

## Stoßstrahlen und Ionisation bei *H*-Kanalstrahlen.

Von **K. Glimme** und **J. Koenigsberger** in Freiburg i. B.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juni 1921.)

**Einleitung.** Die Ionisation durch Kanalstrahlen ist von G. C. Schmidt, Seeliger, Dempster, Baerwald untersucht worden<sup>1)</sup>. Hierbei war die Ladung der ionisierenden Strahlen als Maß für die Zahl der Teile genommen und ihre Geschwindigkeit aus dem Potentialgefälle bestimmt worden. Die vorliegende Untersuchung sollte die Zahl der Teile des magnetisch und elektrisch ausgesonderten *H*-Atomstrahls auf zwei Wegen aus der Ladung mit Faradayzylinder und aus der Energie mit Thermosäule ergeben. Es zeigte sich aber ein großer mit dem Druck wachsender Unterschied in den Resultaten beider Methoden, der das Vorhandensein von langsamen durch Stoß entstandenen Kollisionsstrahlen (verwandt der  $\delta$ -Strahlung radioaktiver Substanzen) neben den Strahlen normaler Geschwindigkeit beweist. Dazu stimmen die Beobachtungen am Dopplereffekt der Kanalstrahlen von Stark, Wilsar, Vegard und anderen. Die Ionisation eines Gases durch Kanalstrahlen erfolgt durch die primären Strahlen normaler Geschwindigkeit und die sekundären Stoßstrahlen. Eine Trennung der Wirkung beider ist schwierig, und daraus ist die mangelnde Übereinstimmung in den Messungen der Druck- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Ionisierung bei den verschiedenen Autoren zu erklären. Theoretische Betrachtungen erlauben aber genau die Ionisationsweglänge für neutrale Atomstrahlen im einatomigen Gas aus deren Umladungsweglänge zu ermitteln. Messungen zeigten, daß positive Strahlen qualitativ ein ähnliches Verhalten wie die neutralen Strahlen aufweisen.

---

<sup>1)</sup> Die Ionisation der Luft durch Kanalstrahlen wurde von G. C. Schmidt 1902 entdeckt. R. Seeliger (Phys. ZS. **12**, 839, 1911) fand, daß der Sättigungsstrom (für beide Ionenarten?) bei der elektrischen Feldstärke von etwa 70 Volt pro Zentimeter und bei 1 mm Breite des unzerlegten Strahlenbündels, 3 mm Plattenabstand und 0,015 mm Druck erreicht wurde. Die Anzahl der erzeugten Ionen war für  $p = 0,03$  und 0,015 mm dem Druck proportional, und zwar, wenn die Zahl der geladenen Strahlen mit Auffangezylinder gemessen wurde, unabhängig von der Geschwindigkeit, die durch das Entladungspotential als Funkenstrecke von 3 bis 9 mm gemessen wurde. Bei 0,01 mm Druck und 3 cm Länge der Ionisationsstrecke in Wasserstoff war die Ionenzahl gleich der mit Auffänger gemessenen Zahl aller positiven Kanalstrahlen. Die Abhandlungen von H. Baerwald (1. Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 789, 1914; 2. Ann. d. Phys. **65**, 167, 1921), von J. Stark (Jahrb. f. Rad. **15**, 351, 1918), J. A. Dempster (Phys. Rev. **8**, 657, 1916) sind im folgenden erwähnt.

Das Ionisationsmaximum der neutralen Kanalstrahlen (und der Kerne mit einer Ladung) liegt für  $H_2$  unter  $v = 1,3 \cdot 10^8$ , für  $H$  unter  $v = 1,2 \cdot 10^8$ .

§ 1. Versuchsanordnung. Der positive  $H$ -Strahl einer bestimmten dem Potential entsprechenden mittleren Geschwindigkeit wurde magnetisch abgesondert. Vor dem Ionisationsgefäß ist dieser Strahl wegen der Umladungen im allgemeinen nicht nur positiv, sondern auch teilweise neutral und hat aber seine Geschwindigkeit nicht wesentlich geändert. Doch gelangen auf dem Wege zwischen Magnetfeld und Ionisationsgefäß durch Zusammenstoß mit ruhenden Gasmolekülen von  $H_2$  langsamere mitgerissene positive und neutrale Teile, die nur  $H$  oder  $H_2$  sein können, in das Ionisationsgefäß. Dicht vor dem Ionisationsgefäß war ein zweites Magnetfeld angebracht, um schließlich die positiven von den neutralen Teilen sondern zu können. An einer Führung waren übereinander drei geerdete Messingzylinder gleicher Größe mit Thermoelement, Auffänger und Ionisationsgefäß befestigt und konnten nacheinander durch Drehen eines Schriffes an dieselbe Stelle gebracht werden. Der Faradayzylinder aus Messing von 1 cm Durchmesser und 3 cm Länge war, um Voltaeffekte zu vermeiden, von einem äußeren geerdeten Messingzylinder mit 10 mm Blendenöffnung, auf dessen Innenseite eine Glimmerblende von 3,2 mm Öffnung gleich dem Durchmesser des Strahlenbündels saß, umgeben. Der Raum zwischen beiden Zylindern war, um Ionisation der Luft zu verhindern, mit Schellack-Paraffin gefüllt. Die Zuleitung war geschützt. Das geerdete Ionisationsgefäß mit Öffnung von 3,2 mm trug innen zwei Messingplatten von 20 mm Länge, 10 mm Breite, die einen gegenseitigen Abstand von 3,5 mm am einen Ende, von 5,5 mm am anderen besaßen. Die Platten wurden, um etwaige Voltaeffekte auszuschalten, abwechselnd geladen und geerdet, jedoch war kein Voltaeffekt<sup>1)</sup> bemerkbar. Die raschen Strahlen konnten aus dem Gefäß austreten, ohne Metall zu treffen und ohne zu streifen. Der von dem elektrischen Felde der Platten beherrschte Raum hatte etwa 26 mm Länge ( $l' = 2,6$  cm). Das Thermoelement befand sich im geerdeten Zylinder mit 3,2 mm Blendenöffnung in 4 mm Abstand von der Öffnung, 8 mm nach vorn von der Mitte des Ionisationsgefäßes, wenn dieses an seine Stelle

<sup>1)</sup> Daß die Voltaeffekte ohne Bedeutung waren, wurde noch nachgewiesen, indem die Kathode gegen den Faradayzylinder und der Faradayzylinder gegen den Schutzzylinder auf  $\pm 2$  Volt geladen wurden. Diese Aufladung bedingte nur eine kleine Änderung von 5 Proz. in der aufgefangenen Elektrizitätsmenge der positiven Kanalstrahlen. Alle Metallteile waren aus Messing (vgl. J. Stark, Phys. ZS. 10, 752, 1909). Doppelschichten waren bei den hier verwandten relativ hohen Spannungen ohne Bedeutung (vgl. E. Gehrecke und v. Bayer, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 438, 1913).

geschoben wurde. Die durch die 8 mm Unterschied bedingte Korrektur für die Absorptionswirkung zur Berechnung der mittleren Energie der Kanalstrahlen im Ionisationsgefäß beträgt erst bei hohen Drucken ( $> 2 \cdot 10^{-2}$  mm) für die Strahlen normaler Geschwindigkeit über 1 Proz. Die eine Platte des Ionisationsgefäßes wurde durch ein Galvanometer ( $1 \text{ mm} = 5,8 \cdot 10^{-11} \text{ Amp.}$ ) geerdet; die andere wurde auf variables Potential gebracht. Somit war die Zahl der im Gefäß auf dem Wege der  $H$ -Strahlen gebildeten Ionen bestimmbar. Die Entladungsspannung war 31 500 Volt, also war nach T. Retschinsky <sup>1)</sup> das normale  $v = 2,06 \cdot 10^8$  (vgl. S. 281). Die Zahl der Kanalstrahlen wurde einmal mit Faradayzylinder (Auffänger) aus der Ladung, dann mit Thermosäule aus der absolut gemessenen Energie berechnet.  $e$  ist  $4,70 \cdot 10^{-10}$  gesetzt worden. Die Thermosäule wurde mit der Hefnerlampe in 50 cm Abstand [ $2,17 \cdot 10^{-5} \text{ gr cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$  nach W. Gerlach <sup>2)</sup>] geeicht. Die Fläche war nach der Vorschrift von O. Lummer geschwärzt worden; der Querschnitt war 0,080 qcm. Die Durchlässigkeit der das Vakuum abschließenden Glasplatte für die Gesamtstrahlung war 0,487. Der Ausschlag  $a$  des Paschen-Galvanometers für die Thermosäule, auf welche durch die Glasplatte die Strahlung der Hefnerlampe fiel, war z. B. bei 760 mm Druck = 3,7 cm, bei 0,029 mm Hg = 7,5 cm, bei 0,0158 mm = 8,0 cm, in 0,024 mm = 10,3 cm, in 0,0014 mm Hg = 13,4 cm. Danach wurde die Kurve für  $a$  als  $f(p)$  für  $0,05 \text{ mm} > p > 0,001 \text{ mm}$  konstruiert. Die Zahl der  $H$ -Teile, gemessen durch den Erwärmungsausschlag  $a'$  in cm, war danach

$$H'_{n+p} = 1,14 \cdot 10^9 \frac{a'}{a} \text{ für } v = 2,1 \cdot 10^8 \text{ als mittlere normale Geschwindigkeit.}$$

