eine Lösung desselben, wie man jetzt sagen würde, zu adjungiren und die Aufgabe zu behandeln: wenn u_2', v_3' gegeben sind, u_2, v_3 so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$u_2^3 - v_3^2 = u_2'^3 - v_3'^2 \tag{112}$$

zu einer identischen wird. Er zeigte dann, dass diese Aufgabe ausser der selbstverständlichen Lösung $u = u'$, $v = v'$ noch 39 andere Lösungen besitzt, welche in 27 und 12 zerfallen. Jene 27 ordnen sich in 9 Tripel, die sich durch eine Hesse'sche Gleichung 9. Grades bestimmen lassen; die 12 übrigen Lösungen hängen von der Resolvente 12. Grades dieser Hesse'schen Gleichung ab.

Herr C. Jordan, dem Clebsch diese Gruppirung mittheilte, war damals eben mit den Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen beschäftigt und erkannte, dass dieselben Gruppirungseigenschaften dem speciellen Dreitheilungsproblem der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) zukommen. Daraufhin gelang es Clebsch in der That, das letztere Problem auf seine algebraische Aufgabe zurückzuführen. Er bedient sich dabei (für uns unnöthigerweise) einer Darstellung des hyperelliptischen Gebildes im ternären Gebiet (Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt); der Rationalitätsbereich, in welchem er sich bewegt, gehört zu einer Zerlegung von f in $\varphi_2 \cdot \psi_4$, wie solche § 24 gelegentlich Erwähnung fanden. Im übrigen entspricht der Ansatz von Clebsch ganz dem allgemeinen Ansatz des § 33.

Entsprechend seiner ursprünglichen Auffassung des Problems als eines solchen canonischer Darstellung betrachtet Clebsch als Unbekannte nicht die Coefficienten von u, auch nicht die Simultaninvarianten von u und f, sondern die Simultaninvarianten von u und v, sodass seine Resultate, soweit sie explicite algebraische Darstellungen der auftretenden Resolventen enthalten, nicht unmittelbar für die Theorie der hyperelliptischen Functionen nutzbar sind. Ueberhaupt scheint das stricte Festhalten an dem Princip, nur mit *reinen* Invarianten zu operiren, zu Rechnungen von grösserer Complicirtheit zu führen, als es die algebraische Natur des Problems an und für sich bedingen würde; eine Bemerkung, die auf sehr viele Entwickelungen mancher Invariantentheoretiker Anwendung findet.

§ 35.

Weitere Discussion der allgemeinen Theilung.

Es möge wieder an die Formulirung des allgemeinen Theilungsproblems angeknüpft werden, wie sie § 32, Glchg. (102) u. (103) gegeben wurde: 2μ Stellen y sind gegeben, 2ν Stellen x sind so zu bestimmen, dass:

$$(113)\qquad \int\limits_a^{x'}+\int\limits_a^{x''}+\cdots\int\limits_a^{x^{(2\nu)}}\equiv\frac{1}{n}\left\{\int\limits_a^{y'}+\int\limits_a^{y''}+\cdots\int\limits_a^{y^{(2\mu)}}\right\}\quad(\text{mod. Per.})$$

wird. Um diese Gleichung zwischen transcendenten Functionen in eine algebraische Gleichung umzusetzen, wollen wir zunächst conjugirte Stellen nicht unterscheiden; m. a. W. es möge auf der rechten Seite der Congruenz (113) vor jedes Integral $\pm$ geschrieben und alle so entstehenden $2^{2\mu}$ Probleme in eines zusammengefasst werden.

Die Stellen y zusammen mit ihren conjugirten sind Nullstellen einer bestimmten Form $v_{2\mu}$; die Stellen x zusammen mit ihren conjugirten werden erhalten werden durch Nullsetzen einer zu bestimmenden Form $u_{2\nu}$. Andererseits zeigt die Congruenz (115), dass die Stellen y zusammen mit den n-fach gezählten Stellen $\bar{x}$ Nullstellen einer ganzen Function:

$$(114)\qquad g_{n\nu+\mu}+\gamma_{n\nu+\mu-3}\sqrt{f_6}$$

auf der Fläche sein müssen; die conjugirten Stellen sind dann Nullstellen von:

$$(115)\qquad g_{n\nu+\mu}-\gamma_{n\nu+\mu-3}\sqrt{f_6}.$$

Demnach muss eine Identität der Form bestehen:

$$(116)\qquad u^n v=(g+\gamma\sqrt{f})\,(g-\gamma\sqrt{f})=g^2-\gamma^2 f.$$

Sobald umgekehrt Formen u, g, γ gefunden sind, welche diese Gleichung zu einer identischen machen, werden von jenen $2^{2\mu}$ Problemen zwei gelöst sein, nämlich eines, bei welchem die gegebenen Stellen sich sämmtlich unter den Nullstellen von:

$$g+\gamma\sqrt{f}$$

und eines bei welchem sie sich sämmtlich unter den Nullstellen von:

$$g-\gamma\sqrt{f}$$

befinden. Das Resultat dieser Ueberlegungen ist demnach:

Sind nur die Argumentwerthe y, nicht die Stellen y der Riemann'schen Fläche gegeben, so repräsentirt die Gleichung (113) $2^{2\mu}$ *verschiedene Theilungsprobleme; alle diese sind in der Forderung enthalten,* $u_{2\nu}$, $g_{n\nu+\mu}$, $\gamma_{n\nu+\mu-3}$ *so zu bestimmen, dass identisch:*

$$u^n v=g^2-\gamma^2 f$$

sei. Sind aber nicht nur die Argumentwerthe y, sondern auch die Stellen y gegeben, so sind von den Lösungen dieses algebraischen Problems nur diejenigen beizubehalten, in welchen die Stellen y', y'' . . . $y^{(2\mu)}$ Nullstellen eines und desselben der beiden Factoren $g+\gamma\sqrt{f}$, $g-\gamma\sqrt{f}$ sind; die gesuchten Stellen x sind dann n-fach gezählt die übrigen Nullstellen eben dieses Factors.

§ 36.

Die Monodromiegruppe der speciellen Theilung.

Nachdem wir unsere Theilungsprobleme in bestimmte algebraische Formulirung gebracht haben, wenden wir uns zur Aufsuchung ihrer Gruppen und beginnen mit der Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung. Wir bedürfen zunächst einer passenden Bezeichnung der Lösungssysteme: ähnlich wie Herr C. Jordan*) bezeichnen wir das dem Perioden-n^{tel}:

$$(117)\qquad \frac{\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2+\nu_3\omega_3+\nu_4\omega_4}{n}$$

entsprechende Lösungssystem mit:

$$(118)\qquad S_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}.$$

Die Zahlen ν sind dabei *mod.* n zu nehmen; durchläuft jede derselben n incongruente Werthe, etwa $0, 1, 2 \dots n-1$, so repräsentirt (118) die n^4 verschiedenen Lösungssysteme, jedes nur einmal.

Die Parameter (§ 31), auf welche sich die Monodromiegruppe bezieht, sind die Coefficienten von f. Durchlaufen dieselben irgend welche geschlossenen Wege, so treten an Stelle der Perioden ω neue, ω', vermöge der Substitutionen (12) des § 4 (vgl. § 8). Das Perioden ν^{tel} (117) geht dabei über in:

$$\frac{\nu_1\omega_1'+\nu_2\omega_2'+\nu_3\omega_3'+\nu_4\omega_4'}{n},$$

und wenn dies gleich:

$$\frac{\nu_1'\omega_1+\nu_2'\omega_2+\nu_3'\omega_3+\nu_4'\omega_4}{n}$$

ist, so hat sich das Lösungssystem (118) in das andere:

$$S_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_4'}$$

verwandelt. Die ν' hängen aber mit den ν zusammen**) durch die Congruenzen:

$$(119)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv a_1\nu_1+a_2\nu_2+a_3\nu_3+a_4\nu_4,\\ \nu_2' &\equiv b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3+b_4\nu_4,\\ \nu_3' &\equiv c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3+c_4\nu_4,\\ \nu_4' &\equiv d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3+d_4\nu_4. \end{aligned}\right\} \text{(mod. } n)$$

Indem diese Congruenzen die Indices derjenigen Lösungssysteme angeben, welche bei den Operationen der Monodromiegruppe an die Stelle gegebener Lösungssysteme treten, kann man sagen:

*) Traité des subst. p. 356.

**) Man vergleiche die Transformation der Elementarcharakteristiken in § 6, Gl. (31) u. (31a). Dabei ist nur zu beachten, dass dort h' für ν, h für ν' steht.

Die Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems ist definirt durch das Congruenzensystem (119), *dessen Coefficienten den Bedingungen des* § 4 (*mod.* n) *genügen müssen.*

Mit Rücksicht auf § 15 kann dies Resultat auch so ausgesprochen werden:

Die Hauptgruppe der Modulfunctionen (§ 13) *reducirt sich durch Adjunction der Principaluntergruppe* n^{ter} *Stufe auf eine Gruppe, zu welcher die Monodromiegruppe der speciellen* n-*Theilung holoedrisch isomorph ist.*

Die Ordnung (Anzahl der Operationen) der letzteren Gruppe ist also gleich dem Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe, nämlich (nach Gl. (49)):

$$N = (n^4 - 1) \cdot n^3 \cdot (n^2 - 1) \cdot n.$$

Das Lösungssystem s_{0000} bleibt bei allen Operationen der Gruppe an seiner Stelle, wie es sein muss, da es ja rational bekannt ist.

§ 37.

Die Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung.

Es sei die einzelne Lösung wieder mit einem Buchstaben bezeichnet:

$$S_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4},$$

entsprechend dem zugehörigen Argumentensystem:

$$\frac{w + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2 + \nu_3 \omega_3 + \nu_4 \omega_4}{n}.$$

Diese Bezeichnung wird dann eine ganz bestimmte sein, wenn über die Integrationswege, auf welchen die Integralwerthe w erhalten werden, eine bestimmte Festsetzung getroffen ist. Es werde vorausgesetzt, dass das geschehen sei; in welcher Weise, ist gleichgültig.

Um nun die Monodromiegruppe des Problems zu erhalten, wird man einerseits die Coefficienten von f, andererseits die Stelle $(y, \sqrt{f(y)})$ geschlossene Wege durchlaufen lassen müssen. Die erstere Operation führt die Indices ν, den Resultaten von § 36 zufolge, in andere ν' über, welche mit jenen durch die Congruenzen (119) verbunden sind. Durchläuft aber eine Stelle y etwa den ersten Periodenweg, so vermehrt sich ν_1 um 1, bei wiederholtem Umlauf um eine beliebige ganze Zahl; dasselbe lässt sich bei den übrigen ν erreichen. *Die Monodromiegruppe* G *des allgemeinen Theilungsproblems kann also definirt werden durch ein System von Congruenzen, welches aus dem System* (119) *durch Zufügung additiver Glieder entsteht, etwa:*

$$(120) \quad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv A + a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 + a_3 \nu_3 + a_4 \nu_4, \\ \nu_2' &\equiv B + b_1 \nu_1 + b_2 \nu_2 + b_3 \nu_3 + b_4 \nu_4, \\ \nu_3' &\equiv C + c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3 + c_4 \nu_4, \\ \nu_4' &\equiv D + d_1 \nu_1 + d_2 \nu_2 + d_3 \nu_3 + d_4 \nu_4. \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

Diese Gruppe besteht aus:

$$n^4 \cdot N$$

Operationen, wo N in (49) *definirt ist.*

Es möge hier sogleich die Frage nach *Untergruppen* von G gestellt werden, die wir für das specielle Problem erst später aufwerfen werden. Man erkennt zunächst unmittelbar:

Ein erstes Beispiel einer solchen Untergruppe liefert die Monodromiegruppe g_1 des speciellen Theilungsproblems für dieselbe Zahl n.

Der Index von g_1 in Bezug auf G ist n^4.

Eine zweite Untergruppe g_2 wird gebildet von den Substitutionen der Form:

$$(121) \qquad \begin{aligned} \nu_1' &\equiv \nu_1 + A, \\ \nu_2' &\equiv \nu_2 + B, \\ \nu_3' &\equiv \nu_3 + C, \\ \nu_4' &\equiv \nu_4 + D. \end{aligned}$$

Diese Untergruppe ist innerhalb der Gruppe G ausgezeichnet. Denn aus den Congruenzen:

$$\begin{aligned} \nu_1' &\equiv A + a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + \cdots, \text{ etc.}, \\ \nu_1'' &\equiv \nu_1' + A', \text{ etc.}, \\ \nu_1''' &\equiv c_3(\nu_1'' - A) + d_3(\nu_2'' - B) - \cdots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

in welchen die c_3, d_3, ... (vgl. § 4, Gl. (14)) das inverse System zu dem der a bilden, folgt sofort:

$$\nu_1''' \equiv \nu_1 + A''';$$

d. h. wird eine Operation von g_2 durch eine Operation von G transformirt, so wird wieder eine Operation von g_2 erhalten. Das aber ist die charakteristische Eigenschaft einer ausgezeichneten Untergruppe.

Der Index dieser Untergruppe in Bezug auf G ist N.

Zu diesen beiden Untergruppen suchen wir nun zugehörige *Resolventen.*

Bei allen Operationen der Untergruppe g_1 bleibt S_{0000} an seinem Platze; andererseits wird diese Wurzel bei jeder Operation von G, welche nicht zu g_1 gehört, durch eine andere S_{ABCD} ersetzt. Eine zu g_1 gehörige Resolvente ist also die Gleichung, von welcher S_{0000} abhängt, m. a. W.:

Zu der Untergruppe g_1 des allgemeinen Theilungsproblems gehört als Resolvente eben dieses allgemeine Theilungsproblem selbst.

