Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Im Folgenden wird ein Integral $\int f(u)\,du$ betrachtet, dessen Integrationscurve aus einem Doppelumlauf um zwei Verzweigungspunkte p und q der zu integrirenden Function $f(u)$ besteht. Die Punkte p und q werden abwechselnd umkreist, und zwar ein jeder zuerst im positiven, dann im negativen Sinne. Man setzt voraus, dass wenn die Variable u einen positiven Umlauf um den Punkt p, bezw. um den Punkt q ausführt, die Function $f(u)$ den Factor $e^{2\pi i\sigma}$, bezw. den Factor $e^{2\pi i\tau}$ aufnimmt, im Uebrigen aber unverändert bleibt. Von den Constanten σ und τ soll keine ganzzahlig oder gleich Null sein. Die Function $f(u)$ kann hiernach als ein Product

(1) $$f(u) = (u-p)^{\sigma-1}\,(u-q)^{\tau-1}\,\varphi(u)$$

geschrieben werden, in welchem $\varphi(u)$ eine in der Umgebung der Punkte $u = p$ und $u = q$ eindeutige Function von u bezeichnet.

Ein aus einem geschlossenen Curvenzug bestehender Integrationsweg irgend eines Integrals lässt sich bekanntlich, falls der Endwerth der zu integrirenden (mehrdeutigen) Function mit ihrem Anfangswerthe identisch ist, auf die Verbindungslinien der eingeschlossenen singulären Punkte und auf kleine, die letzteren umgebenden Kreise zusammenziehen. Eine solche Vereinfachung der Integrationscurve gilt auch für das hier behandelte Integral. Denn da die Variable u um jeden der Punkte p, q einen positiven und einen negativen Umlauf macht, so ist der schliessliche Werth der Function $f(u)$ gleich dem ursprünglichen Werthe derselben. Als untere Integralgrenze (Ausgangspunkt und gleichzeitig Endpunkt des Integrationsweges) kann ein beliebiger Punkt, der nicht singulär für $f(u)$ ist, genommen werden; die Wahl desselben hat auf den Werth des Integrals keinen Einfluss.

Das betrachtete Integral, welches niemals illusorisch wird, ist, falls $\int_p^q f(u)\,du$ einen bestimmten Sinn hat, mit dem Producte

$$(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

identisch. Genügt also das Integral $\int_p^q f(u)\,du$, wenn es convergent ist, einer linearen homogenen Differentialgleichung, in welcher σ und τ als Constante vorkommen (während eine der Grössen p, q, resp. ein in $\varphi(u)$ enthaltener Parameter die unabhängige Variable der Differentialgleichung darstellt), so liefert das hier definirte Integral mit Doppelumlauf einen Ersatz für das particuläre Integral $\int_p^q f(u)\,du$ in denjenigen Fällen, wo das letztere, wegen der Art der in $u=p$ oder $u=q$ eintretenden Unstetigkeit von $f(u)$, keinen bestimmten Sinn mehr behält. Es wird hierdurch möglich, eine Unvollkommenheit zu beseitigen, welche fast allen derartigen Auflösungen linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale bisher anzuhaften pflegte*). Denn die Beschränkungen, denen die in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten unterworfen werden müssen, um die Convergenz der Integrale von der Form $\int_p^q f(u)\,du$ zu sichern, fallen fort, wenn statt dieser die entsprechenden Integrale mit Doppelumlauf eingeführt werden.

In der Gleichung (1) werden p und q als endliche Werthe vorausgesetzt. Jedoch lässt sich die Betrachtung nach bekannter Methode durch Benutzung einer linearen Substitution auf den Fall eines unendlichen singulären Werthes ausdehnen. Im nachstehenden § 2 definirt man $F(u)$ als das Product

$$(2)\qquad F(u)=(u-p)^{\sigma-1}\varphi(u),$$

wo unter $\varphi(u)$ eine bei $u=p$ eindeutige Function verstanden wird. Die Anzahl der singulären Punkte von $F(u)$ (abgesehen vom unendlichen Horizonte) wird als eine endliche und bestimmte vorausgesetzt; bei einem Umlauf der Variable u um sämmtliche im Endlichen liegende singuläre Punkte möge $F(u)$ nur einen constanten Factor aufnehmen. Indem man, von irgend einem Punkte der u-Ebene aus, einerseits eine geschlossene Curve um den Punkt p, andererseits eine geschlossene Curve um alle endlichen singulären Punkte der Function $F(u)$ (oder auch, was dasselbe leistet, um *alle endlichen singulären Punkte ausser* p) construirt, zeigt man, dass das Integral $\int F(u)\,du$, in welchem die Variable u abwechselnd die beiden Curven, einmal in positiver

*) Man vergleiche die Bemerkung Riemann's am Schluss des § 7 seiner Abhandlung „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen", Ges. Werke, pag. 77.

und einmal in negativer Drehungsrichtung, durchläuft, analoge Eigenschaften wie das in § 1 behandelte Integral $\overline{\int} f(u)\, du$ besitzt. Dasselbe bildet bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale einen Ersatz für das Integral $\int_p^{\infty} F(u)\, du$, falls letzteres aufhört, einen bestimmten Sinn zu haben.

Im § 3 wird, um ein Beispiel für die Anwendung der erhaltenen Resultate zu geben, die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe behandelt. Die genannte Gleichung lässt sich allgemein durch bestimmte Integrale lösen, weil in den Fällen, wo die sonst üblichen bestimmten Integrale divergent werden, die hier definirten Integrale mit Doppelumlauf an ihre Stelle treten.

---

§ 1.

Ein Integral, dessen Integrationsweg aus einer geschlossenen Curve besteht, soll im Folgenden (gemäss einer bereits üblichen Bezeichnung) durch einen horizontalen Strich, welcher über dem Integralzeichen angebracht wird, von anderen Integralen unterschieden werden. Der Ausgangs- und Endpunkt der Integrationscurve wird als untere Integralgrenze angegeben. Ferner sollen an der Stelle, die sonst von der oberen Integralgrenze eingenommen wird, in Parenthese diejenigen singulären Punkte der zu integrirenden Function genannt werden, welche im Innern der Integrationscurve liegen; dieselben werden durch Kommata von einander getrennt. Man setzt hinter einen solchen singulären Punkt ein Minuszeichen, falls er von der Integrationscurve in negativer Drehungsrichtung umkreist wird, während man im Fall eines positiven Umlaufs nichts hinzufügt. Die singulären Punkte werden hierbei in der Reihenfolge angeführt, wie sie von der Variable des Integrals umkreist werden; ein mehrfach umkreister singulärer Punkt wird mehrfach angeführt.

Integrirt man also die in (1) angegebene mehrdeutige Function $f(u)$ längs einer geschlossenen, von einem Punkte c ausgehenden Curve, welche zunächst in positiver Drehungsrichtung den Punkt q und den Punkt p, hierauf in negativer Drehungsrichtung wiederum zuerst q, dann p umkreist, so entsteht ein Integral, das ω genannt werden soll, und das nach der soeben definirten Bezeichnung

$$(3) \qquad \omega = \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\, du$$

geschrieben wird.

Das Integral (3) bildet den Gegenstand der Untersuchungen dieses Paragraphen. Der Beweis, dass dasselbe die in der Einleitung erwähnten Eigenschaften besitzt, ergiebt sich aus der Betrachtung der Theilintegrale, in die es sich zerlegen lässt. Bei dem Integrale (3) wird vorausgesetzt, dass die für die positiven Umläufe um q und p gewählten Wege auch für die negativen Umläufe (in umgekehrter Richtung) zur Anwendung kommen.

In der u-Ebene werde um den Punkt $u = p$ als Mittelpunkt ein kleiner Kreis mit dem Radius k, um den Punkt $u = q$ ein solcher mit dem Radius l gelegt. Einen beliebigen Punkt $u = \mathfrak{p}$ des ersteren Kreises verbindet man mit irgend einem Punkte $u = \mathfrak{q}$ des zweiten durch eine Linie $\mathfrak{R}$, die sich selbst nicht schneidet und in keine der Kreisflächen eintritt. Weder auf $\mathfrak{R}$ noch auf den Kreisflächen, abgesehen von den Mittelpunkten, soll ein singulärer Punkt der Function $f(u)$ (d. h. ein Punkt, in welchem $f(u)$ sich verzweigt oder unendlich oder unbestimmt wird) liegen; im Uebrigen können sowohl die Curve $\mathfrak{R}$ als die Radien k, l willkürlich gewählt werden. Man nimmt nun einen beliebigen Punkt c der Curve $\mathfrak{R}$ zum Ausgangspunkt und Endpunkt von vier geschlossenen Integrationswegen, die man nach einander für das Integral der Function $f(u)$ anwendet, und die aus Abschnitten der Curve $\mathfrak{R}$ und je einem der obigen Kreise gebildet werden. Es seien $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ zwei Punkte des Kreises um p, welche so liegen, dass wenn der Kreis vom Punkte $\mathfrak{p}$ aus im positiven Sinne durchlaufen wird, man zu dem Punkte $\mathfrak{p}'$ vor dem Punkte $\mathfrak{p}''$ gelangt. Die entsprechende Lage mögen $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ als Punkte des zweiten Kreises haben, so dass durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ die positiven Umläufe

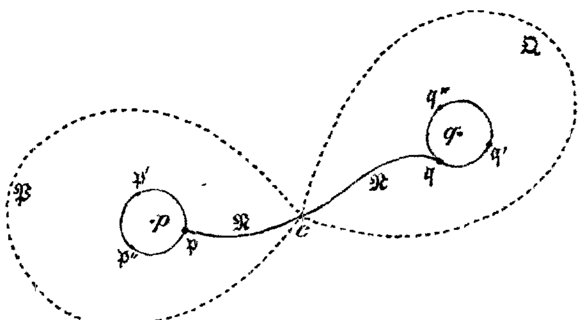

Fig. 1.

um p und q, durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}''\mathfrak{q}'\mathfrak{q}$ die negativen bezeichnet werden (Fig. 1).