Der Fehler ist etwa  $\pm 15$  Proz. Die Korrektur infolge Energieverlust durch Sekundärstrahlen ist zu vernachlässigen. Sie beträgt nach den Messungen von A. Gallus im Mittel etwa 10 Volt mal  $4e$ , für die größeren Geschwindigkeiten nach H. Baerwalds (2) neuen Messungen <sup>3)</sup> im Maximum  $6e$  und nimmt nach H. Baerwald (2) stark mit sinkendem  $v$  ab. Nach den Messungen mit Auffänger, Tabelle 2, ist je nach dem Druck die Gesamtzahl der Kanalstrahlteile 4- bis 20 mal so groß als die Zahl der Teile mit normalem  $v$ . Also ist dieser Energieverlust höchstens  $4 \cdot 10 \cdot 20 e : 31\,500 e = 2,5$  Proz. der Gesamtenergie.

§ 2. Im folgenden sind die Messungen der Ionisierung bei verschiedenen Drucken gegeben, wobei die Zahl der Kanalstrahlteile mit Thermosäule aus der Energie bestimmt wird.

<sup>1)</sup> T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **50**, 369, 1916.

<sup>2)</sup> W. Gerlach, Phys. ZS. **14**, 577, 1913.

<sup>3)</sup> H. Baerwald, Ann. d. Phys. **41**, 643, 1913 und l. c., S. 276, Anm. 1.

Tabelle 1.

$10^{-3}$ mm Hg	$a'$	$b_+$	$b_-$	$H'_{a+p} \cdot 10^{-9}$	$N_+ \cdot 10^{-9}$	$N_- \cdot 10^{-9}$	$N_- : H'_{a+p}$	$H_p : H'_p$
3,4	12,8	0,7	0,6	1,6	1,9	1,6	1,0	3
14	4,7	1,8	1,2	0,70	4,7	3,1	4,5	8
18	6,5	3,0	2,0	0,98	7,8	5,2	5,3	9
22	3,1	1,7	1,0	0,46	4,4	2,6	5,7	10
28	3,3	2,4	2,1	0,49	7,5	5,5	11,2	17
32	2,3	3,1	2,0	0,34	8,1	5,3	15	23

In dieser Tabelle 1 bedeutet  $a'$  den Galvanometerausschlag der Thermosäule,  $b_+$  und  $b_-$  den Ausschlag für die positiven und negativen Ionen bei 220 Volt am Kondensator.  $N_+ = b_+ \cdot 2,6 \cdot 10^9$ ;  $H'_{a+p} = \frac{a'}{a} \cdot 1,14 \cdot 10^9$ .

Die Werte von  $a$  sind oben (§ 1) gegeben. Der Quotient  $H_p : H'_p$  folgt aus Tabelle 1 und 2 (§ 3) und gibt an, wievielmals die Zahl aller positiven Strahlteile größer ist als die maximal mögliche Zahl der positiven Strahlen normaler Geschwindigkeit  $H'_p$ . Die langsamen Kanalstrahlteile werden hierbei auf der Wegstrecke vom ersten Feld zum Auffänger in dem Bündel von 3,5 mm Durchmesser gebildet. Daß die langsameren Strahlen nicht teilweise in den Faradayzylinder hineindiffundierten positive oder negative Ionen von gaskinetischer Geschwindigkeit sind, wurde durch Anlegen eines Gegenfeldes von  $\pm 2$  Volt geprüft. Der Auffänger gab dann keine merklich anderen Werte. Die Zahl der negativen  $H$ -Ionen normaler Geschwindigkeit beträgt nach anderen Versuchen <sup>1)</sup> etwa 2 bis 3 Proz. der positiven für mittlere Drucke mit Quecksilberpumpe bei  $\text{CO}_2$ -Äther Kühlung, die hier stets angewandt wurde. Für kleinere Geschwindigkeiten nimmt dieser Anteil bis auf etwa 6 Proz. zu und ist im Mittel auf 4 bis 5 Proz. zu schätzen. Dies gilt bis hinab zu Drucken von  $2 \cdot 10^{-3}$  mm.

§ 3. Hier sind Messungen der Ionisierung bei verschiedenen Drucken gegeben, wobei die Zahl der Kanalstrahlteile mit Auffänger aus der Ladung bestimmt wird.

Tabelle 2 enthält in Kolumne (2) die Zahl der Kanalstrahlen des positiven Wasserstoffatoms  $H_p$  aus den Auffängermessungen.  $N_+$  (3) und  $N_-$  (4) sind wie oben bei 220 Volt Potentialdifferenz gemessen.

<sup>1)</sup> J. Koenigsberger und A. Rüttenauer, Phys. ZS. **22**, 193, 1921. Negative Kanalstrahlen werden bei Zusammenstoß von neutralen H-, C-, O-Strahlen mit Hg-Gasatomen gebildet. Theoretisch ist danach zu erwarten, daß auch bei Zusammenstoß des neutralen Strahles mit den durch Ionisierung gebildeten freien Elektronen negative Strahlen entstehen. Doch muß diese Wirkung unter gewöhnlichen Versuchsbedingungen sehr gering sein (vgl. ZS. f. Phys. **4**, 284, 1921).

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p$ in $10^{-3}$ mm	$H_p \cdot 10^{-9}$	$N_+ \cdot 10^{-9}$	$N_- \cdot 10^{-9}$	$N_- : H_p$	$N_- : H_{a+p} = S$	$l' : S$	$\frac{1}{3}(2l_g + l_p)$	für $v_{\max}$ $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}\lambda_a + \lambda_p)$	dasselbe wie 9 für $v_{\min}$	$N_- : H_{a+p} = S'$	$l' : S'$	$H_{a+p} : H_{a+p}'$
4	9,6	9,1	6,3	0,71	0,24	10,8	5,0	34	8	1,1	2,5	4
10	10,6	19,2	13,6	1,30	-0,43	6,8	2,0	28	6	3,0	0,85	7
10	4,8	8,3	6,3	1,34								
17	3,4	8,8	5,2	1,52	0,51	5,1	1,2	16	—	5,2	0,5	10
20	3,6	9,1	6,0	1,64	-0,54	4,8	1,0	14	3	5,6	0,45	11
22	10,8	24	17	1,58								
30	—	—	—	(0,56)		—	0,65	9	2	13	0,2	22
37	3,1	9,4	5,2	1,68	0,56	4,6	0,55	7,9	—	—	—	—
50	9	25	15,6	1,74	0,58	4,5	0,4	6	1,2	—	—	—

