

V. Ueber die Reduction feiner Gewichtssätze und die Bestimmung der bei absoluter und relativer Gewichtsermittlung ohne Reduction auftretenden Fehler; von Dr. K. L. Bauer.

Mein Nachfolger am Karlsruher Polytechnicum, Hr. Dr. Rühlmann, hat in Carl's Repertorium für Experimentalphysik und physikalische Technik Bd. 4, S. 177 etc. über die Untersuchung eines feinen Staudinger'schen Gewichtssatzes berichtet, der bereits früher auf die sich am natürlichsten darbietende Art von mir reducirt worden war. Erst in letzter Zeit kam ich dazu, jene Arbeit einer genaueren Durchsicht zu unterwerfen; sie enthält die Beschreibung einer von der gewöhnlichen abweichenden Methode und eine auf Grund derselben berechnete Reductionstafel. Auf deren Zahlen sich stützend, glaubt R. ohne weiteres die Ansicht aussprechen zu dürfen, daß der geprüfte Satz ein recht guter gewesen; von meinen auf eine andere Einheit bezogenen Zahlen ausgehend, hielt ich mich in der brieflichen Mittheilung, *Repert.* Bd. 3, S. 280, im Gegentheil zu der Meinung berechtigt, daß der Gebrauch des nemlichen Satzes ohne Reduction zu erheblich fehlerhaften Resultaten führen könne. R. geht sogar so weit, die von mir gefundenen Abweichungen für *scheinbar* groß zu erklären, obschon sie eben *nicht scheinbar*, sondern bei der gewählten Einheit *wirklich* vorhanden sind; auch differiren unserer beider Angaben nach der Zurückführung auf dieselbe Einheit gar nicht so sehr. Hiernach wird man begreifen, daß ich Veranlassung genug hatte, gelegentlich einmal eingehender über das wichtige Thema der Gewichtsreduction nachzudenken. Jetzt hoffe ich so weit zu seyn, um durch nachfolgende Mittheilungen manchen einen guten Dienst zu erweisen. Ich werde mit der Auseinandersetzung des experimentellen Theils meiner Arbeit beginnen, hieran die Vorführung der von R. benutz-

ten Methode knüpfen und gleichzeitig einige Bemerkungen und Correcturen zu dessen Abhandlung machen, sodann zur Berechnung der Reductionstafeln übergehen und schliesslich die *wahren* Kriterien der Güte eines Gewichtssatzes entwickeln.

§. 1.

Die vom Verfasser befolgte experimentelle Methode.

Als *einleitende* Versuche dienten mir unter andern die folgenden. Das 500-Grammstück wurde auf die linke, die Stücke von 200 bis 1 Gramm, welche zusammen gleichfalls 500 Grm. betragen sollten, auf die rechte Schale der Wage gesetzt; dann mußte, um die Ruhelage des Zeigers auf Null zu fixiren, *rechts* noch 0,0013 Grm. beigefügt werden; bei Vertauschung der Gewichte wurde derselbe Zweck erreicht, wenn die Belastung *links* um 0,0148 Grm. vermehrt wurde. In ähnlicher Weise stellte ich das 200 Grammstück auf die linke, beide 100 Grammstücke auf die rechte Schale und kehrte sodann die Anordnung um; im ersten Falle mußte *rechts* 0,0008 Gr., im zweiten *links* 0,005 Gr. zugefügt werden, um den Zeiger auf Null zu führen. Hieraus ergab sich zweierlei: zunächst, dafs die Waage in ihrem dermaligen Zustande, obschon äufserst empfindlich, zu directen, einfachen Wägungen untauglich sey, und zweitens, dafs das 500- und das 200-Grammstück das Gesamtgewicht der entsprechenden kleineren Stücke übertreffe.

Die eigentliche Untersuchung begann damit, dafs ich das 500-Grammstück auf die rechte Schale, und ein solches aus Schrot und Draht bestehendes Gegengewicht auf die linke Schale brachte, dafs die Ruhelage des Zeigers auf Null selbst, oder sehr wenig *rechts* davon zu liegen kam; im letzteren Fall wurde durch die *rechts* befindliche Schiebervorrichtung der Reiter so aufgesetzt, dafs der Zeiger genau auf Null zurückging. Hierauf wurde das 500-Grammstück mit den Gewichtsstücken von 200 Gr. abwärts bis 1 Gr. vertauscht und der Reiter an einem längern Hebelarm wirken gelassen,

so daß die Ruhelage des Zeigers abermals genau auf Null fiel. Dann wurden noch öfters wiederholte Vertauschungen der Gewichte und der Reiterstellungen vorgenommen, bis sich mehrmals nach einander unveränderte Resultate ergaben, — ein Ziel, das bei äußerst sorgfältigem Auslösen und Arretiren sicher erreicht wurde; die sonstigen behufs genauer Messungen unerläßlichen Vorsichtsmaafsregeln bezüglich der Aufstellung und Behandlung der Waage waren natürlich ebenfalls nicht außer Acht gelassen. Die Differenz der durch den Reiter in der zweiten und ersten Stellung repräsentirten Gewichte gab sogleich die Gröfse, um welche die Gewichtssumme der kleinern Stücke zu vermehren war, um das Gewicht des einzelnen grofsen Stückes zu erhalten. Das angeführte Beispiel lieferte die Gleichung