Man nenne ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die vier Integrale der Function $f(u)$, deren respective Integrationswege durch

$$c\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}c, \quad c\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''c, \quad c\mathfrak{q}\mathfrak{q}''\mathfrak{q}'\mathfrak{q}c, \quad c\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{p}'\mathfrak{p}c$$

angegeben werden. Nach der oben erwähnten abgekürzten Bezeichnung hat man für ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Ausdrücke

$$(4)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \overline{\int_c^{(q)}} f(u)\,du, & \omega_2 = \overline{\int_c^{(p)}} f(u)\,du, \\ \omega_3 = \overline{\int_c^{(q-)}} f(u)\,du, & \omega_4 = \overline{\int_c^{(p-)}} f(u)\,du. \end{cases}$$

An der unteren Grenze des Integrals ω_1 wählt man als Anfangswerth der zu integrirenden Function irgend einen der zu $u = c$ gehörigen Werthe von $f(u)$. Dieser specielle Werth $f(c)$ möge f_0 heissen. Für $\nu > 1$ wird bestimmt, dass der Anfangswerth von $f(u)$ im Integral ω_ν mit dem Endwerth dieser Function in $\omega_{\nu-1}$ übereinstimme.

Es werde nun auch dasjenige Integral der Function $f(u)$ betrachtet, dessen Integrationscurve sich aus den Wegen der vier Integrale ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, in dieser Reihenfolge genommen, zusammensetzt. Dasselbe ist gleich dem in (3) angeführten Integral; man bezeichnet es, wie in (3), durch ω, nachdem man festgesetzt hat, dass an seiner unteren Grenze die Grösse f_0 als Anfangswerth von $f(u)$ zur Anwendung kommen soll. Es besteht dann die Gleichung

$$(5)\qquad \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4.$$

Bei ω ist der Werth von $f(u)$ auch im Endpunkte des Integrationsweges gleich f_0, da jeder der Punkte p, q im positiven und im negativen Sinne umkreist wird.

Es seien ferner P und Q die längs der Abschnitte $c\mathfrak{p}$ und $c\mathfrak{q}$ der Curve $\mathfrak{R}$ genommenen Integrale

$$(6)\qquad P = \int_c^{\mathfrak{p}} f(u)\,du, \qquad Q = \int_c^{\mathfrak{q}} f(u)\,du,$$

an deren unterer Grenze die Function $f(u)$ ebenfalls den Werth f_0 haben möge. Endlich bezeichnet man durch K das Integral von $f(u)$ längs der Kreislinie $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\mathfrak{p}$ und durch L das Integral von $f(u)$ längs der Kreislinie $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$. Als Anfangswerthe der Function $f(u)$ in K und in L sollen diejenigen Werthe $f(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{q})$ genommen werden, die aus f_0 entstehen, wenn u auf der Curve $\mathfrak{R}$ die Strecke $c\mathfrak{p}$, resp. $c\mathfrak{q}$ zurücklegt.

Da die Function $f(u)$ nach der Voraussetzung den Factor $e^{2\pi i\varkappa}$ aufnimmt, wenn u den Punkt q im positiven Sinne umkreist, so führt die Zerlegung des Integrationsweges von ω_1 in die Strecken $c\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}c$ zu der Gleichung

$$\omega_1 = (1 - e^{2\pi i\varkappa})\,Q + L.$$

In ω_2 ist der Anfangswerth der Function $f(u)$ gleich $e^{2\pi i\varkappa} f_0$, der

Endwerth derselben (nach (1)) gleich $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$. Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass als Anfangswerth von $f(u)$ in P der Werth f_0, in K der bei dem directen Uebergang von c nach $\mathfrak{p}$ aus f_0 entstehende Werth $f(\mathfrak{p})$ angenommen wird, erhält man für ω_2 den Ausdruck

$$\omega_2 = e^{2\pi i\tau}(1 - e^{2\pi i\sigma})\,P + e^{2\pi i\tau}\,K.$$

Es besteht ferner zwischen den Integralen ω_1 und ω_3 die Gleichung

$$\omega_3 = -\,e^{2\pi i\sigma}\,\omega_1,$$

und zwischen ω_2 und ω_4 die Gleichung

$$\omega_4 = -\,e^{-2\pi i\tau}\,\omega_2.$$

Die Function $f(u)$ hat in ω_3 den Anfangswerth $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$, den Endwerth $e^{2\pi i\sigma}f_0$. Man kehre den Integrationsweg des Integrals ω_3 um, indem man dasselbe gleichzeitig mit -1 multiplicirt; dann wird einerseits der Anfangswerth der Function $f(u)$ gleich $e^{2\pi i\sigma}f_0$, andererseits die Drehungsrichtung des Kreisintegrals die positive. Hieraus folgt, dass ω_3 gleich dem Product aus ω_1 und der Constante $-\,e^{2\pi i\sigma}$ ist. In ω_4 kommt $e^{2\pi i\sigma}f_0$ als Anfangswerth, f_0 als Endwerth von $f(u)$ vor. Durch Umkehrung des Integrationsweges findet man daher für ω_4 den Werth $-\,e^{-2\pi i\tau}\omega_2$. Die abgeleiteten Ausdrücke

$$\omega_1 + \omega_3 = [1 - e^{2\pi i\sigma}]\,[(1 - e^{2\pi i\tau})\,Q + L],$$
$$\omega_2 + \omega_4 = [e^{2\pi i\tau} - 1]\,[(1 - e^{2\pi i\sigma})\,P + K]$$

werden in die Gleichung (5) substituirt. Dann geht das Integral ω in die Summe

$$(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{2\pi i\tau}-1)\,(Q-P) + (e^{2\pi i\tau}-1)\,K - (e^{2\pi i\sigma}-1)\,L$$

über. Aber da sowohl in P als auch in Q die Function $f(u)$ an der unteren Grenze den Werth f_0 hat, so ist nach (6)

$$Q - P = \int_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} f(u)\,du.$$

Auf diese Weise erhält man für ω die Gleichung

$$(7)\qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{q},\mathfrak{p},\mathfrak{q}-,\mathfrak{p}-)} f(u)\,du = \begin{cases}(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{2\pi i\tau}-1)\displaystyle\int_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} f(u)\,du \\ +\,(e^{2\pi i\tau}-1)\,K - (e^{2\pi i\sigma}-1)\,L.\end{cases}$$

Dieselbe zeigt, dass der Werth des links stehenden Integrals sich nicht ändert, wenn statt des Punktes c (der auf der rechten Seite nicht mehr vorkommt) ein beliebiger anderer Punkt der Linie $\mathfrak{R}$ zum Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges gemacht wird.

Verbindet man ferner die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch irgend eine zweite Curve $\mathfrak{R}_1$, welche der Bedingung genügt, dass auf dem von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$

eingeschlossenen Flächenstücke kein singulärer Punkt der Function $f(u)$ liegt, so hat, nach einem bekannten Satze, das Integral $\int_p^q f(u)\,du$ bei Benutzung des Integrationsweges $\mathfrak{N}_1$ denselben Werth wie bei Benutzung des Integrationsweges $\mathfrak{N}$. Also bleibt die Ersetzung der Linie $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{N}_1$ ebenfalls ohne Einfluss auf den Werth von ω.

Es ergiebt sich hieraus, dass die untere Grenze des Integrals ω in jeden beliebigen Punkt, der nicht singulär für $f(u)$ ist, verlegt werden kann. Jedoch muss als Anfangswerth von $f(u)$ derjenige Werth genommen werden, der bei der stetigen Verschiebung der unteren Integralgrenze aus f_0 entsteht. Statt den Werth der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze zu geben, kann man selbstverständlich auch jeden anderen Punkt des Integrationsweges benutzen, um einen bestimmten Zweig der zu integrirenden Function (durch Wahl eines speciellen Werthes derselben) zu fixiren.