Eine Resolvente, welche der Untergruppe g_2 zugehört, wird erhalten werden, wenn man eine Function der S kennt, welche bei den Operationen dieser Untergruppe unverändert bleibt. Da nun diese Operationen dadurch zu Stande kommen, dass die Stellen y geschlossene Wege beschreiben, so wird die gesuchte Function von diesen Stellen *rational* abhängen müssen. Solche Functionen sind aber die *Lösungen des speciellen Theilungsproblems.* Die *einzelne* Wurzel desselben würde jedoch dem hier in's Auge gefassten Zwecke insofern nicht entsprechen, als sie nicht nur bei den Operationen von g_2, sondern auch noch bei andern Operationen ungeändert bleibt. Da jedoch diese hinzutretenden Operationen für jede Wurzel des speciellen Theilungsproblems andere und andere sind, so wird eine Function dieser Wurzeln, welche bei keiner zulässigen (in g_1 enthaltenen) Vertauschung derselben ungeändert bleibt, m. a. W. so wird eine Wurzel der im Sinne der Monodromiegruppe gebildeten Galois'schen Resolvente des speciellen Theilungsproblems sich als zweckentsprechend erweisen. Auf diese Weise gelangt man zu dem Resultate:

Zur Untergruppe g_2 gehört als Resolvente des allgemeinen Theilungsproblems die im Sinne der Monodromiegruppe zu bildende Galois'sche Resolvente des speciellen Theilungsproblems.

Ob man nun *die* Wurzel einer solchen Resolvente adjungirt oder *sämmtliche* Wurzeln des speciellen Theilungsproblems selbst, hat ganz die gleiche Wirkung; es soll deshalb im Folgenden der Kürze halber zumeist von letzterer Operation gesprochen werden.

§ 38.

Auflösung des allgemeinen Theilungsproblems nach Adjunction der Wurzeln des speciellen.*)

Wird nun der Rationalitätsbereich erweitert, indem die Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung als bekannt angenommen werden, so erscheinen neben den y nicht mehr die Coefficienten von f, sondern eben diese Wurzeln als die Parameter, welche bei Bestimmung der Monodromiegruppe des allgemeinen Problems zu Grunde zu legen sind. Werden aber sämmtliche Wurzeln des speciellen Theilungsproblems zu ihren Anfangswerthen zurückgeführt, so kehrt auch jeder Periodenbruchtheil

$$\frac{\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2+\nu_3\omega_3+\nu_4\omega_4}{n}$$

wieder zu seinem Anfangswerth zurück, demnach auch jedes $S_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$, sodass die Monodromie *dieser* Parameter überhaupt keine Permutation der S bewirkt. Solche Permutationen können also nur noch durch die Monodromie der Stellen y hervorgebracht werden: diese aber liefert keine andern Operationen als die der durch die Congruenzen (121) definirten Untergruppe g_1. M. a. W.:

*) Vgl. Hermite, Cr. J. Bd. 32, p. 277 (Jacobi's ges. W. Bd. II, p. 87).

Durch Adjunction sämmtlicher Wurzeln des speciellen Theilungsproblems reducirt sich die Monodromiegruppe des allgemeinen auf die Gruppe g_2.

So führt die directe Betrachtung der Monodromie der neuen Parameter zu demselben Resultat, zu welchem auch der allgemeine Satz der Algebra geführt haben würde:

*Adjunction der Wurzeln einer ausgezeichneten Resolvente reducirt das Hauptproblem, ohne es ganz zu lösen.**)

Die Gruppe g_2 auf deren Untersuchung man so geführt ist, hat einen sehr einfachen Aufbau: alle ihre Operationen sind untereinander vertauschbar. Eine Gleichung, deren Gruppe diese Eigenschaft besitzt, nennt man eine *Abel'sche Gleichung***). Die Gruppe erwächst aus 4 erzeugenden Operationen, welche in Vermehrung je eines ν um 1 bestehen; jede derselben besitzt eine Periode $= n$. In Folge dessen ist unsere Gleichung durch Nebeneinanderstellen von vier n^{ten} Wurzeln lösbar, und wir können das Resultat zusammenfassen in dem Satze***):

Nach Adjunction der Wurzeln des speciellen Theilungsproblems findet das allgemeine seinen Ausdruck in einer vierfaltigen Abel'schen Gleichung und ist daher algebraisch, nämlich durch 4 nebeneinandergestellte n^{te} Wurzeln, lösbar.

Die wirkliche Ausführung der Auflösung geschieht in bekannter Weise durch die Resolvente von Lagrange; man vgl. übrigens § 31.

§ 39.

Resolventen des speciellen Theilungsproblems auf Grund der Monodromiegruppe.

Wir wenden uns nunmehr wieder dem speciellen Theilungsproblem zu und stellen zunächst die Frage nach *ausgezeichneten Untergruppen.* Eine solche ist die Gruppe von nur zwei Operationen:

$$(122)\qquad \begin{array}{l} \nu_1' \equiv \nu_1, \\ \nu_2' \equiv \nu_2, \\ \nu_3' \equiv \nu_3, \\ \nu_4' \equiv \nu_4, \end{array} \qquad \text{und:} \qquad \left.\begin{array}{l} \nu_1' \equiv -\nu_1, \\ \nu_2' \equiv -\nu_2, \\ \nu_3' \equiv -\nu_3, \\ \nu_4' \equiv -\nu_4. \end{array}\right\} \pmod{n}$$

Eine zugehörige Resolvente muss zur Wurzel eine Function der Lösungen haben, welche ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Perioden

*) Vgl. etwa C. Jordan, tr. des subst. p. 261 oder Netto, Substitutionentheorie p. 264.

**) Vgl. etwa C. Jordan, a. a. O. p. 286 oder Netto, a. a. O. p. 189 ff.

***) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen § 70.

im Vorzeichen geändert werden, also den Theilwerth einer *geraden* hyperelliptischen Function. Es folgt hieraus:

Die specielle Theilung lässt sich spalten in ein Problem mit einer Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}N$ *und in ein Problem mit einer Gruppe der Ordnung* 2. *Als das erstere kann die specielle Theilung der geraden Functionen gewählt werden; ist dieselbe erledigt, so erfordert die Theilung der ungeraden Functionen nur noch die Ausziehung e i n e r Quadratwurzel.*

Es ist dieser Spaltung schon oben bei der algebraischen Formulirung (§ 33) Rechnung getragen worden, als zwei conjugirte Lösungen zusammengefasst und damit der Grad des Problems von n^4-1 auf $\frac{1}{2}(n^4-1)$ herabgedrückt wurde; doch konnten wir damals noch nicht schliessen, dass nachher *eine* Quadratwurzel ausreicht. —

Die Gruppe des geraden Problems lässt sich nun am einfachsten schreiben, wenn man die ν nur als Verhältnissgrössen auffasst: die Quotienten der ν bleiben ja ungeändert, wenn man die ν alle das Vorzeichen wechseln lässt. Setzt man, um dies auszudrücken, einen Proportionalitätsfactor ϱ zu, so erhält man für die *Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems der geraden Functionen* die Form:

$$(123)\qquad \left.\begin{aligned} \varrho\nu_1' &\equiv a_1\nu_1+a_2\nu_2+a_3\nu_3+a_4\nu_4,\\ \varrho\nu_2' &\equiv b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3+b_4\nu_4,\\ \varrho\nu_3' &\equiv c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3+c_4\nu_4,\\ \varrho\nu_4' &\equiv d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3+d_4\nu_4. \end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } n)$$

Dabei hindert die Bedingung:

$$(abcd)=1,$$

welcher die Coefficienten genügen müssen, dem Multiplicator ϱ andere Werthe als ± 1 beizulegen.

Nach den Untersuchungen des Herrn C. J o r d a n*) ist diese Gruppe *einfach*, d. h. sie enthält keine ausgezeichnete Untergruppe mehr.

Es ist also eine weitere Spaltung des speciellen Theilungsproblems nicht mehr möglich. —

Wenn sonach auf eine Zerlegung des Auflösungsprocesses in einzelne Schritte verzichtet werden muss, so bleibt nur noch die Frage nach geeigneten Gleichungen, welche als algebraischer Ausdruck des Problems gelten können, d. h. die Frage nach (nicht ausgezeichneten) *Untergruppen* und *Resolventen*. Bei der Beantwortung dieser Frage wird man sich wieder leiten lassen durch die Resultate, welche die Behandlung der entsprechenden Frage in der Theorie der *elliptischen* Functionen geliefert hat. Als das wichtigste Resultat erscheint dort,

*) Tr. des subst. p. 176 ff.

dass *das specielle Transformationsproblem eine Resolvente des speciellen Theilungsproblems* ist: während dem letzteren eine Gruppe zukommt, die durch die Congruenz:

$$(124) \qquad \left.\begin{aligned} \varrho v_1' &\equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 \\ \varrho v_2' &\equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

mit der Bedingung:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \equiv 1 \pmod{n}$$

dargestellt ist, bleibt die einzelne Wurzel des Transformationsproblems ungeändert bei derjenigen Untergruppe von (124), welche durch die Congruenz:

$$(125) \qquad a_2 \equiv 0 \pmod{n}$$

definirt ist, bezw. bei einer mit dieser gleichberechtigten Untergruppe.

Versucht man nun aus der Gruppe (123) in ähnlicher Weise, wie dies durch (125) aus der Gruppe (124) geschieht, Untergruppen abzuscheiden durch Congruenzen, welchen die Coefficienten unterworfen werden, so sieht man leicht, dass das in doppelter Weise geschehen kann. Man kann erstens

$$b_1 \equiv c_1 \equiv d_1 \equiv 0$$

annehmen; der Bilinearrelationen (15) wegen muss dann auch:

$$c_2 \equiv c_4 \equiv 0$$

gesetzt werden, sodass das Coefficientenschema die folgende Gestalt annimmt:

$$(126) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \pmod{n}$$

Die stehengebliebenen Coefficienten müssen dabei selbstverständlich noch den übrigen Bilinearrelationen genügen.

Man kann aber *zweitens* auch den vierten Theil des Schema's mit Nullen anfüllen, sodass es folgende Gestalt annimmt:

$$(127) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \pmod{n}$$

und dann die so definirte Gruppe betrachten.

Es erheben sich nun die beiden Fragen nach den *Indices* dieser beiden Arten von Untergruppen und nach zugehörigen *Resolventen.* Für die Gruppe (126) kann man die letztere Frage direct angreifen und damit auch zugleich die Beantwortung der ersteren erreichen.*)

*) H. Weber, annali di mat. ser. II, t. 9, p. 156.

Sei wieder $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ die allgemeine Bezeichnung für die Wurzeln des speciellen Theilungsproblems: man bilde, unter g eine primitive Wurzel der Primzahl n verstanden, eine *cyklische* Function der Lösungssysteme:

$$s_{1000},\quad s_{g000},\quad s_{g^2000}\ \ldots\ s_{g^{n-2}000},$$

so wird dieselbe bei allen Operationen der Gruppe (126) und bei keinen andern ungeändert bleiben. Denselben Dienst wird aber auch eine *symmetrische* Function dieser Wurzeln leisten, da die Operationen, bei welchen eine solche sonst noch ungeändert bleibt, der hier zu Grunde zu legenden Gruppe (123) des speciellen Theilungsproblems überhaupt nicht angehören. Es möge also etwa die Summe:

$$(128)\qquad C = s_{1000} + s_{2000} + s_{3000} + \cdots + s_{n-1,000}$$

den folgenden Auseinandersetzungen zu Grunde gelegt werden. Der Grad der Resolvente, welcher C genügt, bestimmt sich folgendermassen: Durchlaufen die Parameter bestimmte Wege, sodass etwa s_{1000} in $s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$ übergeführt werden, so ist damit allein schon völlig bestimmt, in welche Werthe die übrigen in C auftretenden s übergehen: aus s_{2000} wird $s_{2\nu_1,2\nu_2,2\nu_3,2\nu_4}$ aus s_{3000} $s_{3\nu_1,3\nu_2,3\nu_3,3\nu_4}$ u. s. f. Die n^4-1 Wurzeln des speciellen Theilungsproblems lassen sich also in der Weise in Reihen von je $n-1$ Wurzeln zusammenfassen, dass die Summe der Wurzeln jeder Reihe einen der Werthe liefert, welche C bei den Operationen der Gruppe des Problems annimmt. C besitzt also $\frac{n^4-1}{n-1}$ verschiedene Werthe, und das Resultat ist:

Der Grad der Resolvente, welcher C genügt, ist:

$$\frac{n^4-1}{n-1} = n^3 + n^2 + n + 1;$$

dieselbe Zahl giebt also den Index der Untergruppe (126) *an.*

Im Falle $n = 3$ ist übrigens diese Resolvente für C keine andere als diejenige, welche die specielle Theilung der geraden hyperelliptischen Functionen liefert; da nämlich stets $2\nu \equiv -\nu$ (mod. 3), so reducirt sich C in diesem Falle auf:

$$s_{+\nu_1,+\nu_2,+\nu_3,+\nu_4} + s_{-\nu_1,-\nu_2,-\nu_3,-\nu_4}.$$

Die Untersuchung der Untergruppe (127) beginnen wir am bequemsten damit, dass wir ihre Ordnung (die Anzahl ihrer Substitutionen) direct abzählen und aus dieser den Index ableiten. Von den aus den *Bilinearrelationen* (15) entspringenden Congruenzen ist hier die erste identisch erfüllt, die folgenden liefern (mod. n):

$$(129)\qquad a_1c_3 + b_1d_3 \equiv 1,$$
$$(130)\qquad a_1c_4 + b_1d_4 \equiv 0,$$
$$(131)\qquad a_2c_3 + b_2d_3 \equiv 0,$$
$$(132)\qquad a_2c_4 + b_2d_4 \equiv 1,$$
$$(133)\qquad a_3c_4 - a_4c_3 + b_3d_4 - b_4d_3 \equiv 0.$$