Nimmt man, wie im späteren § 6 dargelegt, an, daß die aus dem Gas entstandenen negativen Ionen  $J_-$  aus der Sättigungskurve bis zu etwa 60 Volt Potentialdifferenz erhalten werden, so sind  $J_- : H_p$  bzw.  $J_- : H_p'$  um etwa 25 Proz. geringer als  $N_- : H_p$  (5) bzw.  $N_- : H_{a+p} = S$  (6) und  $N_- : H_{a+p} = S'$  (11) obiger Tabelle und  $l' : S$  (7) bzw.  $l' : S'$  (12) sind um 25 Proz. größer. Der Wert von  $S = N_- : H_{a+p}$  (6), also die Zahl der durch ein Kanalstrahlatom auf dem Wege  $l' = 2,6$  cm ionisierten Gasmoleküle beruht auf der Berechnung der Gesamtzahl  $(a + p)$  rascher und langsamer Kanalstrahlen aus der Zahl aller mit Auffänger gemessenen positiven  $(p)$  Teile. Das Verhältnis  $\left(\frac{p}{a}\right)$  ist bei höheren Drucken, wo das Gleichgewicht zwischen  $a$  und  $p$  erreicht ist, den Messungen von A. Rüttenauer für  $\left(\frac{p}{a}\right)_{\infty} = w$  zu entnehmen. Es ist  $w$  für das  $H$ -Atom im Mittel von 31500 Volt bis zu geringen Spannungen hinab etwa  $= 0,5$ , gleiche Zahl der Teile für alle  $v$  angenommen. (Bezüglich eines Widerspruchs mit Messungen anderer Autoren vgl. Anhang.) Zur exakten Bestimmung müßte die Geschwindigkeitsverteilung bekannt sein. Der größtmögliche Fehler in  $w$  und somit in der Gesamtzahl beträgt  $\pm 20$  Proz.  $S' = N_- : H_{a+p}'$  in Kolumne 11 ist aus den Bestimmungen der Teilchenzahl  $H_{a+p}'$  mit Thermosäule entnommen, die im wesentlichen die Zahl der Teile normaler Geschwindigkeit gibt (vgl. Anhang). Jedenfalls gibt die Thermosäule den maximal möglichen Wert von  $H_{a+p}'$ .

In (8) ist das Mittel der theoretischen Weglänge für Atom und Ion von  $H$  in  $H_2$  berechnet. Hierbei ist die mittlere gaskinetische Weglänge  $l_g$  von neutralem  $H$  in  $H_2$  aus der für  $H_2$  von Reinganum, Sutherland und anderen gegebenen Weglänge umgerechnet und

$l_g = 0,025$  cm bei 1 mm Druck gesetzt worden. Wenn man den Wert des Elektronenringes für  $H$  und  $H_2$  nach Bohrs Modell zugrunde legen würde, würde der Wert von  $l_g$  sich auch nicht sehr verschieden ergeben. Für positives  $H$  vergrößert die Influenz den Radius der Wirkungssphäre;  $l_i = 0,0083$ . Man ersieht durch Vergleichung von (12)  $l':S'$  mit (8), daß keinesfalls nur die Strahlen normaler Geschwindigkeit ionisierend wirken können; denn die für diese allein berechnete Ionisierungsweglänge  $l':S$  wäre erheblich kleiner als die gaskinetische, was unmöglich ist. Die Vergleichung von  $l':S$  (7) mit  $(2l_g + l_i)^{1/3}$  (8) zeigt andererseits, daß nicht alle Strahlen bei jedem gaskinetischen Zusammenstoß ionisieren.

In der Tabelle 2 ist in Kolumne (13) durch Division der Zahlen (11) durch die von (6) das Verhältnis der Zahl  $H_{a+p}$  aller Kanalstrahlteile <sup>1)</sup> zu der Zahl  $H_{a+p}$  der Teile mit normaler Geschwindigkeit ( $b$ -Kurve von Retschinsky, l. c.) für den  $H$ -Atomkanalstrahl ermittelt <sup>2)</sup>.

§ 4. Daß Strahlen mit viel geringerer Geschwindigkeit, als dem Potentialfall entspricht, in  $H_2$  zugegen sind, folgt auch aus den Dopplereffektmessungen von J. Stark, von F. Paschen und anderen. Nach L. Vegard und nach H. Wilsar ist das maximale in der Lichtemission beobachtete  $v$  etwa  $1 \cdot 10^8$ . Daneben sind langsamere Strahlen im Beobachtungsraum hinter der Kathode zugegen. Hierauf hat schon T. Retschinsky hingewiesen und sie einer  $d$ -Kurve zugeordnet. (Strahlen der  $c$ -Kurve von Retschinsky fehlen bei diesen

---

<sup>1)</sup> Die Zahl der langsameren negativen Ionen und der Elektronen, die beide von den Kanalstrahlen durch Stoß ein Stück weit mitgerissen werden, dann durch Zusammenstoß mit ruhenden Gasmolekülen wieder ausscheiden, wurde nur angenähert bestimmt. Ein Magnetfeld, das Elektronen bestimmter Geschwindigkeit vom Faradayzylinder weglenkt, entfernt auch 40 mal langsamere positive Ionen. Also könnten sich dadurch Ladungsverlust und Gewinn dabei teilweise kompensieren. — Es ist aber die maximale Geschwindigkeit der Elektronen, die  $H$ -Strahlen der Geschwindigkeit von 30 000 Volt entsprechend in  $H_2$  abtrennen können, gering. Die ungeordnete Quantengeschwindigkeit bei der Ionisierung beträgt maximal 16 Volt. Die höchste gerichtete Stoßgeschwindigkeit würde erhalten, wenn ein freies Elektron mit einem an  $H$  gebundenen Elektron zusammenstößt, und man hierbei den Kern nur als Masse in Rechnung setzt. Man erhält dann als Maximum, das aber nie erreicht werden kann (vgl. E. v. Kühne, Diss. Freiburg i. B. 1915; C. G. Darwin, Phil. Mag. 27, 499, 1914), 70 Volt für die Elektronen. Als Mittelwert der Geschwindigkeit der mitgerissenen Elektronen ist etwa 20 bis 30 Volt anzunehmen. Also kann man die Elektronen durch ein schwaches magnetisches Feld ablenken, ohne daß positive Kanalstrahlen, wenigstens bis zu etwa 1 Volt Geschwindigkeit herab, entfernt werden.

<sup>2)</sup> Die Werte für  $H_{a+p}:H'_{a+p}$  sind bei höheren Drucken etwas zu groß, weil der  $H$ -Strahl zwar magnetisch abgetrennt war, aber von dem weiter entfernten gesamten neutralen Strahl bei höheren Drucken durch Streuung einige Strahlen noch nach dem Auffangegefäße gelangen konnten.

unseren Versuchen, weil primär  $H$ -Atomstrahlen normaler Geschwindigkeit ausgesondert wurden, und die  $c$ -Kurve der  $H$ -Atome nur durch Zerfall von  $H_2$ -Strahlen der  $b$ -Kurve entsteht.) Die Messungen von B. Saxen (Ann. d. Phys. 38, 319, 1912) lassen das Vorhandensein von langsamer, die normalen Kanalstrahlen begleitender Strahlung in den Dopplereffektkurven deutlich erkennen. Es liegt z. B. für 21 000 Volt Spannung das Schwärzungsmaximum nur bei 1680 Volt. Dagegen fand er keine langsameren Strahlen bei Vergleichung der mit Thermometer gemessenen Wärmewirkung und der mit Faradayzylinder gemessenen Ladung. Doch ist zu bemerken, daß der von Retschinsky genau gemessene Verkleinerungsfaktor, den Saxen S. 338 nach W. Wien zu 0,53 annimmt, 0,63 bis 0,76 beträgt. Diese Differenz bedingt, daß die begleitenden positiven langsamen Strahlen  $H_p$  an Zahl 20 Proz. der normalen  $H'_{a+p}$  bei Saxen ausmachen würden. Oder es wäre  $H_{a+p} : H'_{a+p} =$  etwa 0,8 unter Zugrundelegung der von A. Rüttenauer direkt gemessenen Werte von  $w$  für den Gesamtstrahl. Die Drucke sind bei Saxen nicht angegeben. Der Durchmesser der Öffnung war 3,5 mm. Unsere Versuche würden darauf hinweisen, daß die Drucke bei den Auffängermessungen von Saxen verhältnismäßig niedrig ( $< 0,01$  mm) waren, da sonst noch mehr langsame Strahlen hätten auftreten müssen. — Die langsamen Strahlen, welche nach unseren Versuchen die Kanalstrahlen normaler Geschwindigkeit als Kometeschweif begleiten, entstehen, wie Experiment und Theorie zeigen, auf dem Wege der Kanalstrahlen im Gas und der Hauptsache nach durch Stoß. Daher kann man sie als Stoß- oder Kollisionsstrahlen bezeichnen<sup>1)</sup>. Sie sind den  $\delta$ -Strahlen der radioaktiven Substanzen verwandt. Außerdem bestehen diese langsameren Strahlen zum kleinsten Teil aus gestreuten Kanalstrahlen, deren Geschwindigkeit infolge eines oder mehrerer Zusammenstöße, womit eine größere Ablenkung verbunden ist, geringer geworden ist. Beide Strahlenarten, die nicht voneinander unterschieden werden können, sind unter größerem oder kleinerem Winkel je nach ihrer geringeren oder höheren Geschwindigkeit in ihrer Bahn gegen die Achse des Strahlenzylinders normaler Geschwindigkeit geneigt. Die Strahlen kleiner Geschwindigkeit werden bald durch Zusammenstoß aufgehalten; sie entfernen sich auch von selbst infolge des schrägen Stoßes aus der Kanalstrahlbahn; sie kommen wegen ihrer geringen Weglänge nicht weit. Die rascheren Stoßstrahlen bilden ihrerseits neue Stoßstrahlen.