$$500 = 200 + 100' + 100 + \dots + 1 + 0,007,$$

worin die Zahlen, mit Ausnahme der letzten rechts, nur als *angebliche* aufzufassen sind; das Gewicht des Reiters wurde genau = 0,01 Gr. gesetzt, weil man es (nach gewählter Einheit) nicht merklich von dieser Gröfse verschieden fand und überdies immer nur Bruchtheile desselben in Rechnung kommen. Der angeführten Gleichung entsprechend wurden zwischen den bereits genannten Gewichtsstücken, *auf welche allein ich mich hier beschränke*, noch elf weitere Beziehungen ermittelt, die ich sammt der ersten hier übersichtlich aufstelle:

$$\begin{aligned}
500 &= 200 + 100' + 100 + 50 + 20 + 10' + 10 + 5 + 2 + 1'' + 1' + 1 + 0,0070 \\
200 &= 100' + 100 + \dots + 0,0030 \\
100' &= 100 + \dots + 0,0006 \\
100 &= 50 + 20 + 10' + 10 + 5 + 2 + 1'' + 1' + 1 + 0,0045 \\
50 &= 20 + 10' + 10 + 5 + 2 + 1'' + 1' + 1 + 0,0016 \\
20 &= 10' + 10 \dots + 0,0005 \\
10' &= 10 + \dots + 0,0000 \\
10 &= 5 + 2 + 1'' + 1' + 1 + 0,0011 \\
5 &= 2 + 1'' + 1' + 1 + 0,0006 \\
2 &= 1'' + 1' + \dots + 0,0001 \\
1'' &= 1' + \dots + 0,0001 \\
1' &= 1 + 0,0000
\end{aligned}$$

Bevor ich diese Gleichungen zur Berechnung einer Reductionstafel benutze, sey es mir gestattet, das Princip von Rühlmann's Methode kurz zu reproduciren und auf einige störende Druckfehler und Versehen in dessen Arbeit aufmerksam zu machen!

§. 2.

Die von Rühlmann befolgte experimentelle Methode.

Um die Beziehung zwischen dem 20-Grammstück und beiden 10-Grammstücken zu ermitteln, brachte R. das 20-Grammstück auf die rechte Schale, eine nahezu äquilibrrende Tara auf die linke Schale und beobachtete dann bei den Schwingungen des Waagbalkens vier successive äußerste Stellungen der Zeigerspitze: 1,1; 12,4; 2,4; 11,2 (in R. Arbeit S. 178 Mitte steht fälschlich 2,7 statt 2,4).

Sodann wurde das 20-Grammstück durch beide 10-Grammstücke ersetzt, zur nähern Ausgleichung noch 0,08 des Reitergewichtes beigelegt, (S. 179 steht 0,084 statt 0,08), und eine der vorhergegangenen analoge Schwingungsbeobachtung angestellt, deren Resultat war: 1,0; 2,0; 11,9; 10,8. Um aus diesen Daten die jedesmalige Ruhelage des Zeigers zu bestimmen, ging R. von der Ansicht aus, daß die in einem bestimmten Zeitintervall durch die Widerstände der Luft und Reibung verursachte Abnahme der Schwingungsweite der Anzahl der in diesem Zeitraum erfolgten Schwingungen *genau* proportional sey, daß man mithin vier auf einander folgende äußerste Zeigerangaben, wenn die Ruhelage bei x , bezeichnen könne durch:

$$I = x + A$$

$$II = x - A + k$$

$$III = x + A - 2k$$

$$IV = x - A + 3k.$$

Hieraus berechnete R. die Ruhelage nach einer folgenden Schema entsprechenden Vorschrift:

$$= x \left\{ \frac{\frac{I + III}{2} + II}{2} + \frac{\frac{II + IV}{2} + III}{2} \right\} : 2;$$

die Divisionen mit 2 der über den großen Bruchstrichen in der Klammer befindlichen Summen sind von R. aus Versehen zwar nicht verlangt, aber — was die Hauptsache ist — später doch ausgeführt worden. Dieses Schema begreift fünf Additionen und fünf Divisionen, im Ganzen *zehn* Rechnungsoperationen in sich; man würde es daher zweckmäßiger ersetzen durch:

$$x = \left\{ \frac{I + 2 \cdot II + III}{4} + \frac{II + 2 \cdot III + IV}{4} \right\} : 2,$$

womit bloß *acht* Einzelrechnungen angedeutet sind. Am besten rechnet man jedoch zunächst x in nur *vier* Operationen nach der Vorschrift:

$$x = [I + 3 \cdot II + 3 \cdot III + IV] : 8,$$

und dann lediglich zur Kontrolle in *drei* weiteren Operationen Einen der Ausdrücke:

$$[I + 2 \cdot II + III] : 4, \text{ oder } [II + 2 \cdot III + IV] : 4.$$

Im angeführten Beispiel ergeben sich die Ruhelagen x zu 7,09 und 6,69; die Differenz beider ist also 0,4. Um hieraus die Größe des dieselbe verursachenden Gewichtes zu ermitteln, macht R. ferner die Annahme, daß letzteres jener Differenz *genau* proportional, also

$$10' + 10 + 0,08 \text{ Reitergew.} - 20 = \mu \cdot 0,4$$

sey. Das als constant betrachtete Verhältniß μ fand sich aus der Wahrnehmung, daß die Hälfte des Reitergewichtes eine Verschiebung der Zeigerspitze um 13,46 Skalentheile bewirke, $= 0,5 R : 13,46$, und demnach $\mu \cdot 0,4 = 0,015 R$, wonach schließlich die Beziehung aufgestellt werden konnte: $20 = 10' + 10 + 0,065 R$, während nach unsern Angaben $20 = 10' + 10 + 0,05 R$.

Auf S. 180 stellt R. eine Reihe solcher Beispiele in einer mit mehreren Druckfehlern oder Versehen behafteten Tabelle zusammen; so sollten in der mit »Beobachtet« überschriebenen Verticalcolumnne oben links die zwei ersten Ausschläge III (2,0 und 2,4), ebenso unten rechts die zwei letzten Ausschläge II (12,3 und 12,0) gegen einander vertauscht werden, und in der dritten Horizontalspalte von

oben haben die Gewichtsstücke mit den Ausschlägen die Plätze gewechselt. Nach Abstellung dieser Versehen giebt nicht bloß die Differenz der beiden aus den jedesmaligen vier Ausschlägen für den Nullpunkt berechneten Werthe, sondern auch die innerhalb der Gränze der Beobachtungsfehler erfüllt seyn sollende Gleichung

$$I - III = IV - II = 2k$$

einen theilweisen Maassstab für die Brauchbarkeit der benutzten Methode ab. Genau erfüllt ist jene Gleichung rücksichtlich der tabellarischen Angaben nur Einmal, nahezu mehrmals und einigemal weniger befriedigend; die dritt- und fünftletzten vier Ausschläge geben $1,3 = 1,1 = 2k$, beziehungsweise $0,8 = 1,0 = 2k$, und die dazwischenfallenden viertletzten sogar $0,9 = 0,4 = 2k$. Den Vergleich zwischen den nach beiden Methoden erhaltenen Resultaten übergehe ich hier und verweise deshalb auf Carl's Repertorium. Wenden wir uns jetzt gleich zu der Aufgabe, aus dem oben mitgetheilten Gleichungssystem eine Reductionstafel abzuleiten!

§. 3.

Ableitung der Reductionstabellen und einfacher Beziehungen zwischen den auf verschiedene Einheiten bezogenen Abweichungen.

Genannte Aufgabe kommt damit überein, für die *dreizehn* Gewichtsstücke 500, 200, ..., 1 solche Zahlen zu finden, welche den *zwölf* Gleichungen gleichzeitig genügen. Die Beschaffenheit des Gleichungssystems ist der Art, daß man sich behufs möglichst bequemer Auflösung veranlaßt sieht, zunächst das letzte der 1-Grammstücke als Einheit zu wählen, auf die man dann die andern Stücke zu beziehen hat. Verleiht man nämlich diesem Gewichte einen bestimmten, z. B. den exakten Werth 1, so ergeben sich, indem man von der untersten bis zur obersten Gleichung fortschreitet, der Reihe nach die Zahlen für die Stücke 1', 1'', 2, ..., 500 lediglich durch einfache Addition. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt; sie harmoniren nicht völlig mit meinen frühern Angaben in Carl's Repert. wegen eines damaligen kleinen Rechnungsversehens.

Bezogen auf die Einheit g = dem Gewicht des letzten der
1-Grammstücke.

a	$a + \alpha$	$\frac{a + \alpha}{a} = 1 + \frac{\alpha}{a}$
500	500,1462	1,0002924
200	200,0594	1,000297
100'	100,0285	1,000285
100	100,0279	1,000279
50	50,0125	1,000250
20	20,0051	1,000255
10'	10,0023	1,00023
10	10,0023	1,00023
5	5,0009	1,00018
2	2,0002	1,0001
1''	1,0001	1,0001
1'	1,0000	1,0000
1	1,0000	1,0000

Ehe wir an die eigentliche Benutzung und Besprechung dieser Tabelle gehen, wollen wir uns vorstellen, es sey noch eine weitere, nicht auf die Einheit g , sondern auf die beliebige andere Einheit g' bezogene herzustellen. Wäre g' z. B. der fünfzigste Theil des 50-Grammstückes, setzte man letzteres also genau = 50, so würde die Auflösung des Gleichungensystems auch unter dieser Voraussetzung ohne jede Schwierigkeit, aber doch nicht mehr ganz so bequem wie vorher auszuführen seyn. Es drängt sich daher die Frage auf, ob es nicht besser sey, von den Gleichungen ganz abzusehen und eine Umwandlung der schon bekannten auf g bezogenen Zahlen in solche mit der Einheit g' zu versuchen. Der Weg zu diesem Verfahren bietet sich sehr leicht durch die Thatsache, daß ein vom Mechaniker mit a bezeichnetes Stück in der auf g reducirten Tabelle ein Gewicht $a + \alpha$, und in der auf g' reducirten ein solches $= a + \alpha'$ hat, dergestalt daß $(a + \alpha)g = (a + \alpha')g'$, oder daß die Zahlen $a + \alpha$ und $a + \alpha'$ sich umgekehrt wie die entsprechenden Einheiten g und g' verhalten, und daß