Wird:

$$d_4 \equiv \mu a_1, \qquad a_2 \equiv \nu d_3$$

gesetzt, so folgt aus (130) und (131):

$$c_4 \equiv -\mu b_1, \qquad b_2 \equiv -\nu c_3;$$

wird beides in (132) eingesetzt, so folgt mit Rücksicht auf (129):

$$(134) \qquad -\mu\nu \equiv 1.$$

Nun können zunächst, wie aus der entsprechenden Untersuchung für den elliptischen Fall hervorgeht,

$$a_1, \quad b_1, \quad c_3, \quad d_3$$

auf $n(n^2-1)$ verschiedene Arten so gewählt werden, dass (129) erfüllt ist. Die Congruenz (134) lässt sich durch $n-1$ Werthepaare μ, ν befriedigen; jedes derselben liefert, wenn a_1, b_1, c_3, d_3 fixirt sind, eine und nur eine Bestimmung für a_2, b_2, c_4, d_4. Sind auch diese festgelegt, so lassen sich von den 4 noch übrigen Coefficienten a_3, a_4, b_3, b_4 immer drei willkürlich wählen und der vierte so dazu bestimmen, dass auch (133) erfüllt ist; und zwar nur auf eine einzige Weise, denn man überzeugt sich leicht, dass c_3, c_4, d_3, d_4 niemals alle gleichzeitig $\equiv 0$ werden. Dies liefert also noch n^3 Möglichkeiten, und man erhält so für die *Ordnung* der hier zu bestimmenden Untergruppe die Zahl:

$$(n^2-1)\,n\cdot(n-1)\cdot n^3$$

und also für ihren Index (vgl. (49)):*)

$$(135) \qquad \frac{n^4-1}{n-1} = (n+1)(n^2+1) = n^3+n^2+n+1.$$

Nun werden wir später zeigen, dass die Gruppe (127) die Gruppe des speciellen Transformationsproblems ist; vorgreifend können wir also sagen:

Die zweite der oben aufgestellten Untergruppen führt zu einer Resolvente des speciellen Theilungsproblems, welche nichts anderes ist als der Ausdruck des speciellen Transformationsproblems. Der Grad derselben ist derselbe, wie der der Resolvente für C, nämlich

$$n^3+n^2+n+1.$$

Was nun die Frage nach etwa noch weiter vorhandenen Untergruppen und zugehörigen Resolventen betrifft, so hat Herr C. Jordan**) für $n=3$ Untergruppen von den Indices 45, 40, 36, 27 angegeben und gezeigt, dass *die Resolvente 27. Grades denselben Affect besitzt, wie die Gleichung, von welcher die Bestimmung der 27 Geraden einer*

*) Eine andere Ableitung für diese Zahl giebt C. Jordan, traité p. 666.
**) a. a. O. p. 365 ff. p. 416 ff.

Fläche III. Ordnung abhängt. (Ueber die wirkliche Reduction beider Probleme auf einander vergleiche man den Brief von F. Klein an C. Jordan, Journ. de math. sér. 4, t. 4, p. 169).

Ferner hat C. Jordan gezeigt*), dass für $n=3$ keine Resolvente von niedrigerem als dem 27. Grad, und angegeben**), dass für $n=5$ keine Resolvente von niedrigerem Grad existirt als der des speciellen Transformationsproblems ($=156$).

Herr Gierster hat***) die analoge Frage im Gebiet der elliptischen Functionen dadurch zum Abschluss gebracht, dass er untersuchte, wie man aus den bekannten endlichen Gruppen *binärer linearer Substitutionen* entsprechende Gruppen binärer linearer *Congruenzen* gewinnen könne, und indem er den Beweis hinzufügte, dass man auf diese Weise sämmtliche Untergruppen enthält.

Damit mögen die Angaben über die Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems abgeschlossen sein.

§ 40.

Arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems.

Wir wenden uns nunmehr der Frage nach der arithmetischen Gruppe zu. Eine untere Grenze für dieselbe ist durch die Monodromiegruppe gegeben; eine obere Grenze liefert der bekannte Satz: *Sobald irgend eine Verbindung der Wurzeln des Problems rational bekannt ist, kann die Galois'sche Gruppe desselben jedenfalls nicht grösser sein, als dass diese Function bei allen Vertauschungen derselben ihren numerischen Werth behält.*

Eine solche Function wird nun durch das *Additionstheorem* in der That geliefert. Aus demselben folgt nämlich: Ist:

$$(136)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1'' &\equiv \nu_1 + \nu_1', \\ \nu_2'' &\equiv \nu_2 + \nu_2', \\ \nu_3'' &\equiv \nu_3 + \nu_3', \\ \nu_4'' &\equiv \nu_4 + \nu_4', \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

so ist $s_{\nu_1''\nu_2''\nu_3''\nu_4''}$ im Sinne des hier zu Grunde zu legenden Rationalitätsbereichs eine rationale Function von $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ und $s_{\nu_1'\nu_2'\nu_3'\nu_4'}$ mit rationalen Coefficienten; es besteht also eine Gleichung der Form:

$$(137)\qquad s_{\nu''} - R(s_{\nu_1}, s_{\nu'}) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist hiernach eine rational bekannte Function der Wurzeln. Die arithmetische Gruppe unseres Problems

---

*) a. a. O. p. 319 ff.

**) a. a. O. p. 667.

***) Dieser Ann. Bd. 18.

kann also nur aus solchen Vertauschungen der Wurzeln bestehen, bei welchen diese Function, die gleich Null ist, auch Null bleibt; und sie ist nur Null für: $\nu'' = \nu + \nu'$ (wie die Congruenzen (136) kurz zusammengefasst werden mögen). Damit ist das erste Resultat erhalten:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems kann nur aus solchen Vertauschungen der Lösungssysteme bestehen, bei welchen Beziehungen der Form:

$$\nu'' = \nu + \nu'$$

ungeändert bleiben.

Diese Vertauschungen lassen sich nun, wie C. Jordan*) für den elliptischen Fall gezeigt hat, in folgender Weise bestimmen. Sei:

$$\bar{\nu}_i = f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{138}$$

eine solche Substitution, so kann aus dem Umstande, dass mit $\nu'' = \nu + \nu'$ zugleich $\bar{\nu}'' = \bar{\nu} + \bar{\nu}'$ sein soll, geschlossen werden, dass die Functionen f die Eigenschaft haben müssen:

$$f_i(\nu_1 + \nu_1', \cdots \nu_4 + \nu_4') \equiv f_i(\nu_1, \cdots \nu_4) + f_i(\nu_1', \cdots \nu_4'). \tag{139}$$

Daraus folgt, indem man $\nu' = \nu$ setzt, dann $\nu' = 2\nu$ u. s. f., dass allgemein:

$$f_i(m\nu_1, \cdots m\nu_4) \equiv m f_i(\nu_1, \cdots \nu_4) \pmod{n} \tag{140}$$

sein muss. Andererseits liefert Wiederholung von (139):

$$\begin{aligned} &f_i(\nu_1 + \nu_1' + \nu_1'' + \nu_1''', \cdots) \\ \equiv f_i(\nu_1, \cdots) + f_i(\nu_1', \cdots) &+ f_i(\nu_1'', \cdots) + f_i(\nu_1''', \cdots) \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn ausser $\nu_1, \nu_2', \nu_3'', \nu_4'''$ alle $\nu \equiv 0$ gesetzt werden und zur Abkürzung $f_{i1}(\nu)$, $f_{i2}(\nu)$, $f_{i3}(\nu)$, $f_{i4}(\nu)$ bezw. statt $f_i(\nu, 0, 0, 0)$, $f_i(0, \nu, 0, 0)$, $f_i(0, 0, \nu, 0)$, $f_i(0, 0, 0, \nu)$ geschrieben wird:

$$f_i(\nu_1, \nu_2', \nu_3'', \nu_4''') \equiv f_{i1}(\nu_1) + f_{i2}(\nu_2') + f_{i3}(\nu_3'') + f_{i4}(\nu_4'''),$$

wo jetzt die oberen Indices auch weggelassen werden können. Die einzelnen f_{ik} müssen nun selbst der Functionalgleichung genügen:

$$f_{ik}(\nu + \nu') \equiv f_{ik}(\nu) + f_{ik}(\nu'),$$

und diese führt (wie (139) zu (140)) zu:

$$f_{ik}(m\nu) \equiv m f_{ik}(\nu)$$

und:

$$f_{ik}(m) \equiv m f_{ik}(1) \equiv a_{ik} m,$$

wo a_{ik} eine Constante ist. Damit ist für die Substitutionen (138) die Form gewonnen:

---

*) a. a. O. p. 346.

$$(141)\quad \left.\begin{aligned} v_1' &\equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4,\\ v_2' &\equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4,\\ v_3' &\equiv c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4,\\ v_4' &\equiv d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_4 v_4. \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

Die a, b, c, d sind dabei zunächst keiner andern Bedingung unterworfen, als dass ihre Determinante nicht $\equiv 0 \pmod{n}$ sein darf, da sonst die Congruenzen (141) keine Substitution darstellen. Also folgt:

Beziehungen der Form $v'' = v + v'$ *bleiben nur bei den Operationen der linearen Gruppe* (141) *erhalten.*

Folglich ist die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems in dieser Gruppe enthalten.

Andererseits ist auf Grund eines allgemeinen Satzes*) bekannt, dass die Monodromiegruppe eine *ausgezeichnete Untergruppe* der arithmetischen Gruppe ist. Nun kann aber die allgemeinste Untergruppe von (141), welche die Monodromiegruppe ausgezeichnet enthält, durch folgende Ueberlegung**) bestimmt werden: Bei allen Operationen der Monodromiegruppe bleibt die Bilinearform:

$$(142)\qquad v_1 v_3' - v_3 v_1' + v_2 v_4' - v_4 v_2'$$

(mod. n) erhalten; und zwar ist dies die einzige Bilinearform, welche diese Eigenschaft hat. Soll also eine Operation mit der Monodromiegruppe vertauschbar sein, so muss sie die Bilinearform (142) in eine Function derselben verwandeln. Soll diese Operation zugleich unter der Gruppe (141) begriffen sein, so kann diese Function, da sie wieder eine Bilinearform sein muss, nichts anderes sein als ein Multiplum der ursprünglichen Bilinearform. Also:

Eine lineare Substitution, welche mit der Monodromiegruppe vertauschbar ist, ändert die Bilinearform (142) *nur um eine multiplicative Constante.*

Aber alle Substitutionen, welche diese Eigenschaft haben, genügen***) den Relationen:

$$(143)\quad \left.\begin{aligned} &[a, b] \equiv 0, \quad &&[a, c] \equiv D, \quad &&[a, d] \equiv 0,\\ &[b, c] \equiv 0, &&[b, d] \equiv D, &&[c, d] \equiv 0, \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

wobei D nur nicht $\equiv 0 \pmod{n}$ sein darf, damit überhaupt eine Substitution erhalten wird. Damit ist nun das Resultat erhalten:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems ist enthalten in derjenigen Untergruppe der linearen Gruppe (141), *welche durch die Congruenzen* (143) *charakterisirt ist.*

*) C. Jordan, tr. des subst. p. 278.

**) C. Jordan benutzt a. a. O. p. 363 eine andere Ueberlegung.

***) C. Jordan, a. a. O. p. 172.

Nun enthält (was ganz ebenso wie § 15 abzuzählen ist), die Gruppe (143):

$$(n-1)\,N$$

Operationen, unter N die Ordnung der Monodromiegruppe (49) verstanden; also:

Die arithmetische Gruppe ist höchstens $(n-1)$ mal so gross, als die Monodromiegruppe.

Enthält die arithmetische Gruppe überhaupt eine der Operationen der Gruppe (143), so enthält sie alle diejenigen, welche demselben Werthe D_1 von D entsprechen; denn alle diese gehen durch Zusammensetzung mit den Operationen der Monodromiegruppe auseinander hervor. Sie enthält aber dann auch, wie sofort zu sehen, alle Operationen, für welche $D \equiv D_1^2, D_1^3 \ldots$. Die Anzahl der (*mod.* n) verschiedenen Potenzen von D_1 ist aber bekanntlich stets ein Theiler von $n-1$; daher folgt:

Die arithmetische Gruppe besteht aus $\delta \cdot N$ Operationen, unter δ einen Theiler von $n-1$ verstanden, der zugleich angiebt, wie vieler verschiedener Werthe das D innerhalb der arithmetischen Gruppe fähig ist.

Nunmehr kann auch noch diese Zahl δ mit Hilfe eines indirecten Schlusses bestimmt werden. Man bilde eine rationale Function der Wurzeln, welche die Eigenschaft hat, bei allen Substitutionen der Monodromiegruppe ungeändert zu bleiben, bei allen andern Vertauschungen der Wurzeln aber sich zu ändern. Eine solche Function wird eine *rationale Function der Parameter mit irrationalen Zahlencoefficienten* sein. Die einfachste Function dieser Art würde man erhalten, wenn man erreichen könnte, dass die Parameter ganz herausfallen. In der That gelingt es bekanntlich im *elliptischen* Falle, die ν^{te} *Einheitswurzel* ε als rationale Function der Wurzeln des speciellen Theilungsproblems darzustellen. Da nun ε einer *irreducibeln* Gleichung mit einer Gruppe von $n-1$ Operationen genügt, so ist in *diesem* Falle in der That:

$$\delta = n-1,$$

und es sind alle Werthe von D zulässig.

Andererseits aber kann man ohne Schwierigkeit zeigen:

Die specielle elliptische Theilung ist ein Specialfall der speciellen hyperelliptischen Theilung, indem aus dem algebraischen Ansatz für $p=2$ (Glchg. (110)) sofort der entsprechende Ansatz für $p=1$ folgt, wenn man zwei Wurzeln von f_6 zusammenfallen lässt.

Da nun im elliptischen Fall die Adjunction von ε erforderlich ist, um die arithmetische Gruppe auf die Monodromiegruppe herabzudrücken, so kann im hyperelliptischen Falle, als dem allgemeineren, sicher nicht weniger erforderlich sein. Man wird daher auch in diesem:

$$\delta = n - 1$$

zu setzen haben und erhält so zunächst das Resultat:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems besteht aus allen Operationen, welche den Bedingungen (143) *für beliebige von Null verschiedene D genügen.*

Was die arithmetische Natur der Irrationalität betrifft, durch deren Adjunction die arithmetische Gruppe auf die Monodromiegruppe herabgedrückt wird, so wird man annehmen dürfen, dass dieselbe von ε nicht verschieden sei.