Lässt man die Variable u den Integrationsweg des Integrals ω rückwärts durchlaufen, so geht ω, da jedes einzelne Integralelement das Vorzeichen wechselt, in $-\omega$ über. Durch die Aenderung der Richtung für das Fortschreiten von u werden gleichzeitig die positiven Umläufe in negative und die negativen in positive verwandelt. Man findet auf diese Weise für $-\omega$ einen zu (5) analogen Ausdruck als Summe von vier Theilintegralen; jedoch stellt der erste Summandus (der aus ω_4 entsteht) jetzt einen positiven Umlauf um den Punkt p dar, und bei den drei folgenden Summanden wird bezw. q im positiven, p im negativen und q im negativen Sinne umkreist. Man erhält auf diese Weise die Formel

$$(8) \qquad \bar{\int_c}^{(p,q,p-,q-)} f(u)\,du = -\bar{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du\,.$$

Das Integral (3) nimmt also nur den Factor -1 auf, wenn die Punkte p und q bei der auf den Integrationsweg bezüglichen Angabe mit einander vertauscht werden.

Der Integrationsweg von ω ist im Vorhergehenden aus den Abschnitten der Linie $\mathfrak{N}$ und den Kreisen mit den Mittelpunkten p und q zusammengesetzt worden. Indessen hängt der Werth des Integrals ω von der Gestalt des Integrationsweges nur insofern ab, als dabei die Art der Umkreisung der singulären Punkte p und q und der Uebergang von der Umgebung des Punktes p zur Umgebung des Punktes q in Frage kommt, so dass man für diesen Weg auch andere Curvenformen anwenden kann. Es soll hier auf zwei verschiedene Modificationen des Integrationsweges von ω eingegangen werden. Man ziehe zunächst vom Punkte c aus zwei beliebige geschlossene, weder sich selbst noch einander schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ (Fig. 1), von denen die erstere keinen anderen singulären Punkt der Function $f(u)$ als den Punkt p, die letztere keinen anderen als den Punkt q umschliesst. Auf dem von $\mathfrak{P}$ begrenzten Flächenstück soll der Abschnitt $c\mathfrak{p}$ der Linie $\mathfrak{N}$, auf dem von $\mathfrak{Q}$ begrenzten der Abschnitt $c\mathfrak{q}$ liegen. Bezeichnet man zur Abkürzung durch $\mathfrak{P}^+$, resp. $\mathfrak{Q}^+$ den positiven Umlauf längs $\mathfrak{P}$, resp. $\mathfrak{Q}$, und durch $\mathfrak{P}^-$ und $\mathfrak{Q}^-$ die bezüglichen negativen Umläufe, so können offenbar die vier auf einander folgenden Strecken

$$\mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^-$$

als Integrationsweg von ω, an Stelle des oben angegebenen Weges, gewählt werden.

Zu einer noch etwas kürzeren Darstellung des Integrationsweges von ω gelangt man, wenn man die Randcurve eines zusammenhängenden Flächenstücks einführt, das die Punkte p und q enthält. Es sei $\mathfrak{T}$ eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve (Fig. 2), innerhalb derer die Punkte p und q (sammt der Linie $\mathfrak{N}$, Fig. 1), jedoch keine anderen singulären Punkte der Function $f(u)$ liegen. Das von $\mathfrak{T}$ begrenzte Flächenstück werde durch eine Linie cde derartig in zwei Theile getheilt, dass sich der Punkt p auf dem einen, der Punkt q auf dem anderen Flächentheil befindet. Von den zwei Endpunkten der Linie cde soll c derjenige sein, von welchem aus das im positiven Sinne längs $\mathfrak{T}$ genommene Wegdifferential zu dem den Punkt q enthaltenden Flächentheile führt. Dann lässt sich der zuvor definirte (im Punkte c beginnende) Integrationsweg des Integrals ω durch einen Weg ersetzen, der aus den vier Theilen

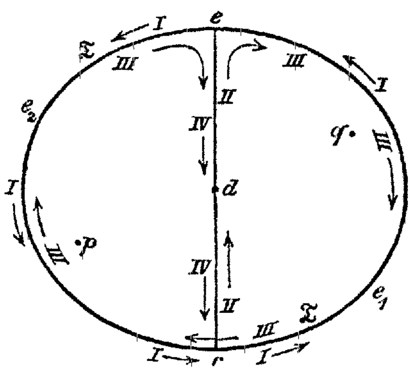

Fig. 2.

$$\mathfrak{T}^+,\ cde,\ \mathfrak{T}^-,\ edc$$

besteht, wo durch $\mathfrak{T}^+$ und durch $\mathfrak{T}^-$ der positive, resp. der negative Umlauf längs $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird. Nach Fig. 2 lautet dieser Integrationsweg

$$ce_1ee_2c,\quad cde,\quad ee_1ce_2e,\quad edc.$$

In der That enthält die Wegstrecke ce_1ee_2c, welche mit $ce_1edc+cdee_2c$ gleichbedeutend ist, den positiven Umlauf um q und den positiven Umlauf um p, und auf den übrigen Strecken $cdee_1ce_2cdc$ wird zuerst der Punkt q, dann der Punkt p im negativen Sinne umkreist.

Sind in (1) die reellen Bestandtheile der Constanten σ und τ positiv, und hat die Function $\varphi(u)$ sowohl für $u=p$ als für $u=q$ einen endlichen Werth, so darf man die Kreisradien k und l unendlich klein wählen, wodurch die Kreisintegrale K und L (in denen $u=p+ke^{\vartheta i}$, resp. $u=q+le^{\vartheta i}$ zu setzen ist) einen verschwindend kleinen Werth annehmen. In diesem Falle ist zugleich, nach bekannter Regel, das bestimmte Integral $\int_p^q f(u)\,du$ convergent. Folglich wird aus (7), woselbst die Integralgrenzen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch p, q ersetzt werden können, die Gleichung

$$(9)\qquad \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

erhalten, die bereits in der Einleitung erwähnt wurde. Als Integrationsweg des auf der rechten Seite von (9) stehenden Integrals muss die Linie $\mathfrak{R}$ (oder ein auf dieselbe reducirbarer Weg) genommen werden; der Zweig der Function $f(u)$ ist daselbst wieder durch die Bedingung, dass $f(c)$ gleich f_0 sein soll, bestimmt.

Da nach (1)

$$(u-p)\,f(u) = (u-p)^{\sigma}\,(u-q)^{\tau-1}\,\varphi(u),$$
$$(u-q)\,f(u) = (u-p)^{\sigma-1}(u-q)^{\tau}\,\varphi(u)$$

ist, so lässt sich die Voraussetzung, welche zu der Gleichung (9) führte, dahin formuliren, dass die 2 Gleichungen

$$(10)\qquad [(u-p)\,f(u)]_{u=p}=0,\quad [(u-q)\,f(u)]_{u=q}=0$$

zugleich befriedigt sein müssen.

Ist von den Bedingungsgleichungen (10) nur die eine erfüllt, z. B. nur die erste

$$[(u-p)\,f(u)]_{u=p}=0,$$

so kann man in Fig. 1 den Kreisradius k unendlich klein nehmen und gleichzeitig den Punkt c mit dem Punkte $\mathfrak{p}$ zusammenfallen lassen. Dann werden, da ausser dem Kreisintegral K auch das in (6) bezeichnete Integral P verschwindet, die Integrale ω_2 und ω_4 gleich Null, so dass auf der rechten Seite von (5) nur die Summanden ω_1 und ω_3 übrig bleiben. Der Integrationsweg des Integrals ω_1 beginnt und endigt, gemäss der obigen Voraussetzung, im Punkte $\mathfrak{p}$ oder, was hier dasselbe bedeutet, im Punkte p. Da ferner $\omega_3 = -e^{2\pi i\sigma}\,\omega_1$ ist, so erhält man in dem gedachten Falle die Gleichung

$$(11)\qquad \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (1-e^{2\pi i\sigma})\overline{\int_p}^{(q)} f(u)\,du\,.$$

Als Integrationsweg des rechts stehenden Integrals kann eine beliebige geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve gewählt werden, welche von p ausgeht und keinen anderen singulären Punkt von $f(u)$ als den Punkt q umschliesst. Ebenso findet man, wenn die 2te Bedingung (10) erfüllt ist, die Formel

$$\text{(11 a)}\qquad \overline{\int}_c^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\tau}-1)\overline{\int}_q^{(p)} f(u)\,du.$$