$$a + \alpha' = \frac{g}{g'}(a + \alpha).$$

Bei gegebenem Verhältnisse $g : g'$ wäre es nun sehr leicht, mit Benutzung logarithmischer Tafeln, zu jeder in der schon

berechneten Tabelle enthaltenen Zahl $a + \alpha$ die entsprechende $a + \alpha'$ für die neue Tabelle zu finden. Es wäre jedoch sehr verkehrt, dies wirklich auszuführen; besser schon würde man sich auf die Bestimmung des letzten der 1-Grammstücke für die aufzustellende Tafel beschränken, also $a + \alpha = 1$ setzen und bloß $g : g'$ berechnen, dann aber das Gleichungssystem, von unten nach oben fortschreitend, auflösen wie früher. Zur zweckmäßigsten Vorschrift übrigens gelangt man, indem man setzt:

$$g : g' = 1 : (1 + C) = 1 - C + \dots$$

und bedenkt, daß die Glieder mit den zweiten und höhern Potenzen von C , α , α' hier nicht zu berücksichtigen sind. Dann wird nämlich

$$a + \alpha' = (1 - C)a + \alpha, \text{ wobei } C = \frac{g'}{g} - 1.$$

Die hierdurch angedeutete Arbeit gestaltet sich wegen der eigenthümlichen Beschaffenheit der Zahlen a außerordentlich einfach. Die Multiplicationen mit 500, 50 und 5 kommen auf eine Division mit 2 und Verrückung des Kommas hinaus, die Multiplicationen mit 200, 20 und 2 auf eine Multiplikation mit 2 und Verrückung des Kommas in beiden ersten Fällen, die Vervielfältigungen mit 100, 10 und 1 auf bloße Verschiebung des Kommas in beiden ersten Fällen.

Um eine Anwendung hiervon zu machen, wollen wir die bis jetzt willkürlichen Einheiten g und g' genauer definiren; unter g soll, wie schon früher, das Gewicht des letzten der 1-Grammstücke, unter $a + \alpha$, $b + \beta$, ... sollen die bekannten, hierauf reducirten Zahlen verstanden seyn; g' aber möge so gewählt werden, daß die *algebraische Summe aller unter Zugrundelegung dieser Einheit auftretenden Abweichungen identisch Null wird*, der Gewichtssatz also gewissermaassen in möglichst günstigem Lichte erscheint. Sind $a + \alpha'$, $b + \beta'$, ... die zu g' gehörigen Zahlen, so ist die Gewichtssumme sämtlicher Stücke gegeben durch $[(a + \alpha) + (b + \beta) + \dots]g = [(a + \alpha') + (b + \beta') + \dots]g'$. Weil nun nach der Voraussetzung $\alpha' + \beta' + \dots = 0$, so folgt sogleich:

$$g:g'=[a+b+\dots]:[(a+\alpha)+(b+\beta)+\dots] \\ = 1000:1000,2854.$$

In gegenwärtigem Falle ist demnach

$$1 - C = 1 - 0,0002854 = 0,9997146$$

und

$$a + \alpha' = 0,9997146 a + \alpha.$$

Rechnet man nun auf Grund dieser Vorschrift nach der vorhin angedeuteten Weise, so bekommt man folgende Zahlen:

Bezogen auf die Einheit $g' = 1,0002854 g$, wobei die algebr. Summe aller Abweichungen identisch Null ist.

a	$a + \alpha'$	$\frac{a + \alpha'}{a} = 1 + \frac{\alpha'}{a}$
500	500,00350	1,0000070
200	200,00232	1,0000116
100'	99,99996	0,9999996
100	99,99996	0,9999996
50	49,99823	0,9999646
20	19,999392	0,9999696
10'	9,999446	0,9999446
10	9,999446	0,9999446
5	4,999473	0,9998946
2	1,9996292	0,9998146
1''	0,9998146	0,9998146
1'	0,9997146	0,9997146
1	0,9997146	0,9997146

Bevor wir weiter gehen, wollen wir noch einige einfache Beziehungen zwischen den Abweichungen α, β, \dots einer auf g basirten Tabelle und den entsprechenden Größen α', β', \dots einer Tabelle mit der Einheit g' entwickeln. Dividiren wir zu dem Ende die Gleichung $a + \alpha' = (1 - C)a + \alpha$ beiderseitig mit a , so kommt:

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a} = \frac{\alpha - \alpha'}{a} = C = \frac{g'}{g} - 1$$

und daher auch

$$\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right) - \left(1 + \frac{\alpha'}{a}\right) = \frac{a + \alpha}{a} - \frac{a + \alpha'}{a} \\ = \frac{(a + \alpha) - (a + \alpha')}{a} = C = \frac{g'}{g} - 1.$$