<sup>1)</sup> Die bei hohen Drucken auftretenden Nebelstrahlen von E. Goldstein entstehen also sowohl durch Streuung der primären Kanalstrahlen wie durch Bildung der oben erwähnten Stoßstrahlen.

Wie groß man die Menge der langsamen Strahlen findet, verglichen mit der Menge der Strahlen normaler Geschwindigkeit, hängt von dem Durchmesser  $d$  der Öffnung des Auffangegefäßes des Faradayzylinders usw. ab. Die langsamen Stoßstrahlen verlaufen, wie die Stoßtheorie (vgl. § 9) zeigt, unter einem Winkel  $\vartheta$  gegen die Bewegungsrichtung der Strahlen mit normalem  $v$ , der um so größer ist, je kleiner  $v$ . Je größer also  $d$ , um so mehr Stoßstrahlen gelangen in das Gefäß hinein, und zwar kommt es auf das Verhältnis der jeweiligen Streuungs- und Absorptionsweglänge der Stoßstrahlung (welche Weglängen den Entstehungsort noch einmündender Stoßstrahlen bestimmen), zu  $d$  bei dem betreffenden Druck  $p$  an. Daher können, je größer  $p$ , um so mehr schräge Stoßstrahlen in eine Öffnung fallen. Außerdem, aber nur als starke Korrektur, wird eine Vergrößerung des Querschnittsdurchmessers  $d'$  des Strahlenbündels (bis zur Ausfüllung der Öffnung durch das Bündel) die relative Zahl der Stoßstrahlen bei gleichem  $d$  verringern.

Die elementaren Stoßtheorien<sup>1)</sup> lassen die Entstehung von Stoßstrahlen durch Auftreffen von primären Strahlen mit der anfänglichen Geschwindigkeit  $V$  auf ruhende Gasmoleküle voraussehen. Die Stoßstrahlen mit geringerer Geschwindigkeit und mit größerer Neigung  $\vartheta$  gegen die Richtung der Primärstrahlen werden häufiger sein als die Stoßstrahlen mit größerem und kleinerem  $\vartheta$ . Es ist<sup>2)</sup> für den Fall der Massengleichheit von Strahl und Gasmolekülen ( $H_2$  in  $H_2$ ,  $He$  in  $He$ ,  $Hg$  in  $Hg$  und angenähert auch beim Zusammenstoß von  $H$  und

$H_2$  wegen der leicht erfolgenden Atomisierung)  $\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  $u = V \cos \vartheta$

und für die Geschwindigkeit  $v$  und Neigung  $\varphi$  des primären Strahls nach dem Stoß  $v = V \cos \varphi$ . Es sei  $Q$  die Zahl der primären Strahlteile,  $d$  die Dicke der Schicht, in der  $N$  Moleküle in 1 cm sind,  $\omega$  sei der

Raumwinkel, dann ist die Zahl der Stoßstrahlen  $Q' = Q d \cdot N \omega \cdot \frac{c^2}{m^4} 4 \sec^3 \vartheta$ .

Die Zahl  $Q'$  wird um so größer, je größer  $\vartheta$ , also je kleiner  $u$ . Die Formel gilt aber nur unter Vernachlässigung der anziehenden Wirkung der den Kern umkreisenden Elektronen. Letztere müssen die abstoßende Wirkung des Kernes in größerem Abstand aufheben.

Man kann aber den gaskinetischen Radius  $r_g$  für  $H_2 = 2,4 \cdot 10^{-8}$ , für  $H$  den Radius des einquantigen Elektronenringes  $5 \cdot 10^{-9}$  als angenähertes Maß einer Distanz nehmen, für die im Mittel bei den kleinen

<sup>1)</sup> C. G. Darwin, Phil. Mag. 27, 499, 1914. E. v. Kühne, Diss. Freiburg 1915.

<sup>2)</sup> C. G. Darwin, l. c. p. 501.



gaskinetischen Geschwindigkeiten jedenfalls noch Abstoßung erfolgt<sup>1)</sup>. Wenn in diesem Abstand  $r_g$  der Kern von  $H$  allein wirken würde, so erhält man  $\cos \vartheta = 0,00028$  für  $V = 2 \cdot 10^8$ ,  $e = 4,67 \cdot 10^{-10}$ ,  $\frac{e}{m} = 2,89 \cdot 10^{14}$  ES; also  $\vartheta$  nahe  $90^\circ$  und  $u = 6 \cdot 10^{+4}$ , fast von der Größenordnung der gaskinetischen Geschwindigkeit. In Wirklichkeit ist wegen der kompensierenden Wirkung der Elektronen  $\vartheta$  noch näher an  $90^\circ$  und  $u$  kleiner.  $\vartheta$  ist also maximal nur  $90^\circ$ .

Die weitere Berechnung ergibt, daß die neugebildeten Strahlen überwiegend große Winkel  $\vartheta$  mit der Achse bilden; sie sind teils positiv, teils neutral. Die Stoßstrahlen bilden aber weitere Stoßstrahlen, und zwar in stärkerem Maß als die schnelleren primären Strahlen. Hierbei werden selbst sekundäre Stoßstrahlen mit kleinerem Winkel  $\vartheta$  und größerem  $v$  relativ häufiger sein. Einer ins einzelne gehenden theoretischen Behandlung ist die ganze Erscheinung noch nicht zugänglich, weil die experimentellen Anhaltspunkte für Absorption und Streuungswirkungen, die zu berücksichtigen wären, noch nicht ausreichen.

§ 5. Ionisierung durch neutrale und positive Strahlen. Wieviel ablenkbare positive und negative Strahlen im Bündel des  $H$ -Atomstrahles vorhanden waren, ließ sich nur für die Strahlen normaler Geschwindigkeit beantworten. Die langsamen Strahlen erwärmen die Thermosäule nur wenig, denn sie enthalten trotz ihrer großen Zahl höchstens 3 bis 5 Proz. der Energie der Gesamtstrahlung (vgl. Anhang). Die positiven  $H$ -Strahlen werden zu diesem Zwecke durch ein zweites Magnetfeld 5 cm vor dem Ionisationsgefäß abgelenkt. Während die nicht abgelenkten neutralen Strahlen normaler Geschwindigkeit auf der Wegstrecke von 5 cm bei nicht zu hohem Drucke überwiegend neutral bleiben, können alle sich neu bildenden und die bereits vorhandenen neutralen langsamen Stoßstrahlen auf dieser kurzen Wegstrecke sich schon merklich, bei höherem Drucke sogar bis nahe zum Gleichgewichtszustande umladen. Wenn das zweite Feld nicht wirkt, sind bei kleineren Drucken im  $H$ -Strahle vom ersten Magnetfelde her mehr positive als neutrale, und von diesen gerade die stärker ionisierenden, von größerer Geschwindigkeit da. Der durch das zweite Magnetfeld nicht abgelenkte neutrale Strahl enthält dagegen verhältnismäßig mehr langsame Teile. Die Wirkung des Ladungseinflusses wird also durch die Wirkung des Geschwindigkeitseinflusses verdeckt sein können. Das Verhältnis der Zahl aller ( $a + p + m$ ), auch der langsameren Teile zu der aller  $a$ -Teile läßt sich also nicht mit der Thermosäule messen,

<sup>1)</sup> P. Debye, Phys. ZS. 21, 178, 1920 und 22, 302, 1921.

aber für die höheren Drucke, wo am zweiten Magnetfelde sicher Gleichgewicht herrschte, angenähert aus dem Mittelwerte für alle  $w$  zu etwa 1,3 bis 1,4 feststellen. Das Verhältnis der entsprechenden Ionen  $N_-$  (oder  $N_+$ ) für  $a + p + m$  zu dem der Ionen für überwiegende  $a$  ist aber größer. Also ionisieren positive Kanalstrahlen stärker, und zwar etwa 10 bis 30 Proz.; sie haben eine kürzere Ionisationsweglänge als die neutralen. Der Unterschied liegt aber nicht viel über der Fehlergrenze dieser besonders schwierigen Messungen.