Die vorstehenden Rechnungen liefern auch den Werth des Integrals

$$\text{(12)}\qquad \omega' = \overline{\int}_c^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du,$$

dessen Integrationsweg die Punkte q, p zuerst im negativen, dann im positiven Sinne umkreist. Der Anfangswerth der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze $u = c$ soll in ω' derselbe wie in ω sein. Dann ist ω' identisch mit dem Product $e^{-2\pi i(\sigma+\tau)}\omega$. In dem oben definirten Integral ω_3 (Gl. (4)) war der Anfangswerth von $f(u)$ gleich $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$; an ω_3 wurde ω_4 stetig angeschlossen, ebenso hatte ω_1 an ω_4 stetigen Anschluss, ω_2 an ω_1. Nun ist für die aus den vier Integralen $\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2$ gebildete Summe, wenn sie in dieser Reihenfolge genommen werden, der Integrationsweg derselbe wie für das Integral ω'; die genannte Summe unterscheidet sich daher von ω' nur dadurch, dass in ihr der Anfangswerth $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$, in ω' aber der Anfangswerth f_0 für $f(u)$ zur Anwendung kommt. Auf diese Weise wird, mit Rücksicht auf (5), für ω' die Gleichung

$$\text{(13)}\qquad \overline{\int}_c^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = e^{-2\pi i(\sigma+\tau)}\int_c^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du,$$

in der $f(u)$ die Function (1) bezeichnet, abgeleitet. Sind die Bedingungen (10) erfüllt, so folgt aus (9) und (13) die Formel

$$\text{(14)}\qquad \overline{\int}_c^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = (e^{-2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\tau}-1)\int_p^{q} f(u)\,du.$$

Der für ω angewendete Integrationsweg möge ferner in der Art geändert werden, dass man die zwei Umkreisungen des Punktes q (die positive und die negative) mit einander vertauscht. Dann entsteht ein Integral

$$\text{(15)}\qquad \omega'' = \overline{\int}_c^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du,$$

für welches ähnliche Formeln wie für ω gelten. An der unteren Integralgrenze $u = c$ möge auch in ω'' der Werth f_0 für $f(u)$ genommen werden. Nennt man Λ das Kreisintegral, das aus L erhalten wird, wenn der Umlauf um den Punkt q nicht im positiven, sondern im negativen Sinne erfolgt, so modificirt sich die für ω angestellte

Rechnung, die zur Gleichung (7) führte, nur darin, dass die Grössen L und $e^{2\pi i\tau}$ durch Λ und $e^{-2\pi i\tau}$ zu ersetzen sind. Man hat demnach für ω'' die zu (7) analoge Gleichung

$$(16)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = \begin{cases}(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du \\ +(e^{-2\pi i\tau}-1)K-(e^{2\pi i\sigma}-1)\Lambda,\end{cases}$$

aus der, wenn die Bedingungen (10) befriedigt sind, die der Formel (9) entsprechende Gleichung

$$(17)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

gewonnen wird.

Die Umkehrung des Integrationsweges, welche bei gleichzeitiger Multiplication des Integrals durch den Factor -1 zulässig ist, bewirkt bei ω' (wie bei ω) nur eine Vertauschung der Punkte p und q in Bezug auf die Reihenfolge, in der sie von der Variable u umkreist werden. Aus ω'' wird, wenn u den in (15) angegebenen Weg in umgekehrter Richtung durchläuft, ein Integral erhalten, dessen Integrationsweg mit dem positiven Umlauf um p beginnt und mit dem positiven Umlauf um q schliesst. Es ist also

$$(18)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = -\bar{\int_c}^{(p-,q-,p,q)} f(u)\,du,$$

$$(19)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = -\bar{\int_c}^{(p,q-,p-,q)} f(u)\,du.$$

Die Integrale ω, ω', ω'' verschwinden, sobald einer der Punkte p, q aufhört, ein singulärer zu sein. Es sei z. B. $f(u)$ in der Umgebung des Punktes p eindeutig und stetig. Dann hat der Factor $e^{2\pi i\sigma}$, der zu $f(u)$ hinzutritt, wenn u den Punkt p umkreist, den Werth 1. Gleichzeitig verschwindet das Kreisintegral K. In Folge dessen werden in den Gleichungen (7) und (16) sämmtliche rechts stehende Summanden gleich Null. Das Analoge gilt, wenn $f(u)$ bei $u=q$ eindeutig und stetig bleibt.

Ist die Function $f(u)$ für $u=p$ unstetig, jedoch in der Umgebung des Punktes p eindeutig, und wird sie daselbst durch die Reihe

$$f(u)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu(u-p)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu'(u-p)^{-\nu}$$

dargestellt, so hat das Integral ω den Werth

$$(20)\quad \omega = 2\pi i A_1'(e^{2\pi i\tau}-1).$$

Denn da $e^{2\pi i \sigma} = 1$ ist, so ergiebt sich aus (7) die Gleichung

$$\omega = (e^{2\pi i\varepsilon} - 1) K,$$

und das Kreisintegral K nimmt, wenn die obige Reihe für $f(u)$ substituirt wird, den Werth $2\pi i A_1'$ an. Unter denselben Voraussetzungen in Bezug auf die Function $f(u)$ bestehen für ω' und ω'' die Gleichungen

$$(21) \qquad \omega' = 2\pi i A_1'(1 - e^{-2\pi i\varepsilon}), \quad \omega'' = 2\pi i A_1'(e^{-2\pi i\varepsilon} - 1),$$

von denen die erstere aus (13) und (20), die letztere aus (16) folgt.

§ 2.

Eine Function $F(u)$ habe die singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird; ausser denselben sei nur der Werth $u = \infty$ ein singulärer für die genannte Function. In der Umgebung des Punktes $u = p$ soll die (in der Einleitung erwähnte) Gleichung

$$(2) \qquad F(u) = (u - p)^{\sigma - 1}\varphi(u)$$

gelten, in welcher $\varphi(u)$ eine bei $u = p$ eindeutige Function von u, und σ eine Constante bezeichnet. Macht die Variable u einen positiven Umlauf um die sämmtlichen endlichen singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, so nimmt, wie vorausgesetzt wird, die Function $F(u)$ den constanten Factor $e^{2\pi i\varepsilon}$ auf, bleibt aber im Uebrigen unverändert.

Man ziehe um den Punkt p (als Mittelpunkt) mit dem Radius k einen Kreis $\mathfrak{K}$, der keinen anderen singulären Punkt der Function $F(u)$ als den Punkt p umschliesst. Ferner werde ein beliebiger Punkt γ der u-Ebene, der nicht zu den singulären Punkten von $F(u)$ gehört, zum Mittelpunkte eines zweiten Kreises $\mathfrak{L}$ genommen, dessen Radius l so gross ist, dass sowohl der Kreis $\mathfrak{K}$ als auch die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ auf der von $\mathfrak{L}$ begrenzten Kreisfläche liegen. Man wählt auf der Kreislinie $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$, auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{q}$ und verbindet diese Punkte durch eine sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{N}$, welche aus der Kreisfläche $\mathfrak{L}$ nicht heraustritt und keinen der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ enthält. Es sei endlich c irgend ein Punkt der Linie $\mathfrak{N}$; von den verschiedenen Werthen, welche die Function $F(u)$ in demselben annimmt, werde ein bestimmter, der F_0 heissen möge, fixirt.

Es soll nun ein Integral

$$\Omega = \int F(u)\, du$$

betrachtet werden, dessen Integrationsweg in dem Punkte c beginnt und endigt und sich aus den auf einander folgenden Theilen

$$c\mathfrak{q},\ \mathfrak{L}^+,\ \mathfrak{q}\mathfrak{p},\ \mathfrak{K}^+,\ \mathfrak{p}\mathfrak{q},\ \mathfrak{L}^-,\ \mathfrak{q}\mathfrak{p},\ \mathfrak{K}^-,\ \mathfrak{p}c$$

zusammensetzt. Als Anfangswerth für die zu integrirende Function $F(u)$ an der unteren Integralgrenze $u = c$ ist der genannte Werth F_0 anzuwenden; derselbe stellt zugleich den Werth von $F(u)$ im Endpunkte des Integrationsweges dar. Durch $\mathfrak{L}+$, $\mathfrak{K}+$, resp. $\mathfrak{L}-$, $\mathfrak{K}-$ wird der Umlauf längs der Kreise $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ in der positiven, resp. negativen Drehungsrichtung bezeichnet. Die Variable u des Integrals Ω umkreist also, vom Punkte c aus, zuerst sämmtliche singuläre Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, dann allein den Punkt p, beides im positiven Sinne, und führt hierauf die entsprechenden Umkreisungen auch im negativen Sinne aus.

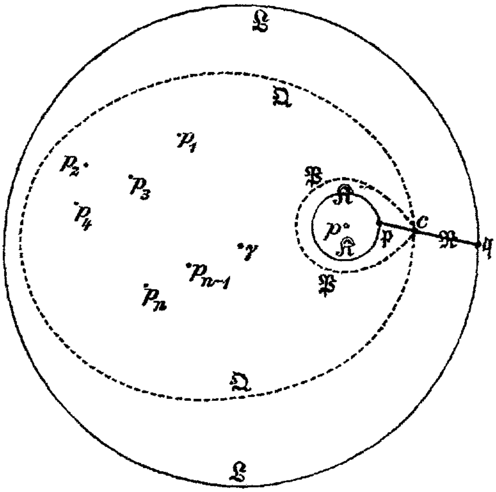

Fig. 3.

Wird die Gesammtheit der endlichen singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$ der Function $F(u)$ durch den Buchstaben $\mathfrak{S}$ zusammengefasst, so kann man, gemäss der im § 1 angegebenen abgekürzten Schreibweise, das obige Integral Ω durch den Ausdruck

$$\Omega = \int_c^{\overline{(\mathfrak{S}, p, \mathfrak{S}-, p-)}} F(u)\, du \tag{22}$$

darstellen.