Verstehen wir beispielsweise unter a successive das 500- und das 50-Grammstück, so geben die Tabellen für $\frac{\alpha}{a}$ die

Zahlen 0,0002924 und 0,00025, für $\frac{\alpha'}{a}$ aber 0,000007 und — 0,0000354; nun ist in der That:

$$\begin{aligned} 0,0002924 - 0,000007 &= 0,00025 + 0,0000354 \\ &= 0,0002854 = \frac{g'}{g} - 1. \end{aligned}$$

Bedeutend a, b, \dots verschiedene Stücke des Gewichtssatzes, ferner α, β, \dots sowie α', β', \dots die betreffenden Abweichungen für die Einheiten g und g' , so folgt aus der Beziehung

$$C = \frac{\alpha - \alpha'}{a} = \frac{\beta - \beta'}{b} = \dots \text{ ohne weiteres:}$$

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha'}{a} - \frac{\beta'}{b} \text{ und}$$

$$(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : \dots = a : b : \dots$$

Zu den vorhin gewählten zwei Stücken geben z. B. die Tafeln $\alpha=0,1462$, $\beta=0,0125$; $\alpha'=0,0035$, $\beta'=-0,00177$ und nun erhält man wirklich:

$$\begin{aligned} (0,1462 - 0,0035) : (0,0125 + 0,00177) &= 0,1427 : 0,01427 \\ &= 500 : 50. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir hinreichend vorbereitet, um die Beantwortung der Frage zu versuchen, was mit der Herstellung einer Reductionstabelle eigentlich gewonnen sey.

§. 4.

Nutzen der Reductionstabellen bei Gewichtsermittlungen.

Zunächst ist klar, dafs man mit Hülfe einer für irgend eine Einheit g berechneten Reductionstafel bei relativer Gewichtsbestimmung richtige Resultate erzielen wird, so weit diefs nämlich die Empfindlichkeit der Waage zuläfst. Denn gesetzt, wir hätten uns bei zwei Wägungen einmal der Stücke a, b, \dots und das zweitemal der Stücke m, n, \dots bedient, so wären die genauen Gewichte in beiden Fällen:

$$\begin{aligned} P &= [(a + \alpha) + (b + \beta) + \dots] g; \\ Q &= [(m + \mu) + (n + \nu) + \dots] g. \end{aligned}$$

und das Verhältnifs beider:

$$P : Q = [(a + \alpha) + (b + \beta) + \dots] : [(m + \mu) + (n + \nu) + \dots],$$

wo nun rechts die Zahlen ohne Ausnahme der Reductionstafel zu entnehmen sind.

Handelt es sich aber um die Auffindung des richtigen *absoluten* Gewichtes P oder Q , so reicht eine solche Tabelle nicht aus, da sie den Werth der Einheit g in wirklichen Grammen nicht enthält. Bringen wir jedoch irgendwie in Erfahrung, dafs das Stück l des Satzes genau $= l'$ Normalgrammen ist, so hat man die Gleichung $(l + \lambda)g = l'$ Gr., woraus $g = \frac{l'}{l + \lambda}$ Gr., und mithin das Gewicht von P in Normalgrammen:

$$P = [(a + \alpha) + (b + \beta) + \dots] \frac{l'}{l + \lambda},$$

wo nun rechts nichts Unbekanntes mehr vorkommt. In dem besonderen Fall $l' = l + \lambda$, d. h. wenn die gewählte Einheit g genau ein richtiges Gramm ist, geben die Zahlen $a + \alpha, b + \beta, \dots$ der Reductionstabelle unmittelbar die Gewichte der Stücke a, b, \dots in wirklichem Grammwerthe an.

Das Ideal eines Gewichtssatzes wäre ein solcher, dessen einzelne Stücke genau die angeblichen Werthe besäfsen. Je geringere Correctionen an einem Satze anzubringen sind, je entbehrlicher ihm also die Reduction ist, für desto vollkommener wird er gelten müssen. Es reiht sich daher hier noch die Frage an, ob und inwiefern die Angaben einer Reductionstabelle die Mittel an die Hand geben, über die mehr oder minder grofse Brauchbarkeit eines *unreducirten* Satzes ein sicheres Urtheil zu erlangen.

§. 5.

Die bei Wägungen mit unreducirten Gewichtssätzen möglichen Fehler;
Anwendung auf den geprüften Gewichtssatz.

1) Fehler bei den Wägungen zum Zwecke absoluter Gewichtsermittlung.