$p \cdot 10^3$	$H$		$N_+$		$N_-$	
	$a + p + m$	$a$	$a + p + m$	$a$	$a + p + m$	$a$
2,4	12,8	3,9	0,7	0,2?	0,5	0,15?
18	6,5	3,9	3,0	1,9	1,9	1,1
28	5,5	3,3	2,9	1,9	2,0	1,2

§ 6. Die Ionisationskurve in ihrer Abhängigkeit von der angelegten Spannung des Kondensators bedarf noch einer kurzen Erklärung. Bei dem Abfangen der negativen Ionen ist einerseits zu erwarten, daß mit steigender Potentialdifferenz die Zahl negativer Ionen abnimmt, weil die ionisierenden langsamen positiven Strahlen allmählich immer mehr auf die andere Platte abgelenkt werden und nicht mehr den ganzen Luftraum ionisieren können. Andererseits müssen diese auf die eine Platte schon bei geringer Feldstärke des Kondensators teilweise auftreffenden ganz langsamen positiven Strahlen eine wenn auch sehr geringe Sekundärstrahlung<sup>1)</sup> hervorrufen, die aus Elektronen  $S_-$  besteht und die Zahl der negativen Ionen  $J_-$  vergrößert:  $N_- = J_- + S_-$ . Die Kurve der negativen Ionen (vgl. Fig. 1) zeigt, daß beide kleinen Wirkungen sich bei der von uns gewählten Luftstreckenlänge erst von etwa 130 Volt ab aufheben. Dadurch erklärt sich größtenteils<sup>2)</sup> die scheinbare langsame

<sup>1)</sup> H. Baerwald (Ann. d. Phys. **60**, 1, 1919) wies nach, daß für Kanalstrahlen bis 300 Volt die Menge der an Metall ausgelösten Sekundärstrahlung klein ist, verglichen mit derselben Sekundärstrahlung rascher Kanalstrahlen z. B. bei 14 000 Volt. Daher ist auf unseren Kurven bis 220 Volt Kondensatorspannung, wobei erst die langsamen Strahlen auf die Metallplatte gelenkt werden, der Anstieg der negativen Kurve schwach, verglichen mit dem viel stärkeren der positiven Kurve infolge direkter Ladung. Jede Sekundärstrahlung kann im stärkeren Feld beschleunigte Kathodenstrahlung werden und wieder Ionen bilden. Daher müssen zu starke Felder vermieden werden.

<sup>2)</sup> Eine weitere Ursache langsamer Sättigung auch für negative Ionen ist eine zuerst bei den  $\alpha$ -Strahlen beobachtete, von Moulin erklärte Erscheinung. Die Ionen der  $\alpha$ -Strahlen und der Kanalstrahlen liegen in dem engen Zylinderbündel der  $\alpha$ - oder Kanalstrahlen und müssen durch höhere Feldstärken rasch auseinandergezogen werden, damit sie sich nicht wieder vereinigen. Man kann

Sättigung bis 130 Volt, die auch Dempster beobachtet hat, die er aber in anderer Weise deutet. Man muß daher als wahre Zahl der negativen Ionen<sup>1)</sup> den Betrag nehmen, der bei etwa 16 bis 60 Volt (16 Volt ist die Ionisierungsspannung von Elektronen aus  $H_2$ ) gefunden ist. Man braucht sich um die Fortsetzung der Kurve über 60 Volt bei den negativen Ionen in  $H_2$  nicht zu kümmern. Dies stimmt auch zu den neuesten Messungen von H. Baerwald mit exzentrischer Stabelektrode, die obige Fehlerquelle wohl völlig vermeiden und bei 30 bis 70 Volt Sättigung ergeben.

Die oben erwähnten langsamen positiven Kanalstrahlen kommen zumeist von außen in das Ionisationsgefäß. Es würden aber einige darin entstehen, auch wenn nur neutrale hineingeschickt würden. Diese Fehlerquelle ist unvermeidbar. Auf der Kondensatorplatte, die, negativ geladen, die positiven Ionen auffängt und positive Kanalstrahlen verschiedener Geschwindigkeit  $H_p'$  um so zahlreicher auf sich zieht, je höher die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten ist, wird daher die Zahl der primären und sekundären Ionen noch durch die

---

aber Kanalstrahlen, sowie Ionisierung statt hat, also Gasmoleküle da sind und somit Umladung stattfindet, nicht dauernd ganz neutral halten. Die positiven werden alle durch das stärkere Feld auf die Metallplatte abgelenkt werden. Es ist also die Vermehrung der Ionenzahl durch Beseitigung des Effekts von Moulin nur schwer von dieser gleichzeitigen Wirkung der positiven Strahlen auf den Platten zu unterscheiden. Eine weitere Ursache der langsamen Sättigung auch für die negativen Ionen könnte die Bildung negativer Ionen neben Elektronen (gemischte Ionen von Wellisch) sein, die infolge Zusammenstoß mit Kanalstrahlen eine wenn auch klein gerichtete Geschwindigkeit erhalten haben und daher nicht so leicht auf die Platten abgelenkt werden können. Doch würden, wie Überschlagsrechnungen zeigen, beide Erscheinungen zusammen höchstens 10 Proz. der fehlenden Sättigung von etwa 30 Volt ab erklären. Die Hauptursache ist, wie oben angegeben, die Sekundärstrahlbildung durch die positiven, auf die eine Kondensatorplatte mit wachsendem Potential immer zahlreicher abgelenkten Kanalstrahlen verschiedener Geschwindigkeit.

<sup>1)</sup> H. Baerwald (1) und J. A. Dempster fanden einen starken Überschuß negativer Ionen. Da die hineingesandten Kanalstrahlen überwiegend neutral und positiv waren, sich angenähert im Gleichgewicht befanden und höchstens 4 Proz. negative Strahlen enthielten, müssen die fehlenden positiven Ionen unbeweglich gewesen sein, also die negativen beweglichen Ionen durch Aufprall der Kanalstrahlen an Metall entstanden sein. Bei Baerwald wie bei Dempster mußten die gestreuten und abgelenkten Strahlen im Ionisationsraume auch im ganz schwachen Kondensatorfelde auf Metall treffen, das nicht mit dem Galvanometer verbunden war, so daß nur die negative Ladung sich geltend machte. Bei unserer Anordnung war diese Fehlerquelle möglichst vermieden worden und kleiner als 5 Proz. Bei der neuesten Untersuchung von H. Baerwald (2) ist sie völlig beseitigt. — Ein geringer Überschuß negativer Ionen (Elektronen) könne sich ergeben, wenn lediglich neutrale Strahlen in den Ionisationsraum gesandt werden und sich dort in das Gleichgewicht setzen, so daß positive Strahlen gebildet und Elektronen frei werden.