Das Integral Ω geht durch eine einfache Substitution in ein Integral über, dessen Variable einen Doppelumlauf um zwei endliche singuläre Punkte macht. Man verbinde u mit einer neuen Variable v durch die Gleichung

$$u = \gamma + \frac{1}{v}, \qquad v = \frac{1}{u - \gamma}, \tag{23}$$

wo γ die Constante bedeutet, die den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{L}$ bildet, und nenne $p', p_1', \ldots, p_n'$ die Constanten

$$p' = \frac{1}{p - \gamma}, \; p_1' = \frac{1}{p_1 - \gamma}, \ldots, p_n' = \frac{1}{p_n - \gamma}. \tag{24}$$

Dann entsprechen den Werthen $u = p$, $u = p_1$, $\ldots$, $u = p_n$ die Werthe $v = p'$, $v = p_1'$, $\ldots$, $v = p_n'$, und dem Werthe $u = \infty$ der Werth $v = 0$. Die Function $F(u)$ möge durch die Substitution (23) in die Function $\psi(v)$ übergehen; diese hat die singulären Punkte $v = 0$, $v = p'$, $v = p_1'$, $\ldots$, $v = p_n'$, während $v = \infty$ kein singulärer Werth für sie ist. Da die Punkte u, die auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ liegen, durch die Gleichung $u - \gamma = le^{\vartheta i}$, in welcher ϑ von 0 bis 2π variirt, bestimmt sind, so gilt für die zugehörigen Punkte v die Gleichung $v = \frac{1}{l} e^{-\vartheta i}$. Der Kreis $\mathfrak{L}$ liefert also in der v-Ebene einen Kreis $\mathfrak{L}'$ mit dem Mittelpunkt $v = 0$ und dem Radius $\frac{1}{l}$, und zwar bewegt sich v längs $\mathfrak{L}'$ in negativer Drehungsrichtung, wenn u den Kreis $\mathfrak{L}$ in positiver Richtung durchläuft. Die Punkte $p', p_1', \ldots p_n'$ befinden sich sämmtlich ausserhalb des Kreises $\mathfrak{L}'$, da die von $\mathfrak{L}'$ umschlossene Kreisfläche denjenigen Theil der u-Ebene abbildet, der nach Fortlassung der Kreisfläche $\mathfrak{L}$ übrig bleibt. Nennt man sodann $\mathfrak{K}'$ den Kreis, der in der v-Ebene die Abbildung des Kreises $\mathfrak{K}$ darstellt, so gehört zur Kreisfläche $\mathfrak{K}$ die Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ (nicht die Ergänzungsfläche); denn kein Punkt der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ kann, weil γ ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegt, einem unendlich entfernten Punkte der v-Ebene entsprechen. Folglich enthält die Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ keinen anderen singulären Punkt der Function $\psi(v)$ als den Punkt $v = p'$. Die Drehungsrichtung ist bei correspondirenden Umläufen längs $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die gleiche, da die Umgebungen irgend zweier entsprechender Peripheriepunkte einander in den kleinsten Theilen ähnlich sind, und daselbst die inneren Seiten sich gegenseitig abbilden. Man bezeichnet ferner durch $c', \mathfrak{p}', \mathfrak{q}'$ die Constanten

$$(25)\qquad c' = \frac{1}{c-\gamma}, \quad \mathfrak{p}' = \frac{1}{\mathfrak{p}-\gamma}, \quad \mathfrak{q}' = \frac{1}{\mathfrak{q}-\gamma},$$

welche die Bildpunkte von $u = c$, $u = \mathfrak{p}$, $u = \mathfrak{q}$ darstellen. Die Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ sind die Endpunkte einer (den Punkt c' enthaltenden) Linie $\mathfrak{N}'$, die in der v-Ebene der Linie $\mathfrak{N}$ entspricht (Fig. 4). Die Function $\psi(v)$ nimmt, den oben angeführten Voraussetzungen zufolge, den Factor $e^{-2\pi i s}$, resp. den Factor $e^{2\pi i \sigma}$ auf, wenn die Variable v einen positiven Umlauf um den Punkt 0, resp. um den Punkt p' ausführt.

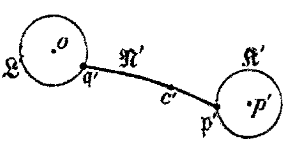

Fig. 4.

Das Integral Ω verwandelt sich durch die Substitution (23) in den Ausdruck

$$(26)\qquad \Omega = -\int_{c'}^{(0-,\, p',\, 0,\, p'-)} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2},$$

dessen Integrationsweg aus den Theilen

$$c'\mathfrak{q}',\ \mathfrak{L}'-,\ \mathfrak{q}'\mathfrak{p}',\ \mathfrak{K}'+,\ \mathfrak{p}'\mathfrak{q}',\ \mathfrak{L}'+,\ \mathfrak{q}'\mathfrak{p}',\ \mathfrak{K}'-,\ \mathfrak{p}'c'$$

besteht. Dies ist ein Integral von der in (15) angegebenen Art. Setzt man

$$(27)\qquad \psi(v) = (v - p')^{\sigma-1}\, v^{1-s}\, \chi(v),$$

so ist $\chi(v)$, wie aus den erwähnten Eigenschaften von $\psi(v)$ folgt, eine bei $v = 0$ und bei $v = p'$ eindeutige Function von v. Mithin hat die zu integrirende Function in (26), $\frac{\psi(v)}{v^2}$, dieselbe Form wie die in (1) definirte Function $f(u)$. Man erhält aus der rechten Seite der Gleichung (1) den Ausdruck $\frac{\psi(v)}{v^2}$, wenn man

$$u, \ \varphi(u), \ p, \ q, \ \tau$$

bezw. durch

$$v, \ \chi(v), \ p', \ 0, \ -\varepsilon$$

ersetzt. Wird ausser diesen Aenderungen noch c' statt c geschrieben, so geht das in (15) bezeichnete Integral ω'' in $-\Omega$ über. Die Formel (16) liefert daher für Ω die Gleichung

$$(28) \qquad \Omega = \begin{cases} -(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{q'}\psi(v)\frac{dv}{v^2}, \\ -(e^{2\pi i\varepsilon}-1)K'+(e^{2\pi i\sigma}-1)\Lambda', \end{cases}$$

in welcher K', Λ' die Integrale der Function $\frac{\psi(v)}{v^2}$ längs des Kreises $\mathfrak{K}'$ im positiven Sinne, resp. längs des Kreises $\mathfrak{L}'$ im negativen Sinne bedeuten.

Bleibt in (27) die Function $\chi(v)$ für $v = p'$ und für $v = 0$ stetig, und ist der reelle Theil von σ positiv, der von ε negativ, so werden die Kreisintegrale K' und Λ' unendlich klein, sobald man die Radien der Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ unendlich klein wählt. Dann ergiebt sich für Ω die Gleichung

$$\Omega = -(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{0}\psi(v)\frac{dv}{v^2},$$

die, wenn nach (23) wieder

$$\frac{1}{v} = u - \gamma, \quad \frac{dv}{v^2} = -du, \quad \psi(v) = F(u)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$(29) \qquad \Omega = (e^{2i\pi\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p}^{\infty}F(u)\,du$$

annimmt. Das Integral Ω wird also, falls das Integral $\int_p^{\infty}F(u)\,du$ convergirt, aus diesem durch Multiplication mit einer Grösse erhalten, welche ausschliesslich von σ und ε abhängt. Das Kreisintegral Λ', das hier als verschwindend klein angenommen wird, ist identisch mit dem über den unendlichen Horizont der u-Ebene erstreckten Integral der Function $F(u)$. Der Integrationsweg des obigen Integrals $\int_p^{\infty}F(u)\,du$ entsteht aus der Linie $\mathfrak{R}$ (Fig. 3), wenn man den Punkt $\mathfrak{p}$ mit p zusammenfallen und den Punkt $\mathfrak{q}$ in's Unendliche rücken lässt. Die Voraussetzung, unter der die Formel (29) gültig ist, wird durch die zwei (zu (10) analogen) Gleichungen

$$\left[(v-p')\,\frac{\psi(v)}{v^2}\right]_{v=p'} = 0, \quad \left[\frac{\psi(v)}{v}\right]_{v=0} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch

(30) $$[(u-p)\,F(u)]_{u=p} = 0, \quad [(u-\gamma)\,F(u)]_{u=\infty} = 0$$

ausgedrückt.

Um den Integrationsweg des Integrals Ω zu vereinfachen, ziehe man vom Punkte c aus (Fig. 3) zwei geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, von denen $\mathfrak{P}$ keinen anderen singulären Punkt der Function $F(u)$ als den Punkt p umschliesst, während das von $\mathfrak{Q}$ begrenzte Flächenstück sowohl die Punkte $p_1, \ldots p_n$ als auch die ganze Curve $\mathfrak{P}$ enthält. Dann kann der Integrationsweg von Ω offenbar aus den 4 Strecken

$$\mathfrak{Q}^+, \ \mathfrak{P}^+, \ \mathfrak{Q}^-, \ \mathfrak{P}^-$$

zusammengesetzt werden, wo $\mathfrak{Q}^+$, $\mathfrak{P}^+$ die positiven, und $\mathfrak{Q}^-$, $\mathfrak{P}^-$ die negativen Umläufe längs $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ bedeuten.