§ 41.

Arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems.

Die arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems wird nun erhalten, wenn man die Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung mit der arithmetischen Gruppe der speciellen vereinigt. Denn die Reduction der allgemeinen Theilung auf die specielle (§ 37) erfordert nicht die Adjunction von irgend welchen numerischen Irrationalitäten.

Die Zusammenfassung aller bisher erlangten Einzelresultate führt daher zu folgenden Schlusssätzen.

Die Lösungen des allgemeinen Theilungsproblems seien wieder bezeichnet mit $S_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}$. Dann können die Vertauschungen seiner arithmetischen Gruppe definirt werden durch die Congruenzen:

$$(144)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv A + a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4, \\ \nu_2' &\equiv B + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4, \\ \nu_3' &\equiv C + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4, \\ \nu_4' &\equiv D + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4, \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

deren Coefficienten den Bedingungen zu genügen haben

$$(145)\qquad \begin{aligned} [a, b] \equiv [a, d] \equiv [b, c] \equiv [c, d] \equiv 0, \\ [a, c] \equiv [b, d] \gtrless 0. \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod.}\ n).$$

Diesen Bedingungen genügen $n^4 \cdot (n-1) \cdot N$ Werthsysteme; die arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems enthält also:

$$n^4 (n-1) N = n^8 \cdot (n^2+1) \cdot (n+1)^2 \cdot (n-1)^3$$

Operationen.

Zur Lösung des allgemeinen Theilungsproblems führen demnach folgende Schritte:

1. *Zuerst ist die Einheitswurzel ε zu berechnen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf $N n^4$ Operationen.*

2. *Hierauf ist die specielle Theilung der geraden hyperelliptischen Functionen vorzunehmen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf* $2n^4$ *Operationen.*

3. *Die specielle Theilung der ungeraden hyperelliptischen Functionen verlangt jetzt nur noch eine Quadratwurzelausziehung; diese bringt eine Reduction der Gruppe auf* n^4 *Operationen mit sich.*

4. *Endlich sind noch vier verschiedene nebeneinanderstehende* n^{te} *Wurzeln zu ziehen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf* e i n e *Operation und die Auflösung ist erreicht.*

Alle diese Schritte lassen sich durch Wurzelausziehungen ausführen, mit Ausnahme des zweiten, der mit einer Gruppe von $\frac{1}{2}N$ Operationen zu thun hat.

Ausdrücklich sei wiederholt, dass alle diese Sätze unter der Voraussetzung:

n eine ungerade Primzahl

abgeleitet sind.

VI. Abschnitt.

Zweitheilung.

§ 42.

Formulirung.

Schon bei der ersten Formulirung des Zweitheilungsproblems zeigt sich ein abweichendes Verhalten gegenüber dem Problem der Theilung durch eine ungerade Primzahl. Dort musste in der Gleichung (115) links nothwendig eine gerade Anzahl von Punkten x auftreten; denn nur dann war die linke Seite unabhängig von der Auswahl des Verzweigungspunktes a. Setzt man aber das Zweitheilungsproblem in der Gestalt an:

$$(146)\qquad \int_a^x + \int_a^{x'} + \cdots = \frac{w + \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 + \nu_3\omega_3 + \nu_4\omega_4}{2},$$

so kann man links auch eine ungerade Anzahl von Punkten haben, ohne dass dadurch ein Verzweigungspunkt ausgezeichnet würde; denn wird dann a durch irgend einen andern Verzweigungspunkt ersetzt, so ändert sich die Integralsumme nur um eine halbe Periode; an Stelle des vorher angenommenen Werthes der rechten Seite ist also nur ein anderer der Werthe zu setzen, deren sie ohnehin fähig ist.

Es kann demnach bei der Zweitheilung sowohl nach einer geraden, wie nach einer ungeraden Anzahl von Punkten gefragt werden; beides *sind Fragestellungen, die nicht von der Bevorzugung eines einzelnen Verzweigungspunktes abhängen.**)

Von der Hereinziehung der Verzweigungspunkte wird man die Fragestellung am besten ablösen. Der Umstand nämlich, auf welchen es allein ankommt, ist, dass auf dem hyperelliptischen Gebilde *eine Schaar von Punktgruppen von vornherein rational bekannt ist:* die Punkte des Gebildes sind paarweise conjugirt, also sind diese Paare conjugirter Punkte rational bekannt. *In Folge dessen kann man das Umkehrproblem* (41) *in folgender Weise formuliren:*

$$\int_{z'}^{y'} + \int_{\bar{z}'}^{y''} + \int_{z''}^{y'''} + \int_{\bar{z}''}^{y^{IV}} + \cdots = w \tag{147}$$

indem man als untere Grenzen der Integrale immer solche Punktepaare $z, \bar{z}$ *ansetzt.* Von der speciellen Auswahl dieser Punktepaare ist dieser Ansatz ganz unabhängig; er knüpft nur an die rational bekannte Schaar von Punktgruppen an. Das Problem der n-Theilung entsteht nun, indem man verlangt, die y sollen zu je n in Punkte x zusammenfallen. Ist ϱ die Anzahl der x, so ist $n\varrho$ die der y; nach dem gemachten Ansatz muss diese Zahl eine gerade sein. Ist nun n ungerade, so muss ϱ gerade sein; ist aber n gerade, so kann ϱ auch ungerade gewählt werden; und das hatten wir behauptet.

Dementsprechend wird im folgenden von einem *geraden* und einem *ungeraden Zweitheilungsproblem* die Rede sein.

§ 43.

Das specielle gerade Zweitheilungsproblem.

Das specielle gerade Zweitheilungsproblem, mit dessen Discussion begonnen werden möge, lässt sich ganz in derselben Weise behandeln; wie dies in den §§ 33 und 36 mit dem speciellen Problem der Theilung durch eine ungerade Primzahl geschehen ist. Nur wird man, um zu einem algebraischen Ausdruck desselben zu gelangen, in Glchg. (103) ν nicht $= 1$ setzen, um nicht gleich zu Anfang Fallunterscheidungen eintreten lassen zu müssen. —

Die Lösungen können, ganz wie dies § 36, Formel (117), (118) geschehen ist, mit $s_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}$ bezeichnet werden; dann ist wie dort s_{0000} die rational bekannte Lösung, welche auf die Systeme paarweise conjugirter Punkte führt, und die Permutationen, welche die

*) Vergl. die pag. 246 citirten Arbeiten des Herrn Nöther im 16. und 28. Band dieser Ann., in welchen die entsprechenden Unterscheidungen für beliebige algebraische Gebilde stark betont sind.

übrigen 15 Lösungen erfahren, wenn die Parameter geschlossene Wege durchlaufen, sind analog wie unter Nr. 119 gegeben durch die Congruenzen:

$$
(148)\qquad \left.\begin{aligned}
\nu_1' &\equiv a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4,\\
\nu_2' &\equiv b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4,\\
\nu_3' &\equiv c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4,\\
\nu_4' &\equiv d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4,
\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 2)
$$

deren Coefficienten natürlich den Bedingungen (13) nach dem Modul 2 genügen müssen. Mit Rücksicht auf (49) erhält man demnach als erstes Resultat:

Die Monodromiegruppe des geraden speciellen Zweitheilungsproblems besteht aus den 720 in (148) enthaltenen Operationen.

Ein Problem mit einer Gruppe von 720 Operationen ist die wirkliche Aufsuchung der Verzweigungspunkte, die Lösung der Gleichung:

$$f_6 = 0.$$

In der That wird allgemein mit diesem Problem zugleich das der speciellen Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen erster Stufe gelöst. Denn die letztere führt (vgl. § 29) auf Functionen II. Stufe; in § 22 ist aber gezeigt, dass überhaupt *alle* Modulfunctionen II. Stufe sich rational durch die Coordinaten der Verzweigungspunkte ausdrücken lassen. Also folgt zunächst für den hier vorliegenden Fall des Problems:

Die Gleichung $f_6 = 0$ ist eine Resolvente des geraden speciellen Zweitheilungsproblems.

Seien, um das im einzelnen durchzuführen, x', x'' ... irgend welche Punkte, die eine bestimmte Lösung $s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$ des geraden speciellen Zweitheilungsproblems liefern; dann werden $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ ... dieselbe Lösung darstellen. Sie geben nämlich (vgl. § 33) $s_{-\nu_1,-\nu_2,-\nu_3,-\nu_4}$, und das ist hier von $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ nicht verschieden. Also folgt:

Ein jedes Punktsystem, welches eine Lösung des speciellen Zweitheilungsproblems liefert, ist zu dem System der conjugirten Punkte äquivalent.

Solche Punktsysteme sind aber, wenn die Zahl der Punkte, was ja stets angeht, unter sechs herabgedrückt wird, nur zu bilden aus Paaren conjugirter Punkte x, $\bar{x}$ und aus den Verzweigungspunkten. Erstere können unbeschadet der Aequivalenz weggelassen werden, sodass nur die Verzweigungspunkte bleiben und man folgendes Resultat erhält:

Das gerade specielle Zweitheilungsproblem verlangt die Bestimmung einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten von der Beschaffenheit, dass die zugehörige Integralsumme eine halbe Periode wird.

Aber *jede* gerade Anzahl von Verzweigungspunkten liefert eine halbe Periode als Integralsumme; beachtet man also noch, dass die Summe der Integrale von einem Verzweigungspunkte zu allen andern Null ist, dass es also gleichgültig ist, ob man eine bestimmte Gruppe von Verzweigungspunkten wählt oder gerade die nicht in dieser Gruppe enthaltenen, so erkennt man, dass es nur darauf ankommt, alle Zerlegungen der Form f_6 in zwei Factoren geraden Grades zu finden. Man hat also folgendes Resultat:

Die Gleichung 16. *Grades des geraden speciellen Zweitheilungsproblems reducirt sich nach Abtrennung des Linearfactors, welcher den Systemen paarweise conjugirter Punkte entspricht, auf diejenige Resolvente* 15. *Grades von* f_6, *von welcher die Zerspaltungen:*

$$f_6 = \varphi_2 \cdot \psi_4$$

abhängen.

§ 44.

Das specielle ungerade Zweitheilungsproblem.

Für das specielle *ungerade* Zweitheilungsproblem kann eine Bezifferung der Wurzeln, wie wir sie bisher benutzten, nicht mehr ohne Bevorzugung eines Verzweigungspunktes durchgeführt werden. In Folge dessen ist die Monodromiegruppe der Lösungssysteme nicht mehr so leicht von vornherein zu übersehen, und ihre Aufstellung soll daher bis nach der algebraischen Discussion verschoben werden.

Die letztere aber geschieht wie bei dem geraden Problem. Denn wenn die bis zu den Punkten $x', x'' \ldots$ erstreckten Integrale eine halbe Periode geben, so geben die bis zu den Punkten $\bar{x}', \bar{x}'' \ldots$ erstreckten Integrale dieselbe halbe Periode (mit entgegengesetztem Zeichen, was hier gleichgültig ist). Analoge Schlüsse wie in § 43 führen von da aus zu dem Resultat:

Das ungerade specielle Zweitheilungsproblem verlangt, alle Zerlegungen der Form f_6 *in zwei Factoren ungeraden Grades zu finden.*

Nun existiren:

$$6 \text{ Zerspaltungen } f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5,$$
$$10 \text{ Zerspaltungen } f_6 = \varphi_3 \cdot \psi_3;$$

man erhält also in der That 16 Lösungen und kann den Satz aussprechen:

Die Gleichung 16. *Grades des ungeraden speciellen Zweitheilungsproblems ist reducibel, indem ihre linke Seite in zwei Factoren zerfällt: der eine dieser Factoren ist die Form* f_6 *selbst, der andere diejenige Resolvente* 10. *Grades derselben, von der die Zerspaltungen von* f_6 *in zwei cubische Factoren abhängen.*

Man sieht, *dass den 16 Lösungen des ungeraden Problems die 16 Formen D des § 23, also auch die 16 Sigmafunctionen entsprechen.* Diese Bemerkung führt nun auch zur Beantwortung der zuerst bei Seite geschobenen Fragen nach einer zweckmässigen Bezeichnung der Lösungssysteme und nach der Darstellung der Monodromiegruppe durch Congruenzen. Man wird nämlich jeder Lösung unseres Problems bei Zugrundelegung eines bestimmten Querschnittsystems diejenigen vier Zahlen als Indices beilegen, welche die Primcharakteristik der zugehörigen Sigmafunction in Bezug auf dasselbe Querschnittsystem bilden. Dann folgt (vgl. § 27), dass die *Monodromiegruppe des ungeraden speciellen Theilungsproblems dargestellt werden kann durch die Congruenzen:*

$$(149)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4 + a_1a_3 + a_2a_4, \\ \nu_2' &\equiv b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4 + b_1b_3 + b_2b_4, \\ \nu_3' &\equiv c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4 + c_1c_3 + c_2c_4, \\ \nu_4' &\equiv d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4 + d_1d_3 + d_2d_4. \end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 2)$$

(deren Coefficienten natürlich wieder den oft erwähnten Bedingungen mod. 2 genügen).

Der Reducibilität des Problems entspricht die Intransivität seiner Gruppe. In der That lassen alle Substitutionen (118) die quadratische Form:

$$\nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_4$$

nach dem Modul 2 ungeändert; in Folge dessen vertauschen sich einerseits diejenigen Lösungen unter sich, für welche der Werth dieser Form gerade, andererseits diejenigen, für welche er ungerade ist. —

Es mögen hier noch zwei Bemerkungen Platz finden, welche sich sowohl auf das gerade, als auf das ungerade specielle Zweitheilungsproblem beziehen.