Strahlen von  $H_p''$  vergrößert. Im Maximum wird  $N_+ = N_- + H_p''$  sein. Setzen wir  $N_-:H_p' = D$ , so ist

$$N_+ = N_- (1 + 1/D). \quad (1)$$

Bei 220 Volt werden bei unserer Anordnung die Strahlen unter normaler Geschwindigkeit auf die Platten gelenkt<sup>1)</sup>. Setzt man in Tab. 1  $H_p:H_p' = C$ , so ist die Zahl der langsamen Strahlen  $H_p - H_p'$ , verglichen mit der Gesamtzahl

$$H_p = \frac{C-1}{C},$$

also lautet (1) in diesem Falle

$$N_+ = N_- \left( 1 + \frac{C-1}{CD} \right).$$

Berechnet man daraus

$$(N_+ - N_-):N_-,$$

so ergibt sich z. B. ein Zahlenwert von 0,65, da  $D$  Tab. 2 (5) im Mittel 1,4 und  $C$  etwa 9 ist (zwischen  $p = 10 \cdot 10^{-3}$  und  $20 \cdot 10^{-3}$ ). Vergleicht man diesen Wert mit den Kurvenwerten, so findet man, daß diese nur wenig kleiner sind, als es dieser Wert verlangt, daß also die langsamen Kanalstrahlen in der Mehrzahl nur kleine Geschwindigkeiten bis zu 220 Volt hinauf haben. Für kleinere Drucke sind  $D$  und  $C$  kleiner; das Resultat wird aber nicht wesentlich geändert. Dempster gibt bei seinen Ionisationsmessungen für Kanalstrahlen mit viel geringerer Normalgeschwindigkeit (480 Volt) keine Zahlen. Seine Fig. 6 läßt im Zusammenhang mit Fig. 7 als mög-

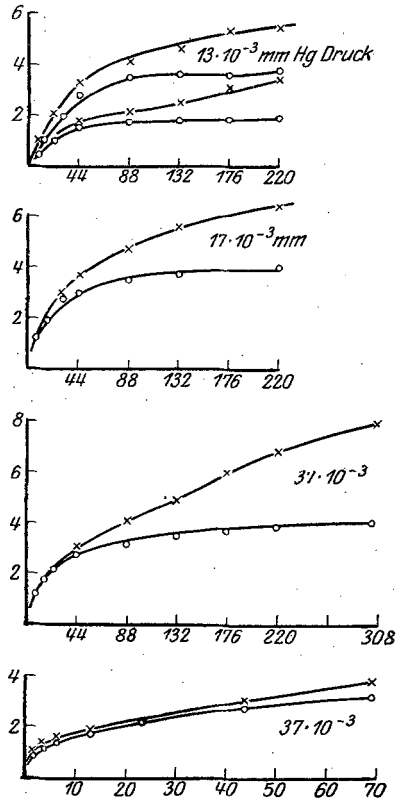


Fig. 1.

Ordinate: Ionisationsausschlag  
 Abszisse: Potentialdifferenz zwischen  
 Kondensatorplatten  
 × = positive Ionen  
 ○ = negative Ionen  
 Alle Kurven für 31 500 Volt.

<sup>1)</sup> Bei unserer Anordnung wurden die Strahlen auf die Platten gelenkt, wenn die Potentialdifferenz der Platten etwa der Geschwindigkeit (in Volt vollberechnet) entsprach.

lich vermuten, daß der Anstieg der Ionenzahl bei etwa 40 Volt Kondensatorspannung den eigentlichen neu in  $H_2$  gebildeten Ionen zuzuschreiben ist. Ein weiterer geringer Anstieg bis zum Wendepunkte der Kurve bei etwa 100 Volt ist meines Erachtens bedingt durch die aus dem Metall bei Anprall der normalen Kathodenstrahlen frei gewordene geringfügige Sekundärstrahlung. Der dritte stärkste Anstieg der Kurve ist wohl durch das Auffangen der positiven Kanalstrahlen verschiedener Geschwindigkeit und daneben durch die Wirkung beschleunigter Ionen und Elektronen verschiedener Entstehungsart bewirkt. Hierbei zeigt sich, daß für Strahlen mit kleiner normaler Geschwindigkeit (480 Volt) die Ionisation und in Übereinstimmung mit H. Baerwald die Sekundärstrahlung an den Metallplatten erheblich geringer ist als bei den rascheren. — Es läßt sich nach Figuren und Angaben von Dempster  $N:H_p$  auf etwa  $\frac{2}{5}$  und  $J:H_p$  auf  $\frac{1}{5}$  schätzen.

§ 7. Die Druckabhängigkeit ist bei unseren Versuchen, wenn man die Ladung als Maßstab der Zahl der Strahlen nimmt, kaum merklich, dagegen deutlich, wenn aus der Energie mit dem normalen  $v$  die Teilchenzahl berechnet wird. In letzterem Falle ist, allerdings innerhalb großer Fehlergrenzen, nahezu Proportionalität vorhanden. Das führt zu der Folgerung, daß das Produkt der Zahl der Stoßstrahlen mit ihrer Ionisierungsfähigkeit vom Druck ziemlich unabhängig ist. — Diese Ergebnisse stehen scheinbar in einem Widerspruch zu den Messungen von H. Baerwald (2), der aus den Ladungsmessungen die Teilchenzahl berechnete und eine angenäherte Druckproportionalität fand, aber auch vielfach, wie aus seiner Tab. 1, S. 173 l. c. hervorgeht, stärkere Unterschiede gegen die Proportionalität, z. B. statt 1:10 nur 1:2 oder statt 1:25 nur 1:5 beobachtete. Daß Baerwald immerhin eine deutliche Druckabhängigkeit findet und wir nicht, beruht darauf, daß bei der Versuchsanordnung von Baerwald infolge der engen Öffnung von  $d = 1$  mm weniger Stoßstrahlen in das Auffangegefäß hineinkommen konnten als bei unserer Anordnung (vgl. § 4), und der Ladungswert daher mehr den Strahlen normaler Geschwindigkeit entsprach.

Bei unserer Anordnung mit  $d = 3,5$  mm sind viele Stoßstrahlen zugegen; letzteres wurde direkt festgestellt (vgl. § 3). Die Stoßstrahlen im weiten Bündel haben mit steigendem Druck kleinere Geschwindigkeiten (vgl. § 4 und 9), die zum Teil unter dem Optimum der Ionisation liegen müssen (vgl. § 9). Daher zeigten unsere Versuche mit der Ladung als Maßstab für die Strahlenzahl nur eine ganz schwache Druckzunahme der Ionisation. Weitere, aber unseres Erachtens für die Erklärung der Diskrepanz vielleicht weniger wesentliche Unterschiede liegen darin,

daß Baerwald den Gesamtkanalstrahl verwendete, von dem nur etwa 10 bis 20 Proz.  $H$ -Atom sind, wir aber nur mit dem  $H$ -Atom arbeiten, ferner darin, daß bei uns der Kanalstrahl aus dem Ionisationsraum frei austritt und nicht reflektiert werden kann. Übereinstimmung besteht darin, daß in beiden Anordnungen die Intensität des Kanalstrahles an der Stelle des Eintritts in den Raum gemessen wird (vgl. § 1).

Beachtenswert ist, daß Baerwald bei niedrigem Potential, das 1 mm Funkenstrecke entspricht (etwa  $v = 1,0 \cdot 10^{+8}$ ), zwischen dem höchsten Druck von  $94 \cdot 10^{-3}$  und  $127 \cdot 10^{-3}$  mm noch eine Zunahme der Ionisation findet, daß also dieser Kanalstrahl bei  $100 \cdot 10^{-3}$  eine größere „Reichweite“ als 3,5 cm hat, wobei aber auch die seitliche Deflexion von Strahlen durch Streuung zu berücksichtigen ist. Nach Geigers Formel wäre die Reichweite unter obigen Bedingungen etwa 5 cm. Doch kann man das Verhalten der doppelt geladenen  $\alpha$ -Strahlen, die Geschwindigkeitsverlust ohne starke Streuung erfahren, mit dem der Kanalstrahlen einfacher Ladung, bei denen infolge geringerer Geschwindigkeit jeder Geschwindigkeitsverlust mit starker Streuung verbunden ist, nicht ohne weiteres in Beziehung zueinander setzen.