Nach der bisherigen Definition des Integrationsweges von Ω umkreist die Variable u abwechselnd einerseits alle endlichen singulären Punkte der Function $F(u)$, andererseits den Punkt p allein. Indessen lässt sich dieser Integrationsweg noch in einer etwas anderen Weise auffassen, indem der Punkt p den Punkten $p_1, \ldots p_n$ gegenübergestellt werden kann. Um dies zu erläutern, verbindet man die letzteren n Punkte mit einander durch irgend eine gebrochene, sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{S}$ (Fig. 5), so dass ein Umlauf um $\mathfrak{S}$ einen Umlauf um $p_1, \ldots p_n$ darstellt. Man fixirt ferner zwei Punkte d_1, d_2 der Curve $\mathfrak{P}$ und zwei Punkte e_1, e_2 der Curve $\mathfrak{Q}$ und wählt die Bezeichnung derselben in der Art, dass die positiven Umläufe längs $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ kurz durch cd_1d_2c und ce_1e_2c, die negativen durch cd_2d_1c und ce_2e_1c angegeben werden. Endlich werde vom Punkte d_2 eine Verbindungslinie zum Punkte e_2 gezogen, welche die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ nicht schneidet, und welche so liegt, dass das Flächenstück, auf dem sich die Linie $\mathfrak{S}$ befindet, die Begrenzung $ce_1e_2d_2d_1c$ hat. Der Integrationsweg des Integrals Ω besteht, wenn man die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ benutzt, aus den vier Abschnitten

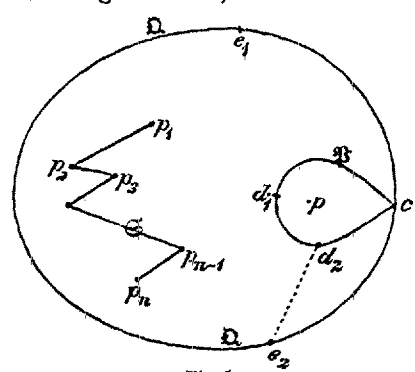

Fig. 5.

$$ce_1e_2c, \quad cd_1d_2c, \quad ce_2e_1c, \quad cd_2d_1c.$$

Der zweite und der dritte dieser Abschnitte bedeuten aber zusammen genommen, da man dafür den Weg $cd_1 d_2 e_2 e_1 c$ setzen darf, einen Umlauf um die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ in negativer Drehungsrichtung. Schaltet man andererseits hinter den ersten Abschnitt $ce_1 e_2 c$ des Integrationsweges die sich gegenseitig aufhebenden Strecken $cd_2 d_1 c$ und $cd_1 d_2 c$ ein, so sind die Wege $ce_1 e_2 c$ und $cd_2 d_1 c$ gleichbedeutend mit $ce_1 e_2 d_2 d_1 c$, d. h. mit dem positiven Umlauf um die Linie $\mathfrak{S}$, worauf dann der Weg $cd_1 d_2 c$, d. h. der positive Umlauf um den Punkt p folgt. Hieraus ergiebt sich, dass Ω sich auch als das Integral

$$(31) \qquad \Omega = \int_c^{(\mathfrak{S},\, p,\, \mathfrak{S}-,\, p-)} F(u)\, du$$

darstellen lässt. Man kann also die positive und die negative Umkreisung der $n+1$ Punkte $p, p_1, \ldots p_n$ (in (22) kurz durch $\mathfrak{S}$, resp. $\mathfrak{S}-$, bezeichnet) durch die entsprechenden Umkreisungen der n Punkte $p_1, \ldots p_n$ ersetzen, ohne dass der Werth des Integrals Ω sich hierdurch änderte.

Als Ausgangspunkt des Integrationsweges des Integrals Ω kann, weil der Anfangswerth der Function $F(u)$ mit ihrem Endwerthe übereinstimmt, ein beliebiger Punkt dieses Weges genommen werden; denn eine Verschiebung der unteren Integralgrenze innerhalb des Integrationsweges ändert nur die Reihenfolge der einzelnen Summanden derjenigen Summe, als deren Grenzfall das Integral Ω anzusehen ist. Da ausserdem die Linien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$ ihrer Form nach willkürlich bleiben und nur hinsichtlich ihrer respectiven Lage zu den singulären Punkten bestimmt sind, so lässt sich die untere Grenze von Ω in jeden beliebigen Punkt der u-Ebene, der nicht singulär für $F(u)$ ist, verlegen, was (mit Rücksicht auf § 1) auch aus der Gleichung (26) folgt. Indessen muss, wenn die untere Integralgrenze sich verschiebt, der Anfangswerth der Function $F(u)$ dieser Aenderung gemäss bestimmt werden. Denkt man sich z. B. in Fig. 5 die untere Grenze des Integrals Ω längs der Curve $\mathfrak{P}$ in positiver Richtung fortgeschoben und in den Punkt d_1 verlegt, so hat man als Anfangswerth von $F(u)$ im Punkte d_1 denjenigen Werth zu nehmen, der aus F_0 entsteht, wenn u den Bogen cd_1 (Bruchtheil eines positiven Umlaufes um den Punkt p) durchläuft. Die Figur 5 (in der man noch die Punkte d_1 und e_1 mit einander verbinden möge) würde hierdurch in Figur 6 übergehen, in welcher dann die vier Strecken

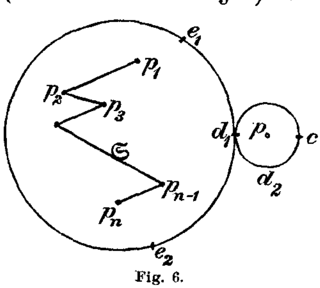

Fig. 6.

$$d_1 e_1 e_2 d_1, \quad d_1 d_2 c d_1, \quad d_1 e_2 e_1 d_1, \quad d_1 c d_2 d_1$$

den Integrationsweg von Ω bezeichnen.

Man kann endlich den Integrationsweg von Ω auch auf eine Form bringen, welche der mit Hülfe der Figur 2 gegebenen Darstellung des Integrationsweges von ω (§ 1) entspricht. In Figur 5 bilden der Bogen cd_1d_2 der Curve $\mathfrak{P}$ und die Verbindungslinie d_2e_2 zusammen eine Linie, durch welche das von $\mathfrak{Q}$ begrenzte Flächenstück in zwei Theile getheilt wird. Auf dem einen dieser Flächentheile liegt der Punkt p, auf dem anderen die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$, und man gelangt, wenn man vom Punkte c aus längs $\mathfrak{Q}$ im positiven Sinne fortschreitet, zunächst zu dem die Linie $\mathfrak{S}$ enthaltenden Flächentheile. Wird nun der positive, resp. der negative Umlauf längs $\mathfrak{Q}$ wiederum durch $\mathfrak{Q}^+$, resp. $\mathfrak{Q}^-$, bezeichnet, so kann der vom Punkte c ausgehende Integrationsweg des Integrals Ω nach Fig. 5 aus den vier Theilen

$$\mathfrak{Q}^+,\quad cd_1d_2e_2,\quad \mathfrak{Q}^-,\quad e_2d_2d_1c$$

gebildet werden. Denn auf dem Wege $\mathfrak{Q}^+$, der mit $ce_1e_2d_2d_1c + cd_1d_2e_2c$ gleichbedeutend ist, wird zuerst die Linie $\mathfrak{S}$, dann der Punkt p im positiven Sinne umkreist. Die übrigen drei Strecken enthalten, da sie als $cd_1d_2e_2e_1c + ce_2d_2d_1c$ geschrieben werden können, die negativen Umläufe um die Linie $\mathfrak{S}$ und um den Punkt p. Also stellen die vier Strecken in der That zusammen den in (31) angegebenen Integrationsweg dar.