Erstens nämlich ist zu erwähnen, dass man die einzelnen Factoren von f finden kann, sobald man einen der Factoren des geraden oder des ungeraden Problems in seine linearen Bestandtheile zerspalten hat. Denn aus je zwei Factoren gleichen Grades von f, die alle Wurzeln bis auf eine gemein haben, lässt sich diese Wurzel auf rationalem Wege abtrennen. Es sind also damit zugleich auch die übrigen Factoren beider Probleme zerspalten, sodass man sagen kann:

Sämmtliche irreducibeln Factoren des speciellen Zweitheilungsproblems werden aufgelöst, indem man die Wurzeln eines dieser Factoren bestimmt.

Diese Bemerkung hat selbstverständlich keinen Bezug auf den einen Factor I. Grades des geraden Problems.

Zweitens sei bemerkt, dass bei der Zweitheilung die arithmetische Gruppe von der Monodromiegruppe sich nicht unterscheidet, indem hier ε gleich der rationalen Zahl -1 ist.

§ 45.

Auflösung der Gleichung sechsten Grades durch hyperelliptische Functionen.

Es liegt die Frage nahe, ob nicht die ganze Betrachtung der §§ 43, 44 umgekehrt werden kann. Soeben wurde die Zweitheilung auf die Auflösung von $f_6 = 0$ zurückgeführt; kann man nicht auch die Auflösung einer beliebig vorgelegten Gleichung $f_6 = 0$ auf die specielle Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen zurückführen, welche zu der Irrationalität $\sqrt{f_6}$ gehören?

Dass dies in der That möglich sein muss, darauf hat Herr C. Jordan*) kurz hingewiesen; später hat Herr Lindemann**) die Frage wieder aufgenommen und ihr eine charkteristische Wendung gegeben.

Es sei f_6 gegeben; dann ist zunächst erforderlich, die Integrale w_1, w_2 zu bilden und ein System von Perioden zu berechnen, welche dieselben an einem canonischen Schnittsystem haben können. Die gewöhnliche Darstellung definirt diese Perioden, indem die Querschnitte auf geradlinige Strecken zusammengezogen werden, durch Integrale zwischen den Verzweigungspunkten. Für den hier verfolgten Zweck ist diese Methode natürlich untauglich, da diese Punkte ja eben erst bestimmt werden sollen; man wird vielmehr davon ausgehen müssen, dass die Perioden als Functionen der Coefficienten gewissen linearen Differentialgleichungen genügen. Aus diesen Differentialgleichungen wird man Reihen abzuleiten suchen müssen, welche die Berechnung der Perioden aus den Coefficienten ohne vorherige Auflösung der Gleichung gestatten.

Für den *elliptischen* Fall sind in der That die Differentialgleichungen, welchen die Perioden als Functionen der rationalen absoluten Invariante genügen, von Herrn Bruns***) aufgestellt und durch *hypergeometrische Reihen* integrirt worden; für diese besitzt man bekanntlich die Mittel, um zu entscheiden, welche von den verschiedenen möglichen Darstellungen einer Function durch solche Reihen für einen bestimmten Werth der unabhängigen Veränderlichen convergiren, und welche particulären Integrale in jedem Fall zu nehmen sind.

Für hyperelliptische Integrale sind Ansätze zur Erledigung derselben Aufgabe nach doppelter Richtung vorhanden. Einerseits hat Herr Wiltheiss†) *partielle* Differentialgleichungen mitgetheilt, welchen

*) Traité des subst. p. 380.

**) Gött. Nachr. 1884, p. 245.

***) Ueber die Perioden der elliptischen Integrale I. und II. Gattung, Dorpater Festschrift 1875; wieder abgedruckt diese Ann. Bd. 27, p. 234.

†) Vgl. insbesondere diese Ann. Bd. 31, p. 141.

die Perioden als Functionen sämmtlicher Coefficienten genügen.*) Andererseits führt Herr Fuchs einen allgemeinen Ansatz zur Aufstellung einer *totalen* Differentialgleichung für die Perioden explicite durch für den Fall, dass ein Verzweigungswerth als unabhängige Veränderliche betrachtet wird.**) Es muss nun sowohl gelingen, aus den partiellen Differentialgleichungen des Herrn Wiltheiss durch Differentiationen und Eliminationen zu einer totalen Differentialgleichung zu gelangen, welcher die Perioden als Functionen *eines* Coefficienten bei Festhalten der andern genügen, als auch die Methode des Herrn Fuchs auf den Fall zu übertragen, dass nicht eine Wurzel, sondern ein Coefficient von f als unabhängige Variable betrachtet wird. Wird insbesondere der Coefficient a_6 von x_2^6 gewählt, so wird — darauf macht Herr Lindemann a. a. O. aufmerksam — die Discriminante Δ von f in Bezug auf a_6 nur vom 5. Grade. Die Gleichung $\Delta(a_6) = 0$ bestimmt die singulären Punkte der Differentialgleichung; die Lösung einer Gleichung 5. Grades aber kann als bekannt angesehen werden, wenn von der Auflösung der allgemeinen Gleichung 6. Grades die Rede ist.***) Sind die singulären Punkte gefunden, so sind die zugehörigen Fundamentalgleichungen aufzulösen, was keinerlei Irrationalität bedingt, da die Wurzeln dieser Gleichungen nach den Untersuchungen von Herrn Fuchs†) rationale Zahlen sind. Die Bestimmung der Integrationsconstanten endlich geschieht durch Grenzübergang zum elliptischen Fall.

Sind aber die Perioden erst gefunden, so lassen sich die Normalintegrale und Thetamoduln bilden und aus ihnen die Thetareihen aufbauen. Dann lassen sich die Linearfactoren der f_6 in der Form darstellen:††)

$$(150)\quad \varrho(p_1^{(i)}x_1 + p_2^{(i)}x_2) = \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial w_1}\right)x_1 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial w_2}\right)x_2, \quad i = 1, 2 \ldots 6$$

mit:

$$\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial w_1}\right) = \frac{1}{p_{12}}\left\{\quad \omega_{22}\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_1}\right) - \omega_{12}\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_2}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial w_2}\right) = \frac{1}{p_{12}}\left\{- \omega_{21}\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_1}\right) + \omega_{22}\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_2}\right)\right\}.$$

In diesen Formeln bedeuten ϑ_i die sechs ungeraden Thetafunctionen,

*) Auch Herr Milewski (de Abelianarum functionum periodis per aequ. diff. definiendis, diss. Berol. 1876) giebt solche Gleichungen, aber für die Normalform des Herrn Weierstrass, die eine Wurzel als bekannt voraussetzt.

**) Cr. J. Bd. 71, vgl. bes. § 10.

***) Die Auflösung der Gleichung 5. Grades führt Herr Lindemann ganz ebenso auf die einer Gleichung 4. Grades zurück.

†) a. a. O. § 13.

††) Vgl. Thomae, Cr. J. 71, p. 222. Klein, diese Ann. Bd. 27, p. 438. — Herr Lindemann benutzt statt dieser Formeln andere, welche die Doppelverhältnisse der Wurzeln geben.

die in Klammern gesetzten Differentialquotienten sind für die Nullwerthe der Argumente zu berechnen, und ϱ ist ein Factor, der für diese Frage ohne Belang ist.*)

Diese Auflösung ist so einfach, dass es unnöthig erscheint, neben ihr noch andere zu betrachten, bei denen die f_6 vorab auf eine Normalform transformirt wird.**)

VII. Abschnitt.

Transformation.

§ 46.

Algebraische Formulirung des Transformationsproblems.

Das Problem der Transformation der hyperelliptischen Functionen, wie es gewöhnlich gestellt wird, kann in folgender Weise formulirt werden:***)

Gegeben sei ein Paar von Stellen:

$$(x', \sqrt{f(x')}), \qquad (x'', \sqrt{f(x'')})$$

eines hyperelliptischen Gebildes $(x, \sqrt{f_6(x)})$ *und die zugehörigen Integralsummen:*

$$(151) \qquad \begin{aligned} w_1 &= \int_a^{x'} \frac{x_1(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^{x''} \frac{x_1(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}, \\ w_2 &= \int_a^{x'} \frac{x_2(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^{x''} \frac{x_2(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} \end{aligned}$$

verlangt wird, dieses Punktepaar rational abhängig zu machen von einem Punktepaare

$$(y', \sqrt{F(y')}), \qquad (y'', \sqrt{F(y'')})$$

eines andern hyperelliptischen Gebildes $(y, \sqrt{F_6(y)})$, *in der Weise, dass die Integralsummen* (151) *die Werthe erhalten:*

---

*) Für Gleichungen höherer Grade $f_{2p+2} = 0$ treten an Stelle der Formeln (150) andere, welche die Factoren des Grades $(p-1)$ von f geben und aus welchen die einzelnen Linearfactoren durch Aufsuchung grösster gemeinschaftlicher Theiler gewonnen werden können.

**) Solche Transformationen sind von den Herren Brioschi u. Maschke (Rendic. Ac. Linc. t. 4, p. 181; Acta math. t. 12, p. 83) angegeben worden.

***) Vgl. Hermite, C. R. t. 40, 1855. — Zu dem ganzen Abschnitt vgl. man die p. 204 citirte zusammenfassende Darstellung von Krause.

$$
(152) \qquad
\begin{aligned}
w_1 &= \int\limits_A^{y'} \frac{y_1(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}} + \int\limits_A^{y''} \frac{y_1(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}}, \\
w_2 &= \int\limits_A^{y'} \frac{y_2(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}} + \int\limits_A^{y''} \frac{y_2(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}}.
\end{aligned}
$$

Neben dieses „*directe*" Transformationsproblem tritt dann das „*inverse*", welches in Umkehrung der ersten Fragestellung *die Auflösung der erhaltenen Relationen nach den* $(y, \sqrt{F(y)})$ verlangt. *Wo im folgenden ohne nähere Bezeichnung von Transformation die Rede ist, soll stets dieses inverse Problem verstanden werden.*

Dabei entspricht also jedem Punktepaare (y', y'') des zweiten Gebildes ein und nur ein Punktepaar (x', x'') des ersten; aber jedem Punktepaare des ersten entspricht eine gewisse Anzahl m von Punktepaaren des zweiten.

Umgekehrt, wenn die Punktepaare zweier hyperelliptischen Gebilde in dieser Weise $(1, m)$-deutig auf einander bezogen sind, so werden die in (151) rechts stehenden Integralsummen, wenn man sie als Functionen der y betrachtet, alle diejenigen Eigenschaften besitzen, welche für die Summen von nach den y erstreckten Integralen I. Gattung charakteristisch sind. In Folge dessen werden sie solche Summen sein müssen: d. h. *aus der angenommenen Zuordnung der Punktepaare der beiden Gebilde folgen die Gleichungen:*

$$
(153) \qquad
\begin{aligned}
w_1' &= \alpha w_1 + \beta w_2 + c_1, \\
w_2' &= \gamma w_1 + \delta w_2 + c_2,
\end{aligned}
$$

in welchen die Integralsummen (151) mit w', die Integralsummen (152) mit w bezeichnet sind, die α, β, γ, δ, c_1, c_2 aber constante Grössen bedeuten. Durch Transformation des Coordinatensystems, auf welches das eine der beiden Gebilde bezogen ist, und durch Einführung anderer unterer Grenzen der Integrale des einen Gebildes (vermittelst des Additionstheorems) kann man erreichen, dass die Gleichungen (153) sich auf:

$$
(153\text{a}) \qquad w_1' = w_1, \quad w_2' = w_2
$$

reduciren, also auf die Form, in welcher wir das Transformationsproblem oben ausgesprochen hatten. Mit Vorbehalt solcher Abänderungen wird man also sagen können:

Das Transformationsproblem verlangt, zu einem hyperelliptischen Gebilde ein zweites so zu bestimmen, dass die Punktepaare beider Gebilde $(1, m)$-deutig auf einander bezogen werden können; es verlangt ferner, diese Beziehung wirklich herzustellen.

Den Punktepaaren des hyperelliptischen Gebildes entsprechen eindeutig die Punkte der doppelt überdeckten Kummer'schen Fläche; beachtet man, dass bei dem Ansatz (153), wenn x, y einander entsprechende Stellen der beiden Gebilde sind, auch die conjugirten Stellen $\bar{x}, \bar{y}$ einander entsprechen, so kann man von der Ueberdeckung absehen und das Transformationsproblem auch so formuliren: *es verlangt zu einer Kummer'schen Fläche eine zweite so zu bestimmen, dass beide punktweise* $(1, m)$*-deutig auf einander bezogen werden können; es verlangt ferner, diese Beziehung wirklich herzustellen.*

Soll diese Fragestellung nun eine präcise Form erhalten, so ist es erforderlich anzugeben, wie die Punkte*paare* in die Rechnung einzuführen sind. Wollte man nach den einzelnen Punkten fragen, so würde man eine Irrationalität einführen, die der Aufgabe an und für sich fremd ist; man wird vielmehr nach *symmetrischen Functionen* dieser Punkte fragen müssen. Den Principien des Abschnitts I wird es entsprechen, hier in erster Linie die *hyperelliptischen Functionen I. Stufe* heranzuziehen. Thut man das, so wird man die beiden Theile der oben formulirten Fragestellung in folgender Weise näher präcisiren können:

Zuerst wird man verlangen: *wenn die Coefficienten des einen Gebildes gegeben sind, die des andern so zu bestimmen, dass die Transformation überhaupt möglich wird.* Diese Aufgabe heisst das *specielle Transformationsproblem.*

Sodann wird man verlangen, *nachdem die Coefficienten demgemäss bestimmt sind, die Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten „eigentlichen“ hyperelliptischen Functionen anzugeben; das ist das allgemeine Transformationsproblem.*

Beide Probleme sind ihrer Definition gemäss algebraischer Natur.

§ 47.

Transcendente Formulirung.