Benutzt man einen unreducirten Gewichtssatz zu einer *absoluten* Gewichtsbestimmung, so ist das Resultat aus dem Grunde mit einem Fehler behaftet, weil der Mechaniker uns eine ganze Reihe von Gröfsen: $\frac{a + \alpha}{a} g, \frac{b + \beta}{b} g, \dots$ oder,

was dasselbe ist, $\frac{a+\alpha'}{a}g'$, $\frac{b+\beta'}{b}g'$, ... für lauter einander gleiche und richtige Gramme bietet, die aber im Allgemeinen weder das eine noch das andere sind. In dem geprüften Satze z. B. variiren diese Werthe, wie die Tabellen zeigen, von 1,000 000 g bis 1,000297 g , oder von 0,9997146 g' bis 1,000 0116 g' . Der größte dieser Werthe ist gleich dem zweihundertsten Theil des 200-Grammstücks, der kleinste gleich einem der zwei letzten 1-Grammstücke; $g'=1,0002854 g$ ist wenig größer als der hundertste Theil 1,000285 g des schwerern von beiden 100-Grammstücken. Wäre uns nun die Beziehung eines der Gewichtsstücke zum Normalgramm gegeben, so würden wir eine auf letzteres bezogene Reductionstabelle fertigen, die dann die Abweichungen in genauem Grammwerthe enthielte. *Zu leicht finden könnte man jetzt einen Körper schlimmsten Falles um die Summe aller positiven, und zu schwer um die Summe aller negativen Abweichungen.* Weil ferner nach einem leicht zu erweisenden Lehrsatz der Werth des Quotienten $(\alpha + \beta + \gamma + \dots) : (a + b + c + \dots) = \Sigma \alpha : \Sigma a$, falls a, b, c, \dots ausnahmslos positiv, zwischen den größten und kleinsten der Quotienten $\alpha : a, \beta : b, \gamma : c, \dots$ fällt, *so entsteht der größtmögliche procentische Fehler $100 \Sigma \alpha : \Sigma a$ durch den Gebrauch jenes einzigen Stückes, für welches, ohne Rücksicht aufs Vorzeichen, das Verhältniß $\zeta : z$ ein Maximum ist.*

Ist nichts über die Beziehung eines der Gewichtsstücke zum Normalgramm bekannt, so läßt sich gleichwohl mit großer Wahrscheinlichkeit eine sichere Fehlergränze ermitteln, wenn man die kleinste oder größte der vom Mechaniker als Gramm ausgegebenen Größen als genaues Gramm annimmt und sämtliche Stücke des Satzes hierauf als Einheit bezieht. Die Abweichungen fallen dann in besonders ungünstiger Weise alle nach Einer Seite und sind noch dazu im ersten Falle größer als bei jeder andern der sich innerhalb des Gewichtssatzes anbietenden Einheiten. Die auf die Normaleinheit g bezogene Reductionstabelle kann

uns hierfür ein Beispiel abgeben. Der größte überhaupt zu begehende Fehler würde beim Gebrauch aller Stücke eintreten, wovon hier auch die beiden letzten fortbleiben könnten, und betrüge $0,1462 + 0,0594 + \dots = 0,2854$ Gr.; höchstens um diesen Betrag könnte man aller Wahrscheinlichkeit nach einen Körper von beiläufig 1000 Gr. zu leicht finden, und um nicht einmal so viel vermuthlich zu schwer. Der größte procentische Fehler aber überstiege voraussichtlich nicht das Hundertfache des Verhältnisses $\beta:b = 0,00297$, also $0,0297 =$ nahe dreihundertstel Procent.

Eine *niedrigere*, aber auch *minder sichere* Fehlergränze ergibt sich, wenn man von der Ansicht ausgeht, daß die innerhalb des Gewichtssatzes auftretenden Grammwerthe gleichmäfsig nach beiden Seiten von dem wirklichen Gramm abweichen, daß letzteres mithin nicht, wie oben möglichst ungünstig angenommen, mit dem größten oder kleinsten der angeblichen Grammwerthe übereinstimme, sondern *zwischen* dieselben falle und gleich dem arithmetischen Mittel aller sey. Berücksichtigt man nur die zehn von einander verschiedenen $(a + \alpha):a$, so ergibt sich als deren Mittel $1,00021684g$, welcher Werth dem zehnten Theil eines der 10-Grammstücke am nächsten kommt. Auf diese Einheit hätte man jetzt eine Tabelle zu gründen und hieraus die betreffenden Schlüsse zu ziehen.

Wäre die Einheit $g' = 1,0002854g$ ein exactes Gramm, so schlössen wir aus der auf g' bezogenen Tabelle, daß der Fehler beim Gebrauch aller Stücke verschwindend klein ausfiele, daß ferner ein Körper höchstens um $0,00582$ Gr. zu schwer, oder zu leicht gefunden werden könnte, und daß der größte positive procentische Fehler sich auf $0,00116$, also wenig mehr als ein tausendstel Procent beliefe, der größte negative Procentfehler aber auf $0,02854$ Procent.

2) Fehler bei der relativen Gewichtsbestimmung.