§ 8. Bei der Vergleichung der Absolutwerte für die Ionisation ist folgendes zu berücksichtigen. H. Baerwald (2) gibt für 31 000 Volt bei  $35 \cdot 10^{-3}$  mm Hg die Zahl der pro Kanalstrahlteil auf 1 cm Weglänge gebildeten Elektronen = 1,2 an. Hierbei ist die Zahl der Strahlteile aus der Ladung durch Multiplikation mit 4 auf den unzerlegten Gesamtstrahl umgerechnet. Die Zahl der Stoßstrahlen war bei der Ladungsmessung von Baerwald klein (vgl. § 7 u. 4.), da die Öffnung des Auffängers durch eine Kapillare von 1 mm Durchmesser begrenzt ist. Dagegen konnten sich im Ionisationsgefäß Stoßstrahlen bilden und vergrößerten die Ionisation. Baerwald mußte daher eine größere Zahl von Ionen pro Strahlteil finden, als unsere Versuche mit Faradayzylinder gaben. Doch fehlen bei seinen Versuchen die Stoßstrahlen nicht gänzlich; denn seine Zahl ist erheblich kleiner als unser Wert bei Anwendung der Thermosäule, die fast nur auf Teile mit normalem  $v$  reagiert. R. Seeliger maß bei 0,01 mm für Funkenstrecke  $F = 9$  mm, also etwa 29 000 Volt, mit unzerlegtem Strahlenbündel von 1 mm Höhe des Querschnittes (Breite?) und mit größerer (3 mm?) Öffnung des Faradayzylinders. Er findet für die Wegstrecke von 3 cm etwa ein Ion auf einem positiven Strahlteil. Da er unzerlegte Strahlen verwandte, ist dieser Wert durch 4 (vgl. oben), und um ihn auf 1 cm zu beziehen, durch 3 zu dividieren. Seeliger fand zwischen  $5 \cdot 10^{-3}$  und  $10 \cdot 10^{-3}$  mm Hg Proportionalität mit dem Druck,

aber keine Abhängigkeit der Geschwindigkeit zwischen  $F = 3$  und 9 mm. Würde die Druckproportionalität bis  $30 \cdot 10^{-2}$  mm Hg bestehen, so ergäben sich 0,25 negative (oder positive) Ionen pro 1 cm für  $30 \cdot 10^{-3}$  mm Hg pro ein Strahlteil. — Aus unseren Versuchen folgt für 31 500 Volt und  $30 \cdot 10^{-3}$  mm Hg aus der Ladung berechnet für einen Strahlteil  $1:(I':S) = 1:4,7 = 0,2$  (positive oder negative) Ionen, aus der Energie mit Thermosäule aber  $1:(I':S') = 1:0,2 = 5$  Ionen. Die Größenordnung ist also trotz der Inhomogenität in bezug auf Masse und Geschwindigkeit der primären Strahlen bei Anwendung eines unzerlegten Strahlenbündels dieselbe bei allen Beobachtern. Der vorhandene Unterschied wie überhaupt die Schwierigkeit der Messungen sind in der Berücksichtigung der Stoßstrahlen begründet. Die Eliminierung der letzteren könnte größtenteils gelingen durch Anwendung sehr niedrigen Druckes und sehr kleiner Öffnungen.

§ 9. Berechnung der Ionisierung aus der Umladung. Unsere und die bisherigen Messungen erlauben wegen der die Kanalstrahlen normaler Geschwindigkeit begleitenden und sich stets neu bildenden Stoßstrahlung noch keine zuverlässigen Schlüsse auf die Ionisierung durch Strahlen bestimmter Ladung und Geschwindigkeit. Doch kann man die Ionisierung eines Gases durch neutrale Atome und Moleküle auf andere Weise bestimmen. Aus relativistischen Gründen sind „ruhendes“ und „bewegtes“ Atom gleichwertig, denn die Umladungsweglänge des neutralen Strahles bedeutet die mittlere Wegstrecke, an deren Ende durch Stoß auf ein ruhendes Gasmolekül von  $H_2$  der neutrale Strahl  $H_2$  sich positiv lädt, also ionisiert wird. Man kann sich statt dessen auch das ruhende Gasmolekül bewegt, den Strahl ruhend denken. Daher ist die Ionisierung der ruhenden Gasmoleküle durch den Strahl mit der Umladung des neutralen Strahles durch ruhendes Gas von geringer Dichte vertauschbar<sup>1)</sup>.

Also kann man z. B. die Ionisierungsweglänge von Hg durch einen Hg-Strahl genau bestimmter Geschwindigkeit oder von He und auch noch von  $H_2$ -Gas durch neutralen He- bzw.  $H_2$ -Strahl aus der Umladungsweglänge  $\lambda_a$  des neutralen Strahles ermitteln. Solche  $\lambda_a$  sind z. B. für  $H_2$  in  $H_2$  von A. Rüttenauer<sup>2)</sup> gemessen. Derselbe Schluß gilt nicht mehr streng, aber angenähert auch noch für den H-Strahl in  $H_2$ -Gas, das gleichzeitig mit der Ioni-

<sup>1)</sup> Dies gilt für Ionisierungsstöße, wobei die gerade Bahn des vom Beobachter als bewegt angesehenen Teiles nahezu erhalten bleibt. Der Pauschalwert der Ionisation ist größer, und zwar hängt das von der relativen Primärgeschwindigkeit ab. Diese Vergrößerung nimmt mit der Strahlengeschwindigkeit ab.

<sup>2)</sup> A. Rüttenauer, ZS. f. Phys. 4, 267, 1921.

sierung noch atomisiert wird. Daß ein Teil des neutralen Strahles aus Atomen mit hochquantigen Elektronenbahnen besteht<sup>1)</sup>, die leicht ionisierbar sind, ist zwar für die Ionisation, wie sie mit schwachen Feldern bis 60 Volt an den ruhenden Gasmolekülen (§ 1 ff.) gemessen wurde, belanglos, nur die Umladung wird für diesen Teil der Strahlen etwas leichter vor sich gehen. Die ruhenden Gasmoleküle auch auf der Kanalstrahlbahn sind zum größten Teil, namentlich im Kondensatorfeld, wo die Wiedervereinigung ausbleibt, normale Atome oder Moleküle. Daher wird die Ionisierungsweglänge ein wenig größer, nie aber kleiner sein als die Umladungsweglänge. Der Verlauf der von A. Rüttenauer gemessenen Kurve der Abhängigkeit des  $\lambda_a$  von  $v$  zeigt, daß für  $H_2$  in  $H_2$  ein Maximum der Ionisation jedenfalls unter 28 000 Volt liegt, nach steigenden Potentialen hin aber zuerst so flach abfällt, daß sich der maximale Wert der Ionisation oder der minimale Wert der Ionisationsweglänge von dem bei 28 000 Volt (0,1 cm für 1 mm Hg) nur sehr wenig unterscheiden kann. Für  $H$  in  $H_2$  liegt ein Maximum mit flachem Abfall unter 11 000 Volt, wie aus beistehenden Kurven (Fig. 2) zu ersehen ist, die  $\lambda_a$  bei zwei Drucken als Funktion

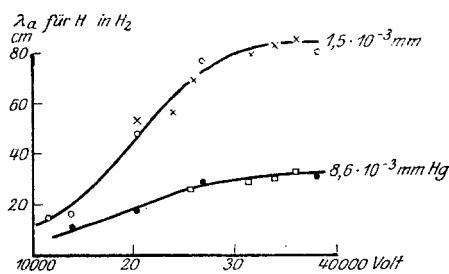


Fig. 2.

von  $v^2$  oder der Entladungsspannung geben. Man kann dann in erster Näherung nach den Beobachtungen des § 5 und 3 berechnen, daß die Ionisation ( $N_- : H_{a+p} = 0,43$  für  $10 \cdot 10^{-3}$  mm Hg und  $J_- : H_{a+p} = 0,43 \cdot 0,75$ ) durch alle hierbei vorkommenden neutralen Strahlen etwa um 20 Proz. (mit  $\pm 50$  Proz. Fehler) schwächer ist als die durch positive Strahlen.

Daraus ergibt sich z. B. für  $10 \cdot 10^{-3}$  mm Hg,  $\frac{a+p}{a} = \frac{4}{3}$  gesetzt,  $J_- : H_a = 0,75 \cdot 0,43 \cdot 4 : 3,8 = 0,34$  und  $l : S = 2,6 : 0,21 = 7,5$  cm Ionisierungsweglänge. Von den hier wirksamen Strahlen sind je fünf langsame und ein Teil normale Strahlen. Letztere müssen aber eine Ionisationsweglänge haben, die mindestens  $= \lambda_a$  für dieses  $v$ , also  $= 28$  cm ist. Folglich ist in erster Näherung  $x = 7,5 \cdot 5/6$ , woraus für die langsamen Strahlen die Ionisierungsweglänge  $x = 6,3$  cm folgt. Dieser Wert ist größer als der aus den Umladungsmessungen extrapolierte kleinstmögliche

<sup>1)</sup> W. Wien, Ann. Phys. **60**, 597, 1919.



Wert von  $\lambda_a = 4$  cm. Also muß ein Teil der langsameren Stoßstrahlen schon wieder eine größere Weglänge haben, also schwächer ionisieren.