Diese algebraische Aufgabe gestattet nun in folgender Weise eine transcendente Formulirung. Man nehme zunächst an, das Coordinatensystem und die unteren Grenzen seien so gewählt, dass

$$w_1' = w_1, \qquad w_2' = w_2$$

wird. Durchläuft dann einer der Punkte y einen Periodenweg, so müssen auch die x Periodenwege auf ihrer Fläche durchlaufen. Jede Periode w^y muss also zugleich eine Periode der w^x sein; d. h. es müssen (wenn die Perioden der w^y mit $\bar{\omega}_{ik}$, die der w^x mit ω_{ik} bezeichnet und wie schon häufig die ersten Indices der Perioden weggelassen werden) Relationen der Form bestehen:

$$(154)\qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_2 &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_3 &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_4 &= d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4. \end{aligned}$$

Darin bedeuten die a, b, c, d ganze Zahlen; dieselben müssen aber noch gewissen Bedingungen genügen, die daraus entspringen, dass die $\bar{\omega}$ ebenso wie die ω die Bilinearrelation (4) erfüllen müssen. Setzt man nämlich, analog wie Gleichung (5):

$$\bar{\omega}_{1i}\,\bar{\omega}_{2k} - \bar{\omega}_{1k}\,\bar{\omega}_{2i} = \bar{p}_{ik},$$

und benutzt die unter (15) eingeführten Abkürzungen, so erhält man aus den Gleichungen (154):

$$(155)\quad \bar{p}_{13} + \bar{p}_{24} = [12]p_{12} + [13]p_{13} + [14]p_{14} + [23]p_{23} + [24]p_{24} + [34]p_{34}.$$

Da nun zwischen den p_{ik} im allgemeinen Falle keine andern linearen Gleichungen bestehen als $p_{13} + p_{24} = 0$ (eben die Gleichung (4)), so folgt aus Gleichung (155), dass $\bar{p}_{13} + \bar{p}_{24}$ nur dann $= 0$ sein wird, wenn zwischen den Coefficienten der Gleichungen (154) die Relationen bestehen:*)

$$(156)\quad \begin{gathered} [12] = 0, \quad [14] = 0, \quad [23] = 0, \quad [34] = 0, \\ [13] = [24]. \end{gathered}$$

Man erhält also, wenn man statt der p ihre Quotienten, die τ und $t = \tau_{11}\tau_{12} - \tau_{12}^2$, einführt, den Satz:

Solange nicht zwischen den Thetamoduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, t$ *eines hyperelliptischen Gebildes, eine lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht — ein Fall, der hier und im folgenden ausgeschlossen wird — kann aus ihm durch eine Substitution der Form* (144) *ein anderes nur abgeleitet werden, wenn die Relationen* (156) *erfüllt sind.*

Wir fahren fort:

Der gemeinsame Werth von [13] *und* [24] *wird mit n bezeichnet und Grad der Transformation genannt; derselbe ist seiner Definition nach eine ganze Zahl und muss eine positive sein, wenn die neuen Perioden, wie wir annehmen können und wollen, den Ungleichungen* (11) *genügen.*

Die *Determinante der Substitution* (154) wird unter den gemachten Voraussetzungen gleich:

$$(157)\qquad n^2;$$

das hat folgende Bedeutung: Man pflegt wohl von einem „Periodenparallelepiped im vierdimensionalen Raum der w" zu sprechen; der angegebene Werth der Determinante sagt aus, dass das Parallelepiped der $\bar{\omega}$ den n^2-fachen Inhalt von dem der ω besitzt. Jedem Stellenpaar der x entspricht eine Stelle im Parallelepiped der ω, dieser n^2 Stellen in dem der $\bar{\omega}$, jeder der letzteren ein Stellenpaar der y; umgekehrt: jedem

*) Hermite a. a. O. § III.

Stellenpaar der y entspricht eine Stelle im Parallelepiped der ω, dieser *eine* Stelle in dem der $\bar{\omega}$ und damit ein Stellenpaar der x; daraus folgt:

Bei Transformation n^{ter} Ordnung entspricht jedem Punktepaar y', y'' ein Punktepaar x', x'', aber jedem Punktepaare y', y'' entsprechen n^2 Punktepaare $y'\, y''$.

Die in § 46 mit m bezeichnete Zahl ist also stets eine Quadratzahl n^2.

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf den Fall, dass n eine ungerade Primzahl ist.

§ 48.

Das specielle Transformationsproblem.

Zunächst soll nun das specielle Transformationsproblem Gegenstand weiterer Untersuchung sein. Dasselbe ist, wenn man wieder Functionen I. Stufe ins Auge fasst, in erster Linie dargestellt durch sieben Gleichungen, welche die sieben Coefficienten von F mit den sieben Coefficienten von f verbinden. In diesen Gleichungen werden noch die drei willkürlichen Hülfsgrössen auftreten, welche das Coordinatensystem der y bestimmen.

Aus diesem Gleichungssystem kann nun in verschiedener Weise eine Auswahl getroffen werden. Man kann einmal die rationalen absoluten *Invarianten* (Moduln) beider Formen in die Gleichungen einführen, indem man jene drei Hülfsgrössen eliminirt. Man wird dann ein System von drei, bezw. vier Gleichungen erhalten, das als *Modulargleichungssystem I. Stufe* zu bezeichnen sein wird. Dabei wird jedoch die Frage einer besonderen Untersuchung bedürfen, ob die gefundenen Gleichungen ausreichen, die zwischen den ursprünglichen und transformirten Invarianten bestehenden Beziehungen *rein* darzustellen, oder ob man dazu noch der Hinzunahme weiterer Gleichungen bedarf.

Zweitens aber kann man auch alle Coefficienten des neuen Gebildes bis auf einen eliminiren und nach der Gleichung fragen, welche diesen einen Coefficienten mit den sämmtlichen Coefficienten des ursprünglichen Gebildes verbindet. In gleicher Weise könnte man auch mit den ganzen Invarianten verfahren. Solche Gleichungen bezeichnen wir als *Multiplicatorgleichungen I. Stufe*. Der Grund dieser Benennung ist folgender: den Quotienten aus dem transformirten Werth einer ganzen Invariante durch den ursprünglichen bezeichnen wir als Multiplicator, indem wir einen in der Theorie der elliptischen Functionen üblichen Terminus in die der hyperelliptischen Functionen mit herübernehmen; deswegen nennen wir die Gleichung, welche eine transformirte Invariante*) mit den ursprünglichen Invarianten verbindet,

*) sei es eine „reine“ Invariante, sei es eine von Hülfspunkten abhängende, z. B. ein Coefficient von f.

Multiplicatorgleichung, weil aus ihr die Gleichung für den entsprechenden Multiplicator sofort abgelesen werden kann. —

Für die allgemeinen Entwickelungen, welche nun zunächst folgen sollen, scheint es am zweckmässigsten zu sein, an keine dieser speciellen Gleichungsformen anzuknüpfen, sondern das ursprüngliche Gleichungssystem selbst zu Grunde zu legen. Es soll also ein Lösungs*system* dieses Gleichungssystems kurz mit:

$$t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4)$$

bezeichnet werden; man kann dann, solange es sich nicht um explicite Aufstellung von Formeln handelt, geradezu von der Gleichung reden, welcher das t genügt, von ihrem Grade, ihrem Affect, überhaupt ihren gruppentheoretischen Eigenschaften; und es soll dies in den folgenden Paragraphen in der That geschehen.

§ 49.

Classenanzahl und Hermite'sche Repräsentanten.

Die nächste Frage, welcher wir uns zuwenden wollen, ist die nach dem *Grade der t-Gleichung*; derselbe kann, wie Herr Hermite*) angegeben hat, in folgender Weise bestimmt werden. Zunächst kann man unendlich viele verschiedene Systeme:

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$$

anschreiben, weil es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen geben wird, welche den Bedingungen (156) Genüge leisten. Aber nicht alle diese verschiedenen Periodensysteme werden auch verschiedene Werthe des t liefern, und man hat daher zunächst zu fragen, wann zwei Systeme transformirter Perioden dasselbe t liefern, wann also:

$$t(\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_2', \bar{\omega}_3', \bar{\omega}_4') = t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4) \tag{158}$$

ist. Das wird offenbar dann und nur dann der Fall sein, wenn die $\bar{\omega}'$ mit den $\bar{\omega}$ durch *lineare* (Abel'sche) Transformation zusammenhängen, wenn also ganzzahlige Relationen der Form bestehen:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1' &= \alpha_1 \bar{\omega}_1 + \alpha_2 \bar{\omega}_2 + \alpha_3 \bar{\omega}_3 + \alpha_4 \bar{\omega}_4\,, \\
\bar{\omega}_2' &= \beta_1 \bar{\omega}_1 + \beta_2 \bar{\omega}_2 + \beta_3 \bar{\omega}_3 + \beta_4 \bar{\omega}_4\,, \\
\bar{\omega}_3' &= \gamma_1 \bar{\omega}_1 + \gamma_2 \bar{\omega}_2 + \gamma_3 \bar{\omega}_3 + \gamma_4 \bar{\omega}_4\,, \\
\bar{\omega}_4' &= \delta_1 \bar{\omega}_1 + \delta_2 \bar{\omega}_2 + \delta_3 \bar{\omega}_3 + \delta_4 \bar{\omega}_4\,,
\end{aligned} \tag{159}$$

deren Coefficienten den Bedingungen (13) der linearen Periodentransformation genügen, sodass also:

*) a. a. O. § XV.

$$(160)\qquad \begin{gathered}[\alpha, \beta] = [\alpha, \delta] = [\beta, \gamma] = [\gamma, \delta] = 0,\\ [\alpha, \gamma] = [\beta, \delta] = 1\end{gathered}$$

ist. Wenn das der Fall ist, nennt man das System der $\bar{\omega}'$ zu dem der $\bar{\omega}$ *äquivalent* und rechnet beide zu derselben *Classe*. Wir brauchen nun aus jeder Classe nur ein Individuum herauszugreifen; ein solches nennt man dann einen *Repräsentanten* der Classe. In jeder Classe ist ein und nur ein Repräsentant vorhanden, welcher einem der in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Typen angehört. In dieselbe sind zugleich auch die Ausdrücke für die transformirten Normalintegrale und Thetamoduln aufgenommen.

I. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(161)\qquad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ k & l & 1 & 0 \\ l & m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perioden:

$$(162)\qquad \begin{gathered}\bar{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = n\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = k\omega_1 + l\omega_2 + \omega_3,\\ \bar{\omega}_4 = l\omega_1 + m\omega_2 + \omega_4;\end{gathered}$$

Periodendeterminanten:

$$(163\qquad \begin{gathered}\bar{p}_{12} = n^2 p_{12}, \quad \bar{p}_{13} = lnp_{12} + np_{13}, \quad \bar{p}_{14} = mnp_{12} + np_{14},\\ \bar{p}_{23} = knp_{21} + np_{23}, \quad \bar{p}_{24} = lnp_{21} + np_{24},\\ \bar{p}_{34} = (km - l^2)p_{12} + kp_{14} + l(p_{24} + p_{31}) + mp_{32} + p_{34};\end{gathered}$$

Normalintegrale:

$$(164)\qquad \bar{v}_1 = \frac{v_1}{n}, \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2}{n}.$$

Thetamoduln:

$$(165)\qquad \begin{gathered}\bar{\tau}_{11} = \frac{\tau_{11} + k}{n}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\tau_{12} + l}{n}, \quad \bar{\tau}_{22} = \frac{\tau_{22} + m}{n},\\ \bar{\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{t} + m\tau_{11} - 2l\tau_{12} + k\tau_{22} + km - l^2}{n^2}.\end{gathered}$$

II. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(166)\qquad \begin{pmatrix} 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & k & l & 1 \end{pmatrix};$$

Perioden:

$$(167)\quad \bar{\omega}_1 = \omega_1 - l\omega_2,\ \bar{\omega}_2 = n\omega_2,\ \bar{\omega}_3 = n\omega_3,\ \bar{\omega}_4 = k\omega_2 + l\omega_3 + \omega_4;$$

Periodendeterminanten:

$$(168)\quad \begin{aligned} &\bar{p}_{12} = np_{12},\ \bar{p}_{13} = np_{13} - lnp_{23},\\ &\bar{p}_{14} = kp_{12} + l(p_{13} - p_{24}) + p_{14} - l^2 p_{23},\\ &\bar{p}_{23} = n^2 p_{23},\ \bar{p}_{24} = lnp_{23} + np_{24},\ \bar{p}_{34} = knp_{32} + np_{34}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(169)\quad \bar{v}_1 = v_1,\ \bar{v}_2 = \frac{lv_1 + v_2}{n};$$

Thetamoduln:

$$(170)\quad \begin{aligned} &\bar{\tau}_{11} = n\tau_{11},\ \bar{\tau}_{12} = l\tau_{11} + \tau_{12},\ \bar{\tau}_{22} = \frac{l^2\tau_{11} + 2l\tau_{12} + \tau_{22} + k}{n},\\ &\bar{t} = t + k\tau_{11}. \end{aligned}$$

III. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(171)\quad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ k & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix};$$

Perioden:

$$(172)\quad \bar{\omega}_1 = n\omega_1,\ \bar{\omega}_2 = \omega_2,\ \bar{\omega}_3 = k\omega_1 + \omega_3,\ \bar{\omega}_4 = n\omega_4;$$

Periodendeterminanten:

$$(173)\quad \begin{aligned} &\bar{p}_{12} = np_{12},\quad \bar{p}_{13} = np_{13},\ \bar{p}_{14} = n^2 p_{14},\\ &\bar{p}_{23} = kp_{21} + p_{23},\ \bar{p}_{24} = np_{24},\ \bar{p}_{34} = knp_{14} + p_{34}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(174)\quad \bar{v}_1 = \frac{v_1}{n},\qquad \bar{v}_2 = v_2;$$

Thetamoduln:

$$(175)\quad \bar{\tau}_{11} = \frac{\tau_{11} + k}{n},\ \bar{\tau}_{12} = \tau_{12},\ \bar{\tau}_{22} = n\tau_{22},\ \bar{t} = t + k\tau_{22}.$$

IV. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(176)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & n & 0\\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix};$$

Perioden:

$$(177)\quad \bar{\omega}_1 = \omega_1,\ \bar{\omega}_2 = \omega_2,\ \bar{\omega}_3 - n\omega_3,\ \bar{\omega}_4 = n\omega_4.$$

Periodendeterminanten:

$$(178)\quad \begin{gathered} \bar{p}_{12} = p_{12},\quad \bar{p}_{13} = n p_{13},\quad \bar{p}_{14} = n p_{14},\quad \bar{p}_{23} = n p_{23},\quad \bar{p}_{24} = n p_{24}, \\ \bar{p}_{34} = n^2 p_{34}. \end{gathered}$$

Normalintegrale:

$$(179)\qquad \bar{v}_1 = v_1,\qquad \bar{v}_2 = v_2.$$

Thetamoduln:

$$(180)\qquad \bar{\tau}_{11} = n\tau_{11},\quad \bar{\tau}_{12} = n\tau_{12},\quad \bar{\tau}_{22} = n\tau_{22},\quad \bar{t} = n^2 t.$$

Herr Hermite stellt dann folgende Sätze auf, die später vielfach bewiesen worden sind:

I. *Eine Classe äquivalenter Systeme $\bar{\omega}$ enthält stets ein System von einem dieser vier Typen.*

II. *Zwei Systeme verschiedener Typen sind nie äquivalent, zwei Systeme desselben Typus nur dann und stets dann, wenn die Zahlen k, l, m in ihnen bezw. dieselben Werthe mod. n haben.*

Der Typus I liefert also n^3 verschiedene Classen, die Typen II, III, IV bezw. n^2, n, eine; daraus folgt:

Die Anzahl der Classen nicht äquivalenter Systeme und somit der Grad der Gleichung für t beträgt:

$$(181)\qquad n^3 + n^2 + n + 1.$$

§ 50.