Bei *relativen* Gewichtsermittlungen mit nicht reducirten Sätzen entsteht ein Fehler deshalb, weil man das Verhältniß $(a + b + \dots):(m + n + \dots)$ statt $[(a + \alpha) + (b + \beta) + \dots]$

: $[(m + \mu) + (n + \nu) + \dots]$ notirt, oder kürzer geschrieben $\Sigma a : \Sigma m$ statt $\Sigma(a + \alpha) : \Sigma(m + \mu) = [\Sigma a + \Sigma \alpha] : [\Sigma m + \Sigma \mu]$. Auf die Zahl $\Sigma a : \Sigma m$ ergibt sich also ein Fehler $[\Sigma a + \Sigma \alpha] : [\Sigma m + \Sigma \mu] - \Sigma a : \Sigma m$, was für die Einheit den $\Sigma a : \Sigma m^{\text{ten}}$ Theil ausmacht =

$$\left[\frac{\Sigma a + \Sigma \alpha}{\Sigma m + \Sigma \mu} - \frac{\Sigma a}{\Sigma m} \right] \frac{\Sigma m}{\Sigma a}.$$

Das hundertfache dieses Betrages giebt den *procentischen* Fehler, der weit mehr als die Gröfse des überhaupt zu begehenden Fehlers einen Maafsstab für die Güte des Gewichtssatzes abgiebt, und dessen Maximum wir daher zunächst bestimmen wollen. Für die in der Klammer enthaltene Differenz kann man schreiben:

$$\frac{\Sigma a}{\Sigma m} \left[\frac{1 + \Sigma \alpha : \Sigma a}{1 + \Sigma \mu : \Sigma m} - 1 \right] = \frac{\Sigma a}{\Sigma m} \left[\left(1 + \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma a} \right) \left(1 - \frac{\Sigma \mu}{\Sigma m} + \dots \right) - 1 \right].$$

Wenn man die nicht zu berücksichtigenden Glieder mit den zweiten und höhern Potenzen der Abweichungen fortläßt, so vereinfacht sich dieser Ausdruck in:

$$\frac{\Sigma a}{\Sigma m} \left[\frac{\Sigma \alpha}{\Sigma a} - \frac{\Sigma \mu}{\Sigma m} \right] = \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma m} - \frac{\Sigma a}{\Sigma m} \cdot \frac{\Sigma \mu}{\Sigma m}.$$

Mit $100 \Sigma m : \Sigma a$ multiplicirt, giebt dies den procentischen Fehler:

$$100 \left[\frac{\Sigma \alpha}{\Sigma a} - \frac{\Sigma \mu}{\Sigma m} \right].$$

Wir haben somit den Satz gefunden: *Der durch den Gebrauch der Gewichtsstücke a, b, \dots und m, n, \dots bei relativer Gewichtsermittlung auftretende procentische Fehler ist gleich der Differenz der in beiden Einzelwägungen begangenen procentischen Fehler.* Die Gewichtseinheit ist hierbei ganz willkürlich; wir können auch in der That leicht zeigen, dafs

$$\frac{\Sigma \alpha}{\Sigma a} - \frac{\Sigma \mu}{\Sigma m} = \frac{\Sigma \alpha'}{\Sigma a} - \frac{\Sigma \mu'}{\Sigma m},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, dafs

$$\frac{\Sigma(\alpha - \alpha')}{\Sigma a} = \frac{\Sigma(\mu - \mu')}{\Sigma m}.$$

Man bemerkt nämlich sofort, dafs diese Gleichung wegen

der früher abgeleiteten Beziehungen $\alpha - \alpha' = a C$, $\beta - \beta' = b C$,
 \dots , $\mu - \mu' = m C$, $\nu - \nu' = n C$, \dots sich auf $C \Sigma \alpha : \Sigma a$
 $= C \Sigma m : \Sigma m$, d. i. auf die Identität $C = C$ reducirt.

Der in Frage stehende procentische Fehler verschwindet jedesmal, wenn $\Sigma \alpha : \Sigma a = \Sigma \mu : \Sigma m$. Weil diese beiden Verhältnisse *durchaus unabhängig von einander* sind, so bietet auch die Ermittlung des Fehlermaximums nicht die geringste Schwierigkeit; die Bedingungen, welche den Minuenden möglichst groß und den Subtrahenden möglichst klein machen, können einander nicht widerstreiten. Für den Fall, wo die Abweichungen $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ verschiedene Zeichen besitzen, ist klar, daß das positive Fehlermaximum eintritt, wenn der Minuend $\Sigma \alpha : \Sigma a$ positiv und möglichst groß, und wenn gleichzeitig der Subtrahend $\Sigma \mu : \Sigma m$ negativ und im übrigen möglichst groß ist; das negative, *dem positiven an Größe gleichkommende*, Maximum aber, wenn der Minuend negativ, der Subtrahend positiv und beide, absolut genommen, möglichst groß sind. Haben die Abweichungen hingegen sämmtlich das positive Zeichen, so fällt der procentische Fehler am größten positiv oder negativ aus, wenn Minuend oder Subtrahend ein Maximum und gleichzeitig Subtrahend oder Minuend ein Minimum ist; ähnlich verhält es sich, wenn alle Abweichungen das negative Vorzeichen besitzen. Das Maximum und Minimum von $\Sigma \alpha : \Sigma a$ oder $\Sigma \mu : \Sigma m$ ist, wie wir bereits wissen, durch den größten und kleinsten der Quotienten $\alpha : a, \beta : b \dots, \mu : m, \nu : n, \dots$ gegeben. Je nachdem wir nun die Einheit g oder g' zu Grund legen, liefern die Zahlen der betreffenden Tabelle für das Maximum des procentischen Fehlers den Werth:

$$100(0,000297 - 0) = 0,0297 \text{ Proc., oder}$$

$$100(0,0000116 + 0,0002854) = 0,0297 \text{ Proc.}$$

wie vorher.