Durchläuft die Variable u den in (22), resp. in (31) bezeichneten Integrationsweg in umgekehrter Richtung, so hat das zugehörige Integral der Function $F(u)$ den Werth $-\Omega$. Der Integrationsweg beginnt dann mit dem positiven Umlauf um den Punkt p und schliesst mit dem negativen Umlauf um die Gesammtheit der Punkte $p, p_1, \ldots p_n$, resp. um die Linie $\mathfrak{S}$. Man erhält auf diese Weise die zu (8) analogen Formeln

$$(32)\qquad \begin{cases} \bar{\int}_c^{(p,\,\mathfrak{G},\,p-,\,\mathfrak{G}-)} F(u)\,du = -\bar{\int}_c^{(\mathfrak{G},\,p,\,\mathfrak{G}-,\,p-)} F(u)\,du, \\ \bar{\int}_c^{(p,\,\mathfrak{S},\,p-,\,\mathfrak{S}-)} F(u)\,du = -\bar{\int}_c^{(\mathfrak{S},\,p,\,\mathfrak{S}-,\,p-)} F(u)\,du. \end{cases}$$

Für das Integral Ω wurde in dem Fall, wo die zwei Gleichungen (30) in Kraft sind, der Ausdruck (29) abgeleitet. Ist von den Bedingungen (30) nur die erste

$$[(u-p)\,F(u)]_{u=p} = 0$$

befriedigt, so besteht die Formel

$$(33)\qquad \Omega = (1 - e^{2\pi i\sigma}) \bar{\int}_p^{(\mathfrak{S})} F(u)\,du.$$

Denn wenn man in Fig. 5 den Punkt c in die Nachbarschaft des Punktes p legt und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein wählt, so wird das längs $\mathfrak{P}$ genommene Integral der Function $F(u)$

im gedachten Falle unendlich klein. Es bleiben also nur die zwei Umläufe um die Linie $\mathfrak{S}$ übrig, woraus die Gleichung (33) folgt. Die Bestimmung des zur Anwendung kommenden Zweiges der Function $F(u)$ geschieht nach Fig. 5 oder Fig. 6. In derselben Weise findet man, wenn die zweite Bedingung (30)

$$[(u-\gamma)\,F(u)]_{u=\infty}=0$$

erfüllt ist, für das Integral Ω die Gleichung

$$(34)\qquad \Omega=(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\overline{\int_{\infty}^{(p)}} F(u)\,du,$$

welche sich aus (26) und (11) ergiebt, wenn man den Radius des Kreises $\mathfrak{K}'$ (Fig. 4) unendlich klein nimmt. Die Integrationswege der auf den rechten Seiten von (33) und (34) stehenden Integrale sind einfache geschlossene Curven, von denen die eine vom Punkte p ausgeht und die Linie $\mathfrak{S}$ umgiebt, während die andere in einem beliebigen Punkte des unendlichen Horizontes ihren Anfang nimmt und den Punkt p, jedoch keinen der Punkte $p_1, \ldots, p_n$, umkreist.

Es sollen schliesslich noch zwei Integrale Ω' und Ω'', welche den in § 1 angegebenen Integralen ω' und ω'' analog gebildet sind, betrachtet werden. Es sei Ω' das Integral

$$(35)\qquad \Omega'=\overline{\int_{c}^{(\mathfrak{S}-,\,p-,\,\mathfrak{S},\,p)}} F(u)\,du,$$

dessen Integrationsweg von dem in (22) bezeichneten Integrationswege des Integrals Ω nur darin abweicht, dass die positive und die negative Drehungsrichtung mit einander vertauscht sind. Als Anfangswerth der Function $F(u)$ an der unteren Integralgrenze $u=c$ werde, wie in (22), der Werth F_0 genommen. Man findet leicht die der Formel (13) entsprechende Relation

$$(36)\qquad \Omega'=e^{-2\pi i(\sigma+\varepsilon)}\,\Omega,$$

da in Ω die negativen Umläufe mit dem Werthe $e^{2\pi i(\sigma+\varepsilon)}F_0$, in Ω' mit dem Werthe F_0 beginnen. Hat das Integral $\int_p^\infty F(u)\,du$ einen bestimmten Sinn, so gilt für Ω', wie aus (29) und (36) folgt, die Gleichung

$$(37)\qquad \Omega'=(e^{-2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_p^\infty F(u)\,du.$$

Man kann Ω' auch als das zu (31) analoge Integral

$$(38)\qquad \Omega'=\overline{\int_{c}^{(\mathfrak{S}-,\,p-,\,\mathfrak{S},\,p)}} F(u)\,du$$

auffassen, in welchem die Umkreisung der Linie $\mathfrak{S}$ die Umkreisung der n Punkte $p_1, \ldots p_n$ bedeutet. Denn die für Ω angestellten Betrachtungen übertragen sich auf Ω', sobald die positive und die negative Drehungsrichtung mit einander vertauscht werden.

Man nennt ferner Ω'' das Integral

$$\Omega'' = \bar{\int}_c^{(\mathfrak{S}-,\,p,\,\mathfrak{S},\,p-)} F(u)\,du, \tag{39}$$

in welchem der Weg der Variable u nach Figur 5 durch

$$\mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^-$$

angegeben wird. Wendet man auf Ω'' die Substitution (23)

$$u = \gamma + \frac{1}{v}, \quad v = \frac{1}{u-\gamma}$$

an, welche $F(u)$ in $\psi(v)$ verwandelt, so entsteht die Gleichung (cfr. (26))

$$\Omega'' = -\bar{\int}_{c'}^{(o,\,p',\,o-,\,p-)} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2},$$

in der $p' = \frac{1}{p-\gamma}$, $c' = \frac{1}{c-\gamma}$ gesetzt ist. Mithin kommt Ω'' auf ein Integral von der Form (3) zurück. Ebenso wie für das Integral Ω der Ausdruck (28) erhalten wurde, gewinnt man für Ω'' mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$\Omega'' = \begin{cases} -\,(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\displaystyle\int_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{q}'} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2} \\ -\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\,K' + (e^{2\pi i\sigma}-1)\,L'. \end{cases} \tag{40}$$

In derselben wird durch L' das in positiver Drehungsrichtung längs des Kreises $\mathfrak{L}'$ (Fig. 4) genommene Integral der Function $\frac{\psi(v)}{v^2}$ bezeichnet, während K' dieselbe Bedeutung wie in (28) hat. Sind die Bedingungen (30) erfüllt, so kann man die Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ unendlich klein nehmen, so dass die Kreisintegrale K' und L' verschwinden. Dann entsteht aus (40) die Gleichung

$$\Omega'' = -\,(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{0} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2},$$

die, wenn man durch die Substitution $v = \frac{1}{u-\gamma}$ die Variable u wieder einführt, für Ω'' den Ausdruck

$$\Omega'' = (e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_p^{\infty} F(u)\,du \tag{41}$$

liefert. Benutzt man die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ zur Definition des Integrationsweges, so ist

$$\Omega'' = \bar{\int}_c^{(\mathfrak{S}-,\,p,\,\mathfrak{S},\,p-)} F(u)\,du, \tag{42}$$

wie sich unmittelbar aus der Figur 5 ergiebt, wenn man statt e_2, d_2 die Punkte e_1, d_1 durch eine Linie mit einander verbindet.

§ 3.

Um die Anwendung, welche die hier betrachteten bestimmten Integrale in der Theorie der linearen Differentialgleichungen finden, an einem Beispiel zu erläutern, soll kurz auf die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(43)\qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\varrho]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0$$

eingegangen werden. Man gelangt bekanntlich zu Lösungen dieser Gleichung, indem man für y das bestimmte Integral*)

$$(44)\qquad y=\int_g^h (u-x)^{-\beta}\,\mathfrak{U}\,du,$$

in welchem $\mathfrak{U}$ nur von u abhängt, substituirt und die Formel der theilweisen Integration benutzt. Die Integralgrenze g ist, wie vorausgesetzt wird, eine Constante, h entweder constant oder gleich x. Von den logarithmischen Fällen der Gleichung (43) wird hier abgesehen. Es ergiebt sich, dass das Integral (44) eine Lösung von (43) ist, falls für $\mathfrak{U}$ das Product $u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ genommen wird, und falls der Ausdruck

$$\left[(u-x)^{-\beta-1}u^{\beta-\varrho+1}(u-1)^{\varrho-\alpha}\right]_{u=g}^{u=h},$$

der in Folge der theilweisen Integration als Summandus auftritt, den Werth Null hat. Zur Abkürzung werde

$$(45)\qquad \Phi(u,x)=(u-x)^{-\beta}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1},$$

$$(46)\qquad M=(u-x)^{-\beta-1}u^{\beta-\varrho+1}(u-1)^{\varrho-\alpha}$$

gesetzt. Dann ist

$$(47)\qquad y=\int_g^h \Phi(u,x)\,du$$

ein particuläres Integral von (43), sobald g und h die Bedingung

$$(48)\qquad [M]_{u=h}-[M]_{u=g}=0$$

erfüllen.

Die Gleichung (48) kann zunächst dadurch befriedigt werden, dass sowohl $[M]_{u=g}$ als auch $[M]_{u=h}$ verschwindet. Diese Fälle liefern für g und h die Werthe $0, 1, \infty, x$. Indem man je zwei dieser 4 Werthe für g, h wählt, erhält man die bekannten 6 particulären Lösungen der Gleichung (43)

---

*) Es ist hier dieselbe Bezeichnung gewählt worden wie in § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten“ in Bd. 102 des Crelle'schen Journals, pag. 81, auf die verwiesen wird.

$$(49)\qquad \int_1^x \Phi(u,x)\,du, \qquad \int_0^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$(50)\qquad \int_0^\infty \Phi(u,x)\,du, \qquad \int_1^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$(51)\qquad \int_0^1 \Phi(u,x)\,du, \qquad \int_\infty^x \Phi(u,x)\,du,$$

welche (in dieser Reihenfolge) die zu $x = 0$, zu $x = 1$ und zu $x = \infty$ gehörigen Hauptintegrale darstellen. Man erkennt jedoch, dass die Grösse M nur dann für $u = 0$, bezw. $u = 1$, $u = \infty$, $u = x$ verschwindet, wenn die reellen Bestandtheile der Constanten $\beta - \varrho + 1$, $\varrho - \alpha$, α, $-\beta - 1$ positive Vorzeichen haben. Die Lösungen (49), (50), (51) sind folglich nicht allgemein anwendbar. Die Gültigkeit derselben muss in der That wegen der Convergenzbedingungen der bestimmten Integrale eine beschränkte bleiben.