Neue Repräsentanten.

Während die Repräsentanten des Herrn Hermite in Folge des Umstandes, dass bei ihnen die $\bar{\tau}$ ganze Functionen der τ werden, sich besonders zu Rechnungen, wie Reihenentwicklungen und dergleichen eignen, sind sie weniger geeignet zur Erledigung allgemeiner Fragen, da sie sich nicht leicht unter eine gemeinsame Form subsumiren lassen. Sie lassen sich aber sehr leicht durch andere ersetzen, welche alle in der Form:

$$(182)\quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= n(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4), \\ \bar{\omega}_2' &= n(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4), \\ \bar{\omega}_3' &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_4' &= \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2 + \delta_3\omega_3 + \delta_4\omega_4, \end{aligned}$$

enthalten sind, in welcher die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Bedingungen (160) der linearen Transformation genügen.

Die *Repräsentanten des I. Typus* haben bereits diese Form.

Die *Repräsentanten des II. Typus* können in dieselbe übergeführt werden, wenn man die 1. und 3. Zeile mit Zeichenwechsel der einen vertauscht, also etwa setzt:

(183) $\bar{\omega}_1' = -\bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_4' = \omega_4,$

sodass das Coefficientenschema wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & k & l & 1 \end{pmatrix}. \tag{184}$$

Dabei werden die Periodendeterminanten:

$$\begin{aligned} &\bar{p}_{12}' = -\bar{p}_{32} = -n^2 p_{32}, \quad \bar{p}_{13}' = \bar{p}_{13} = np_{13} - lnp_{23}, \\ &\bar{p}_{14}' = -\bar{p}_{34} = -knp_{32} - np_{34}, \\ &\bar{p}_{23}' = \bar{p}_{21} = -np_{12}, \quad \bar{p}_{24}' = \bar{p}_{24} = lnp_{23} + np_{24}, \\ &\bar{p}_{34}' = \bar{p}_{14} = kp_{12} + l(p_{13} + p_{42}) + p_{14} + l^2 p_{32}; \end{aligned} \tag{185}$$

die Normalintegrale:

$$v_1' = -\frac{\bar{v}_1}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{v_1}{n\tau_{11}}, \quad v_2' = \frac{-\bar{\tau}_{22}\bar{v}_1 + \bar{\tau}_{11}\bar{v}_2}{\bar{\tau}_{11}}\bar{v}_1 = \frac{-\tau_{12}v_1 + \tau_{11}v_2}{n\tau_{11}}, \tag{186}$$

die Thetamoduln:

$$\begin{aligned} &\bar{\tau}_{11}' = -\frac{1}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{1}{n\tau_{11}}, \quad \bar{\tau}_{12}' = -\frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{11}} = \frac{-l\tau_{11} - \tau_{12}}{n\tau_{11}}, \\ &\bar{\tau}_{22}' = \frac{\bar{\mathfrak{t}}}{\bar{\tau}_{11}} = \frac{\mathfrak{t} + k\tau_{11}}{n\tau_{11}}, \qquad \bar{\mathfrak{t}}' = -\frac{\bar{\tau}_{22}}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{l^2\tau_{11} + 2l\tau_{12} + \tau_{22} + k}{n^2\tau_{11}}. \end{aligned} \tag{187}$$

Ebenso wird für die *Repräsentanten des III. Typus* erhalten:

Umsetzung der Perioden:

(188) $\bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2' = -\bar{\omega}_4, \quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_2;$

neues Coefficientenschema:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{189}$$

Periodendeterminanten:

$$\begin{aligned} &\bar{p}_{12}' = -\bar{p}_{14} = -n^2 p_{14}, \quad \bar{p}_{13}' = \bar{p}_{13} = np_{13}, \quad \bar{p}_{14}' = \bar{p}_{12} = np_{12}, \\ &\bar{p}_{23}' = \bar{p}_{34} = knp_{14} + np_{34}, \quad \bar{p}_{24}' + \bar{p}_{24} = np_{24}, \\ &\bar{p}_{34}' = \bar{p}_{32} = kp_{12} + p_{32}; \end{aligned} \tag{190}$$

Normalintegrale:

$$(191)\quad \bar{v}_1' = \bar{v}_1 - \frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{22}}\bar{v}_2 = \frac{\tau_{22}v_1 - \tau_{12}v_2}{n\tau_{22}}, \quad \bar{v}_2' = -\frac{\bar{v}_2}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{v_2}{n\tau_{22}}.$$

Thetamoduln:

$$(192)\quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{11}' &= \frac{\bar{\mathfrak{t}}}{\bar{\tau}_{22}} = \frac{\mathfrak{t} + k\tau_{22}}{n\tau_{22}}, & \bar{\tau}_{12}' &= -\frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{\tau_{12}}{n\tau_{22}}, \\ \bar{\tau}_{22}' &= -\frac{1}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{1}{n\tau_{22}}, & \bar{\mathfrak{t}}' &= -\frac{\bar{\tau}_{11}}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{\tau_{11}+k}{n^2\tau_{22}}. \end{aligned}$$

Endlich für den *Repräsentanten des Typus IV* erhält man:
Umsetzung der Perioden:

$$(193)\quad \bar{\omega}_1' = -\bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_2' = -\bar{\omega}_4, \quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_2;$$

neues Coefficientenschema:

$$(194)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Periodendeterminanten:

$$(195)\quad \begin{aligned} \bar{p}_{12}' &= \bar{p}_{34} = n^2 p_{34}, & \bar{p}_{13}' &= \bar{p}_{13} = n p_{13}, & \bar{p}_{14}' &= \bar{p}_{23} = n p_{23}, \\ \bar{p}_{23}' &= \bar{p}_{14} = n p_{14}, & \bar{p}_{24}' &= \bar{p}_{24} = n p_{24}, & \bar{p}_{34}' &= \bar{p}_{12} = p_{12}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(196)\quad \begin{aligned} \bar{v}_1' &= \frac{-\bar{\tau}_{22}\bar{v}_1 + \bar{\tau}_{12}\bar{v}_2}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{-\tau_{22}v_1 + \tau_{12}v_2}{n\mathfrak{t}_1}, \\ \bar{v}_2' &= \frac{\bar{\tau}_{12}\bar{v}_1 - \bar{\tau}_{11}\bar{v}_2}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{\tau_{12}v_1 - \tau_{11}v_2}{n\mathfrak{t}}. \end{aligned}$$

Thetamoduln:

$$(197)\quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{11}' &= -\frac{\bar{\tau}_{22}}{\bar{\mathfrak{t}}} = -\frac{\tau_{22}}{n\mathfrak{t}}, & \bar{\tau}_{12}' &= \frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{\tau_{12}}{n\mathfrak{t}}, \\ \bar{\tau}_{22}' &= -\frac{\bar{\tau}_{11}}{\bar{\mathfrak{t}}} = -\frac{\tau_{11}}{n\mathfrak{t}}, & \mathfrak{t}' &= \frac{1}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{1}{n^2\mathfrak{t}}. \end{aligned}$$

§ 51.

Irreducibilitätsbeweis.

Mit Hülfe dieser neuen Repräsentanten lässt sich nun sehr leicht die *Irreducibilität der t-Gleichung im Rationalitätsbereich I. Stufe* darthun.

Die t hängen von den Coefficienten des ursprünglichen Gebildes ab vermöge einer Gleichung:

(198) $$G(t;\, a_0, a_1 \ldots a_6) = 0;$$

zu zeigen ist, dass jede Wurzel dieser Gleichung in jede andere übergeführt werden kann, indem man die a geeignete geschlossene Wege durchlaufen lässt. Zu diesem Zwecke berechne man aus den Coefficienten zunächst ein bestimmtes Periodensystem:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4;$$

dann wird eine Wurzel der t-Gleichung sein:

(199) $$t(n\omega_1, n\omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

entsprechend dem I. Repräsentanten des Typus I. Durchlaufen nun die Coefficienten beliebige geschlossene Wege in ihrem Gebiete, so werden die ω linear transformirt; und wenn $\alpha_1 \ldots \delta_4$ irgend welche Coefficienten sind, welche den Bedingungen (160) der linearen Transformation genügen, so kann man auf Grund der Entwickelungen des § 8 immer solche Wege der Verzweigungspunkte und damit auch der Coefficienten angeben, dass die ω in andere Perioden ω' übergehen, welche durch die Gleichungen:

(200) $$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4, \\ \omega_2' &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4, \\ \omega_3' &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4, \\ \omega_4' &= \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2 + \delta_3\omega_3 + \delta_4\omega_4 \end{aligned}$$

mit ihnen verbunden sind. Und zwar kann dies immer auf solche Weise geschehen, dass man dabei nur solche Werthe zu passiren braucht, welche den Bedingungen (11) genügen. Damit wird die Wurzel (199) übergeführt in:

(201) $$t(n\omega_1', n\omega_2', \omega_3', \omega_4'),$$

während die Coefficienten zu ihren Anfangswerthen zurückkehren. Zu den Werthen (201) aber, welche t auf diese Weise anzunehmen im Stande ist, gehören auch alle diejenigen, welche durch die neuen Repräsentanten gegeben sind; man kann demnach von dem Repräsentanten (199) aus zu allen übrigen durch Monodromie der Coefficienten gelangen, also auch von jedem dieser übrigen zu jedem andern. Andererseits folgt aus § 49 und 50, dass jedes System der $n\omega_1'$, $n\omega_2'$, ω_3', ω_4' welches man auf diese Weise erreichen kann, zu einem der Repräsentanten äquivalent ist, dass man also auf diese Weise zu keinem andern Werthe von t gelangt, als zu denjenigen, welche durch die Repräsentanten gegeben sind. Damit ist der folgende Satz gewonnen:

Die Bestimmung der Coefficienten (Moduln I. Stufe) des transformirten Gebildes hängt ab von der Lösung einer Gleichung des Grades

$$n^3 + n^2 + n + 1,$$

deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche I. Stufe in Bezug auf das gegebene Gebilde angehören und welche in diesem Rationalitätsbereiche irreducibel ist.

§ 52.

Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems und beginnen mit der Beantwortung der Frage, bei welchen linearen Transformationen ein einzelner Repräsentant ungeändert bleibt, etwa der folgende:

$$(202) \qquad \bar{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = n\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3, \quad \bar{\omega}_4 = \omega_4.$$

Werden die ω einer linearen Transformation unterworfen, etwa der folgenden:

$$(203) \qquad \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4, \\ \omega_2' &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4, \\ \omega_3' &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4, \\ \omega_4' &= \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2 + \delta_3\omega_3 + \delta_4\omega_4, \end{aligned}$$

so treten an Stelle der $\bar{\omega}$ neue transformirte Perioden $\bar{\omega}'$, welche lauten:

$$(204) \qquad \bar{\omega}_1' = n\omega_1', \quad \bar{\omega}_2' = n\omega_2', \quad \bar{\omega}_3' = \omega_3', \quad \bar{\omega}_4' = \omega_4'.$$

Zwischen diesen und den ersten transformirten Perioden (202) bestehen dann die Beziehungen:

$$(205) \qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= \alpha_1\bar{\omega}_1 + \alpha_2\bar{\omega}_2 + n\alpha_3\bar{\omega}_3 + n\alpha_4\bar{\omega}_4, \\ \bar{\omega}_2' &= \beta_1\bar{\omega}_1 + \beta_2\bar{\omega}_2 + n\beta_3\bar{\omega}_3 + n\beta_4\bar{\omega}_4, \\ \bar{\omega}_3' &= \frac{\gamma_1}{n}\bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_2}{n}\bar{\omega}_2 + \beta_3\bar{\omega}_3 + \beta_4\bar{\omega}_4, \\ \bar{\omega}_4' &= \frac{\gamma_1}{n}\bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_2}{n}\bar{\omega}_2 + \gamma_3\bar{\omega}_3 + \gamma_4\bar{\omega}_4. \end{aligned}$$

Nach der Definition werden die $\bar{\omega}'$ dann zu den $\bar{\omega}$ äquivalent sein, wenn diese Gleichungen eine lineare Periodentransformation darstellen. Dazu ist offenbar erforderlich und hinreichend, dass die Congruenzen erfüllt sind:

$$(206) \qquad \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \delta_1 \equiv \delta_2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Das sind aber (mit veränderter Bezeichnung) gerade die Bedingungen, durch welche § 39, Nr. 127 die dort als *Untergruppe II. Art* bezeichnete Untergruppe der Monodromiegruppe des speciellen n-Theilungsproblems charakterisirt war. Damit ist also nachträglich bewiesen, was a. a. O. bereits erwähnt wurde, nämlich:

Die Gleichung des speciellen Transformationsproblems ist gerade diejenige Resolvente des speciellen Theilungsproblems für dieselbe Zahl n, welche zur Untergruppe II. Art gehört.