Diese Fehlergränze ist dieselbe, welche nach dem Vorausgegangenen bei *absoluter* Gewichtsermittlung wahrscheinlich nicht einmal erreicht, geschweige denn überschritten werden würde. Allgemein gilt der Satz: *Die relative Ge-*

wichtsbestimmung mit einem unreducirten Satze fällt in procentischer Beziehung möglichst ungünstig aus bei der Bildung der Relation des verhältnißmäßig schwersten Stückes (hier des 200-Grammstückes) zum verhältnißmäßig leichtesten (hier zu einem der zwei letzten 1-Grammstücke), oder umgekehrt.

Ueber das Maximum des bei relativer Gewichtsermittlung überhaupt auftretenden Fehlers

$$\frac{\sum \alpha}{\sum m} - \frac{\sum a}{\sum m} \cdot \frac{\sum \mu}{\sum m},$$

welcher das $\frac{1}{100} \sum a : \sum m$ -fache des gleichzeitig vorhandenen procentischen Fehlers ausmacht und folglich mit diesem verschwindet, kann deshalb nicht, wie über den letztern, sogleich etwas endgiltiges ausgesagt werden, weil Minuend und Subtrahend jetzt nicht mehr unabhängig von einander sind. Nur für einige Fälle lassen sich Sätze aufstellen; im Allgemeinen jedoch wird es für jeden Gewichtssatz zur Erkennung jenes Fehlermaximums einer besondern Untersuchung bedürfen. Denken wir uns z. B. die Reductionstabelle auf die kleinste Einheit des Gewichtssatzes reducirt, so daß die Abweichung des betreffenden Stückes = 0, und sämtliche andere Abweichungen positiv sind, so werden Minuend und Subtrahend beide stets positiv seyn. Letzterer wird ein Minimum, er verschwindet, wenn $\sum \mu = 0$; gleichzeitig wird der Minuend und damit die Differenz ein Maximum, wenn $\sum m$ ein Minimum und $\sum \alpha$ ein Maximum ist. Diefes giebt den Satz: *Der bei relativer Gewichtsermittlung mit unreducirtem Satze überhaupt zu begehende Fehler erreicht für den besondern Fall, wo das verhältnißmäßig leichteste Stück zugleich das absolut leichteste ist, dann sein positives Maximum, wenn die Summe aller Stücke mit dem erstgenannten Stück verglichen wird.* Für den geprüften Satz erhält man daher das positive Fehlermaximum durch die Annahme:

$$\sum a = 1000; \sum m = 1;$$

und, je nachdem man zur Tabelle mit g oder g' greift, weiter:

$$\Sigma \alpha = 0,2854; \Sigma \mu = 0, \text{ oder}$$

$$\Sigma \alpha = 0; \Sigma \mu = -0,0002854.$$

Das gesuchte Maximum ist hiernach =

$$0,2854 - 0 = 0,2854, \text{ oder}$$

$$0 + 0,2854 = 0,2854, \text{ wie vorher.}$$

Diese Fehlergränze würde bei *absoluter* Gewichtsermittlung, wie wir wissen, vermuthlich nicht einmal erreicht werden.

Denken wir uns jetzt die Reductionstabelle auf die *größte* Einheit des Gewichtssatzes reducirt, so daß die Abweichung des betreffenden Stückes = 0, und alle andern Abweichungen negativ sind, so werden Minuend und Subtrahend stets negative Werthe und der Fehler mithin sein negatives Maximum haben, wenn gleichzeitig $\Sigma \mu = 0$, Σm ein Minimum und $\Sigma \alpha$, absolut genommen, ein Maximum ist. Das heist: *Der bei relativer Gewichtsbestimmung mit unreducirtem Satze überhaupt zu begchende Fehler erreicht in dem besondern Fall, wo das verhältnißmäßig schwerste Stück zugleich das absolut leichteste ist, dann sein negatives Maximum, wenn die Summe aller Stücke mit dem erstgenannten Stück verglichen wird.*

Nach dieser Untersuchung könnte ich zum Schlusse noch einen Rückblick auf die frühern Publicationen über den Staudinger'schen Gewichtssatz werfen und bei dieser Gelegenheit die Vorwürfe, mit denen mich Hr. Dr. Rühlmann in Carl's Repertorium bedacht, als unüberlegt und ungerechtfertigt zurückweisen; denn weder sind die bei der Einheit *g* stattfindenden Abweichungen *scheinbar groß*, noch hat es einen Sinn, diese Einheit als *wenig geeignet* zu bezeichnen. Ich verweise jedoch in Betreff dieses Punktes auf das Repertorium, wo ich mich weiter aussprechen werde.

Wiesbaden, 1868. Nov. 8.