Die Zahl der Bedingungen, denen die Constanten α, β, ϱ bei den einzelnen Integralen zu genügen haben, vermindert sich, wenn man, während die Werthe $0, 1, \infty, x$ für die Grenzen zur Anwendung kommen, $g = h$ setzt und für das Integral (47) eine geschlossene Curve als Integrationsweg einführt. Denn in diesem Falle bleibt für die bestimmten Integrale nur je eine Convergenzbedingung zu erfüllen übrig. Lässt man z. B., indem man $g = h = 0$ nimmt, in (47) die Variable u eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve durchlaufen, welche vom Punkte 0 ausgeht und den Punkt 1 (jedoch nicht den Punkt x) umschliesst, so befriedigt, der obigen Rechnung zufolge, das so definirte Integral die Gleichung (43), sobald der reelle Theil der Constante $\beta - \varrho + 1$ positiv ist. Dieses Integral wird nach § 1, wenn der Umlauf im positiven Sinne geschieht, durch den Ausdruck

$$\overline{\int_0^{(1)}} (u - x)^{-\beta}\, u^{\beta-\varrho} (u - 1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

bezeichnet. Dasselbe bildet einen Ersatz für das erste Integral (51), wenn $\varrho - \alpha$ im reellen Theil negativ, $\beta - \varrho + 1$ positiv ist; für $\beta - \varrho + 1 < 0$ wird indessen sein Werth ebenfalls ein unbestimmter.

Man gelangt nun zu Lösungen der Differentialgleichung (43), welche niemals illusorisch werden und die Form bestimmter Integrale haben, wenn man in (47) die Variable u Doppelumläufe von der in den vorstehenden §§ 1 und 2 angegebenen Art ausführen lässt. Als Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges des Integrals (47) werde ein beliebiger Werth $u = c$ genommen, der von den Werthen $0, 1, \infty, x$ verschieden ist. Für $g = h = c$ erhält man aus (48) die Bedingung, dass die mehrdeutige Function M ihren anfänglichen Werth wieder annehmen muss, wenn die Variable u die geschlossene Integrationscurve durchläuft. Da aber M das Product

$$(u-x)^{-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho+1}\,(u-1)^{\varrho-\alpha}$$

bedeutet, in welchem die drei Exponenten beliebige Constanten sind, so liegt es nahe, die Gleichung (48) dadurch zu erfüllen, dass man die Variable u, nachdem $g=h=c$ gesetzt ist, um diejenigen singulären Punkte, die sie überhaupt umkreist, zwei Umläufe, nämlich einen positiven und einen negativen, machen lässt. Hierdurch entstehen dann Integrale von der Form (3), (22) und (31).

Von den sechs in (49), (50), (51) genannten Integralen haben drei, nämlich

$$(52)\qquad \int_0^x \Phi(u,x)\,du,\quad \int_1^x \Phi(u,x)\,du,\quad \int_0^1 \Phi(u,x)\,du$$

eine endliche Begrenzung. Statt derselben mögen nunmehr die drei Integrale mit Doppelumlauf

$$(53)\qquad \begin{cases} \bar{\int}_c^{(x,0,x-,0-)} \Phi(u,x)\,du, \\ \bar{\int}_c^{(x,1,x-,1-)} \Phi(u,x)\,du, \\ \bar{\int}_c^{(1,0,1-,0-)} \Phi(u,x)\,du, \end{cases}$$

in denen $\Phi(u,x)$ wieder die Function (45) bedeutet, als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (43) genommen werden. Diese Integrale haben, nachdem an ihrer unteren Grenze ein Werth der Function $\Phi(u,x)$ fixirt worden ist, für ein endliches, von 0 und 1 verschiedenes x stets einen bestimmten Sinn. Denn ihr Integrationsweg ist endlich, und die zu integrirende Function bleibt in allen Punkten desselben stetig. Nach Formel (9) werden die Ausdrücke (53), falls die Integrale (52) convergiren, mit den Producten

$$[e^{2\pi i(\beta-\varrho)}-1]\,[e^{-2\pi i\beta}-1]\int_0^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$[e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}-1]\,[e^{-2\pi i\beta}-1]\int_1^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$[e^{2\pi i(\beta-\varrho)}-1]\,[e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}-1]\int_0^1 \Phi(u,x)\,du$$

identisch.

Man denke sich ferner die Punkte 0 und x durch eine Linie $\mathfrak{A}$, die Punkte 1 und x durch eine Linie $\mathfrak{B}$, die Punkte 0 und 1 durch eine Linie $\mathfrak{C}$ verbunden und bilde die zu (31) analogen Ausdrücke

$$(54)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_c^{(\mathfrak{A},\,1,\,\mathfrak{A}-,\,1-)} \Phi(u,x)\,du, \\ \displaystyle\int_c^{(\mathfrak{B},\,0,\,\mathfrak{B}-,\,0-)} \Phi(u,x)\,du, \\ \displaystyle\int_c^{(\mathfrak{C},\,x,\,\mathfrak{C}-,\,x-)} \Phi(u,x)\,du, \end{cases}$$

deren Integrationswege aus je zwei Umläufen um eine der Verbindungslinien und zwei Umläufen um einen singulären Punkt der Function Φ bestehen. Die Integrale (54), welche convergent sind, sobald x endlich und von 0 und 1 verschieden ist, treten an Stelle der drei Integrale

$$(55)\qquad \int_1^\infty \Phi(u,x)\,du, \quad \int_0^\infty \Phi(u,x)\,du, \quad \int_x^\infty \Phi(u,x)\,du,$$

falls letztere aufhören, einen bestimmten Sinn zu haben. Da die Function $\Phi(u,x)$ den Factor $e^{-2\pi i\alpha}$ aufnimmt, wenn die Variable u einen positiven Umlauf längs einer die drei Punkte 0, 1, x umschliessenden Curve macht, so ergiebt sich aus der Formel (29), dass die Integrale (54) im Fall der Convergenz der Ausdrücke (55) in die Producte

$$[e^{2\pi i(\varrho-\alpha)} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_1^\infty \Phi(u,x)\,du,$$
$$[e^{2\pi i(\beta-\varrho)} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_0^\infty \Phi(u,x)\,du,$$
$$[e^{-2\pi i\beta} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_x^\infty \Phi(u,x)\,du$$

übergehen.

Ist der reelle Theil der Constante $\varrho - \alpha$ positiv, so besteht für das erste der Integrale (54) gemäss der Formel (33) die Gleichung

$$\int_c^{(\mathfrak{A},\,1,\,\mathfrak{A}-;\,1-)} \Phi(u,x)\,du = [1 - e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}] \int_1^{(\mathfrak{A})} \Phi(u,x)\,du.$$

Man kann daher statt des Integrals $\int_1^\infty \Phi(u,x)\,du$, falls dieses durch seine obere (aber nicht durch seine untere) Grenze divergent wird, das Integral $\int_1^{(\mathfrak{A})} \Phi(u,x)\,du$ als particuläre Lösung von (43) anwenden. Die analogen Schlüsse gelten für die übrigen Integrale (55).

Die Differentialgleichung (43) ist hiermit im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale gelöst, da die Integrale (53) und (54) das vollständige System der Hauptintegrale dieser Gleichung darstellen.

Man bemerke, dass in den Fällen, wo von den Integralen (53) und (54) einzelne identisch verschwinden (s. den Schluss des § 1), die entsprechenden einfacheren bestimmten Integrale anwendbar bleiben. Es sind dies zugleich diejenigen Fälle, wo hypergeometrische Reihen mit endlicher Gliederzahl vorkommen. Ist z. B. die Constante $\beta - \varrho$ ganzzahlig und positiv, so dass $\Phi(u, x)$ bei $u = 0$ eine eindeutige stetige Function von u wird, so verschwinden das erste und das dritte der Integrale (53) und das zweite Integral (54) für ein beliebiges x. Dann sind jedoch, da der Werth $u = 0$ als untere Integralgrenze in (47) gewählt werden darf, entweder das erste und das dritte der Integrale (52), resp. das zweite Integral (55), oder aber die zugehörigen Integrale mit einfacher geschlossener Integrationscurve convergent. Man erhält also wiederum ein vollständiges System bestimmter Integrale als Lösung der Differentialgleichung (43). Einer näheren Betrachtung sollen diese speciellen Fälle von (43) hier nicht unterzogen werden.