Die Untergruppe, bei welcher irgend ein anderer Repräsentant ungeändert bleibt, geht dann aus der durch (206) charakterisirten Untergruppe durch Transformation vermittelst einer geeigneten linearen Substitution hervor. Soll z. B. die Untergruppe bestimmt werden, bei welcher ein bestimmter durch die Zahlen k, l, m charakterisirter Repräsentant des I. Typus ungeändert bleibt, so hat man die Substitution (203) zu transformiren vermöge der Operation:

$$(207)\quad \Omega_1'=\omega_1',\ \Omega_2'=\omega_2',\ \Omega_3'=k\omega_1'+l\omega_2'+\omega_3',\ \Omega_4'=l\omega_1'+m\omega_2'+\omega_4',$$

deren inverse ist:

$$(208)\quad \omega_1=\Omega_1,\ \omega_2=\Omega_2,\ \omega_3=-k\Omega_1-l\Omega_2+\Omega_3,\ \omega_4=-l\Omega_1-m\Omega_2+\Omega_4.$$

Dabei wird erhalten:

$$(209)\quad \begin{aligned}
\Omega_1'&=(\alpha_1-k\alpha_3-l\alpha_4)\Omega_1+(\alpha_2-l\alpha_3-m\alpha_4)\Omega_2+\alpha_3\Omega_3+\alpha_4\Omega_4,\\
\Omega_2'&=(\beta_1-k\beta_3-l\beta_4)\Omega_1+(\beta_2-l\beta_3-m\beta_4)\Omega_2+\beta_3\Omega_3+\beta_4\Omega_4,\\
\Omega_3'&=\{\gamma_1+k\alpha_1+l\beta_1-k(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)-l(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\}\Omega_1\\
&\quad+\{\gamma_2+k\alpha_2+l\beta_2-l(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)-m(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\}\Omega_2\\
&\quad+(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)\Omega_3+(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\Omega_4,\\
\Omega_4'&=\{\delta_1+l\alpha_1+m\beta_1-k(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)-l(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\}\Omega_1\\
&\quad+\{\delta_2+l\alpha_2+m\beta_2-l(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)-m(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\}\Omega_2\\
&\quad+(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)\Omega_3+(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\Omega_4.
\end{aligned}$$

Die Bedingungen, unter welchen der genannte Repräsentant an seinem Platze bleibt, sind demnach:

$$(210)\quad \left.\begin{aligned}
&\gamma_1+k(\alpha_1-\gamma_3)+l(\beta_1-\gamma_4)-k^2\alpha_3-kl(\beta_3+\alpha_4)-l^2\beta_4\equiv 0,\\
&\gamma_2+k\alpha_2+l(\beta_2-\gamma_3)-m\gamma_4-kl\alpha_3-l^2\beta_3-km\alpha_4-lm\beta_4\equiv 0,\\
&\delta_1-k\delta_3+l(\alpha_1-\delta_4)+m\beta_1-kl\alpha_3-l^2\alpha_4-km\beta_3-lm\beta_4\equiv 0,\\
&\delta_2+l(\alpha_2-\delta_3)+m(\beta_2-\delta_4)-l^2\alpha_3-lm(\beta_3+\alpha_4)-m^2\beta_4\equiv 0.
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}.\,n).$$

In gleicher Weise würden sich die Bedingungen für die Repräsentanten der drei übrigen Typen aufstellen lassen. Aber wichtiger als diese Frage ist die andere, zu deren Beantwortung wir uns nun wenden wollen: *unter welchen Bedingungen bleiben denn alle Repräsentanten an ihren Plätzen?* — eine Frage, die eben identisch ist mit der Frage nach der Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems selbst.

Man sieht zunächst, dass *alle* Repräsentanten des I. Typus an ihren Plätzen bleiben, wenn die Congruenzen (210) unabhängig von den Werthen der k, l, m erfüllt sind. Das ist aber, wie man sich sofort überzeugt, dann und nur dann der Fall, wenn die Transformation (203) mod. n zur Identität oder zu gleichzeitigem Zeichenwechsel aller vier Perioden congruent ist. In beiden Fällen bleiben aber auch die Repräsentanten der drei andern Typen an ihren Plätzen, und man findet also:

Sämmtliche Wurzeln der t-Gleichung bleiben bei denjenigen und nur bei denjenigen linearen Periodentransformationen ungeändert, welche nach dem Modul n zur Identität oder zu gleichzeitigem Zeichenwechsel aller vier Perioden congruent sind.

Ganz ebenso verhält sich (vgl. § 39) die Gesammtheit der Wurzeln des *speciellen Theilungsproblems der geraden Functionen.* Die Monodromiegruppe des letzteren ist durch die Congruenzen (123) definirt; dieselbe Monodromiegruppe kommt sonach auch der t-Gleichung zu, und der oben ausgesprochene Satz kann erweitert werden zu der Fassung:

Specielles Theilungsproblem der geraden Functionen und Transformationsproblem für dieselbe Zahl n sind gegenseitig Resolventen von einander im Sinne der Monodromiegruppe.

Ob derselbe Satz auch für die *arithmetische* Gruppe gilt, darüber scheint nichts bekannt zu sein; doch dürfte die Sache ähnlich liegen, wie bei den elliptischen Functionen, worüber man z. B. C. Jordan, tr. des subst. p. 343 vergleiche.

§ 53.

Das allgemeine Transformationsproblem.

Ueber das allgemeine Transformationsproblem möge nur folgendes bemerkt werden:

Es sei ein Lösungssystem des speciellen Problems adjungirt, etwa dasjenige, welches zu dem Repräsentanten (202) gehört. Ist dann $\bar{f}(w)$ irgend ein Werth einer transformirten hyperelliptischen Function I. Stufe, so werden die n^2 Werthe derselben (vgl. § 47 a. E.) die folgenden sein:

$$
\begin{array}{lllll}
\bar{f}(w), & \bar{f}(w+\omega_1), & \bar{f}(w+2\omega_1) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1\big), \\
\bar{f}(w+\omega_2), & \bar{f}(w+\omega_1+\omega_2), & \bar{f}(w+2\omega_1+\omega_2) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+\omega_2\big), \\
\bar{f}(w+2\omega_2), & \bar{f}(w+\omega_1+2\omega_2), & \bar{f}(w+2\omega_1+2\omega_2) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+2\omega_2\big) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\bar{f}\big(w+(n-1)\omega_2\big), & \bar{f}\big(w+\omega_1+(n-1)\omega_2\big), & \bar{f}\big(w+2\omega_1+(n-1)\omega_2\big)\cdots & \\
& & & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+(n-1)\omega_2\big).
\end{array}
\tag{11}
$$

Wird allgemein:

$$\bar{f}(w+\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2)=\bar{f}_{\nu_1,\nu_2} \tag{212}$$

gesetzt, so ergiebt sich, dass $\bar{f}_{\nu_1,\nu_2}$ bei Vermehrung der w um die Periode $A\omega_1+B\omega_2$ in $\bar{f}_{\nu_1+A,\nu_2+B}$ übergeht. *Die Monodromiegruppe des Problems in Bezug auf die y kann also dargestellt werden durch die Congruenzen:*

$$\begin{aligned}\nu_1' &\equiv \nu_1 + A_1,\\ \nu_2' &\equiv \nu_2 + A_3.\end{aligned} \tag{213}$$

Wie in § 38 folgt hieraus:

Nach Adjunction einer Wurzel des speciellen Transformationsproblems findet das allgemeine seinen Ausdruck in einer zweifaltigen Abel'schen Gleichung und ist daher algebraisch, nämlich durch zwei nebeneinanderstehende n^{te} Wurzeln lösbar.

Auch hier ist von numerischen Irrationalitäten abgesehen.

§ 54.

Transformation von Functionen höherer Stufe.

Bereits in § 30 ist bemerkt, dass die Transformation n^{ter} Ordnung von Functionen m^{ter} Stufe zu Functionen mn^{ter} Stufe führt, wenn m und n theilerfremd sind; es mögen nur über die Transformation von Modulfunctionen höherer Stufe noch einige Worte hier Platz finden. Auch bei dieser Untersuchung kann man, wie es § 48 ff. für die Functionen I. Stufe geschehen ist, von den verschiedenen Möglichkeiten, die Unbekannte zu wählen, absehen, und alle diese Möglichkeiten unter dem Zeichen:

$$t_m(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \bar{\omega}_3,\ \bar{\omega}_4)$$

zusammenfassen.

Es sei nun *erstens* der Rationalitätsbereich, welchen man zu Grunde legt, der der *Principaluntergruppe m^{ter} Stufe.* Dann wird es:

$$M=(m^4-1)\,m^3(m^2-1)\,m \tag{214}$$

(vgl. 49) verschiedene Werthe von $t(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ (der ursprünglichen Form) geben; jeder derselben wird eine Anzahl von transformirten Werthen zugehören. Wir erhalten also im ganzen:

$$M\cdot(n^3+n^2+n+1)$$

transformirte Werthe t_m; und wie in § 51 kann geschlossen werden, dass diese alle einer im Rationalitätsbereich *erster* Stufe irreducibeln Gleichung genügen. Im Rationalitätsbereich m^{ter} Stufe dagegen wird diese Gleichung zerfallen, und wir wollen zusehen, in welcher Weise man die Werthe von t_m zu Gruppen zusammenzufassen hat, welche Wurzeln irreducibler Gleichungen in diesem Rationatitätsbereiche vorstellen. Zu diesem Zwecke gehen wir etwa aus von:

(215) $$t_m(n\omega_1, n\omega_2, \omega_3, \omega_4)$$
und wenden wieder die Methode des § 51 an; dabei sind aber jetzt nur solche lineare Transformationen (200) der ursprünglichen Perioden zuzulassen, welche (mod. m) zur Identität congruent sind. In Folge dessen gelangt man von dem Werth (215) nur zu solchen Werthen
$$t_m(n\omega_1', n\omega_2', \omega_3', \omega_4'),$$
in welchen die ω' mit den ω durch eine Substitution der Principaluntergruppe m^{ter} Stufe verbunden sind. Auf diesem Wege gewinnt man die Regel:

Für die Untersuchung der Transformation von Functionen m^{ter} Stufe sind die Repräsentanten (182) *so zu wählen, dass die Coefficientensysteme $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nach dem Modul m alle einander (am Einfachsten also alle zur Identität) congruent werden. Die $n^3 + n^2 + n + 1$ verschiedenen Werthe einer transformirten Form t, welche zu den so normirten Repräsentanten gehören, genügen dann einer und derselben im Rationalitätsbereich m^{ter} Stufe irreducibeln Gleichung.*

Den M verschiedenen Werthen der ursprünglichen Form entsprechend wird man im ganzen M solche Gleichungen erhalten.

Wird aber zweitens eine Untergruppe m^{ter} Stufe zu Grunde gelegt, welche neben den der Identität (mod. m) congruenten Operationen noch andere enthält, welche bezw. den Operationen $S, S', S'' \ldots$ congruent sind, so werden auch die Repräsentanten nur so modificirt werden müssen, dass das Coefficientensystem eines jeden zu dem irgend einer dieser Operationen $1, S', S'' \ldots$ congruent wird.

Ein bemerkenswerther Umstand tritt ein, wenn man nicht eine transformirte Modulform selbst zur Unbekannten der aufzustellenden Gleichung wählt, sondern eine — etwa multiplicative — Verbindung einer solchen mit einer nicht transformirten Form derselben Art. Es kann dann nämlich Substitutionen (mod. m) geben, welche die ursprüngliche Function einerseits, die transformirte andererseits in solcher Weise afficiren, dass jene Verbindung ungeändert bleibt. Dann wird die Modification der Repräsentanten (mod. m) weniger weit getrieben zu werden brauchen; ja es kann sogar vorkommen, dass es ausreicht sie (mod. δ) zu modificiren, unter δ einen Theiler von m verstanden. So gelangt man zu dem Satze:

Bestimmte Verbindungen ursprünglicher und transformirter Moduln m^{ter} Stufe genügen Gleichungen vom Grade $n^3 + n^2 + n + 1$ schon im Rationalitätsbereiche der δ^{ten} Stufe, wenn δ einen Theiler von m bedeutet.

Ein Rückblick auf die vier letzten Abschnitte zeigt, dass die in den ersten entwickelten allgemeinen Principien geeignet sind, die

Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften der Theilungs- und Transformationsprobleme einfacher und durchsichtiger zu gestalten, als dies einer ausschliesslich mit den Mitteln formaler Rechnung operirenden Behandlungsweise möglich sein würde. Man darf aber auch erwarten, dass dieselben Principien sich in gleicher Weise fördernd erweisen werden, wenn es sich um Durchführung bestimmter Einzelprobleme bis zur numerischen Rechnung hin handelt.

Göttingen, den 26. Juni 1889.

Uebersicht des Inhalts.

Seite
Einleitung: Vorbegriffe aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale . . 199
I. Abschnitt: Hyperelliptische Functionen und Formen; Gruppe 217
II. Abschnitt: Untergruppen und Stufen 224
III. Abschnitt: Specielle Discussion der ersten und der zweiten Stufe . . . 230
IV. Abschnitt: Einleitung in Theilung und Transformation 248
V. Abschnitt: Theilung durch eine ungerade Primzahl 252
VI. Abschnitt: Zweitheilung 272
VII. Abschnitt: Transformation 279