Eine Vermehrung der Stoßstrahlen durch Zunahme des Druckes verursacht nur eine schwache Vergrößerung der Ionisation (§ 3, Tab. 2). Die neu hinzukommenden Strahlen haben nach § 4 nur kleinere Geschwindigkeiten;  $60 < v < 500$  Volt. Diese ionisieren demnach schwächer als die rascheren Strahlen  $v > 500$  Volt, in Übereinstimmung mit den obigen Darlegungen. Also liegt das erste Maximum der Ionisation in  $H_2$  jedenfalls zwischen 60 und 10000 Volt, was Kathodenstrahlen unter 6 Volt entsprechen würde.

Ein Einwand gegen diese Folgerungen aus der Umladung neutraler  $H_2$ -Strahlen, der aber nicht die Richtigkeit der obigen theoretischen Schlüsse, sondern die Messungen der Umladungsweglänge treffen würde, scheint in den Messungen von H. Baerwald (2) zu liegen, wonach die Ionisation pro Strahlteil für positive und neutrale Strahlen verschiedener Masse im Mittel mit  $v$  zunimmt. Die Zahl der Strahlteile ist dabei aus der Gesamtladung des Strahlenbündels ermittelt an der Stelle, wo es in das Gefäß eintritt. Bei kleinerer Geschwindigkeit und höherem Druck ist aber die Streuung und Absorption der Strahlen groß. Die Zahl der Strahlen, die in der Mitte und am Ende des Gefäßes ionisieren, ist daher erheblich kleiner als am Anfang. Daher fällt die Ionisation pro Strahlteil, wenn man die Ladung oder Zahl der Strahlen am Anfang zugrunde legt, für die kleineren Geschwindigkeiten zu klein aus. Auch die Zahl der rascheren Stoßstrahlen, die leichter ionisieren können (vgl. oben), muß mit sinkendem  $v$  abnehmen. Man mißt also mit dem Faradayzylinder teilweise unwirksame oder weniger wirksame Strahlteile bei kleinerem  $v$  in größerer Zahl als für höhere  $v$ . So erklärt sich wohl, daß Baerwald für kleinere Drucke eine etwas andere Geschwindigkeitsabhängigkeit fand als für große: bei  $100 \cdot 10^{-4}$  mm für  $F = 3$  mm : 4, für  $F = 6$  mm : 7, für  $F = 9$  mm : 10, also 1 : 1,7 : 2,25, dagegen bei  $1000 \cdot 10^{-4}$  für  $F = 3$  mm : 23 und  $F = 6$  mm : 34,  $F = 9$  mm : 42, also 1 : 1,5 : 1,8 (aus den Kurven l. c. ermittelt).

Die Messungen von Baerwald entsprechen mehr, wenn auch nicht ganz, den Pauschalwerten der Ionisation, wie man sie z. B. für  $\alpha$ -Strahlen verschiedener Anfangsgeschwindigkeiten auf ihrer gesamten Bahn erhalten hat.

Seeliger findet keine Geschwindigkeitsabhängigkeit zwischen  $F = 3$  und 9 mm. — Baerwald wie Seeliger messen aber ferner die Ionisation des Gesamtstrahles, der nur zum kleinen Teil aus  $H$ , zum größeren aus schweren Strahlen von erheblich geringerer Geschwindigkeit  $v < 1 \cdot 10^8$  ( $H_2$ , O, Hg) besteht. Daher messen sie im Mittel die

Geschwindigkeitsabhängigkeit der Ionisierung in einem anderen Intervall<sup>1)</sup> von  $v$ , als es hier für  $H_2$  und  $H$  bei den Umladungsmessungen in Betracht kommt ( $v > 1,3 \cdot 10^8$ ); daher die verschiedenen Ergebnisse.

Daß ein Maximum der Ionisierung oder ein Minimum der Ionisierungsweglänge zwischen den kleinsten Werten von  $v$  und größeren liegt, folgt auch aus den Versuchen von E. v. Bahr und J. Franck<sup>2)</sup>. Sie fanden, daß positive Ionen von  $H$  und  $H_2$  (?) das  $H_2$ -Gas schon von 6 Volt<sup>3)</sup> ab in steigendem Maße mit zunehmender Geschwindigkeit ionisieren. Die Abhängigkeit der Ionisierungsweglänge von der Geschwindigkeit läßt sich aus diesen Versuchen allerdings nicht sicher ermitteln, da die gesamte zurückgelegte Wegstrecke der Ionen im Ionisierungsraum je nach der Geschwindigkeit sehr verschieden sein kann. Außerdem ist die Geschwindigkeit bei einem Versuch im Ionisierungsraum nicht konstant, sondern als Integralwert bestimmt. Es scheint aber, daß die Ionisation zunächst mit der Geschwindigkeit zunimmt und daß die Ionisierungsweglänge abnimmt.

Aus den Versuchen mit den zweifach geladenen  $\alpha$ -Strahlen von Geiger (Proc. Roy. Soc. (A.) 82, 486, 1909) ergibt sich für große  $v$  eine Zunahme der Ionisierung mit abnehmender Geschwindigkeit (vgl. Bragg bei E. Rutherford, Radioactivity, S. 158, 1913). Wie groß der wahre Maximalwert der Ionisation ist, ließ sich experimentell nicht feststellen. Geiger leitete theoretisch ab, daß er erheblich höher ist als der beobachtete Mittelwert (vgl. Fig. 39 bei E. Rutherford, l. c.). Letzterer Wert (7600 Ionen auf 1 mm bei 760 mm Druck) entspräche einer Ionisierungsweglänge von  $1,3 \cdot 10^{-5}$  cm. Aus der Theorie von Langevin ergäbe sich nach Reinganum<sup>4)</sup> für einwertige Ionen rund

<sup>1)</sup> Es wäre bei Baerwald der höchste Wert von  $v$  für Hg rund  $1,5 \cdot 10^7$ , während hier der kleinste Wert von  $v$  für  $H = 1,2 \cdot 10^8$ , für  $H_2 = 1,3 \cdot 10^8$  war. Die Menge und Energie der Hg-Strahlen bei  $CO_2$ -Kühlung ist aber im Gesamtstrahl fast gerade so groß wie die des  $H$ -Atoms (vgl. Anhang). Das Intervall der für die Ionisation kritischen Geschwindigkeiten liegt zwischen  $1 \cdot 10^6$  und  $1 \cdot 10^9$ . Die gaskinetische Geschwindigkeit bei gewöhnlicher Temperatur ist schon von der Ordnung  $10^5$ .

<sup>2)</sup> E. v. Bahr und J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 57, 1914.

<sup>3)</sup> Allerdings leitet J. Stark aus anderen Versuchen einen wesentlich höheren Wert des Beginnes der Ionisation, nämlich 400 bis 500 Volt ab, und glaubt, daß die Ionisierung des ruhenden Gases bei den geringeren von E. v. Bahr und J. Franck verwandten Geschwindigkeiten vorgetäuscht sei durch die Selbstionisierung von Quantenpaarstrahlen (assoziierte Kanalstrahlen mit hochquantigen Elektronenbahnen, d. V. ?), die sich aus den positiven Ionen des Glühdrahtes bei Zusammenstoß mit Elektronen bilden und die eine Geschwindigkeit bis in das mittlere Feld hätten. (Bei höheren Geschwindigkeiten müssen außerdem ionisierende Stoßstrahlen entstehen. D. V.)

<sup>4)</sup> M. Reinganum, Phys. ZS. 12, 574, 1911.

$1 \cdot 10^{-5}$  bei 760 mm Hg als Weglänge. Für zweiwertige Ionen wie die  $\alpha$ -Strahlen ist theoretisch die Weglänge etwas größer als die Hälfte der Weglänge für einwertige Ionen. Das wahre Ionisationsmaximum für  $\alpha$ -Strahlen nach Geiger ist aber auch dann noch zu hoch. Es müßte also ein Teil der  $\delta$ -Strahlen ionisierend mitwirken. Es läßt sich also die Ionisierungskurve für die zweifach geladenen  $\alpha$ -Strahlen kaum zu der von einfach geladenen oder neutralen Kanalstrahlen ohne weiteres in Beziehung setzen.

Die von C. Ramsauer<sup>1)</sup> angestellten Überlegungen beziehen sich auf positive Strahlen. Für die Ionisation durch neutrale Strahlen liegt das erste Maximum nach den Darlegungen dieses § 9 jedenfalls nicht bei derselben Geschwindigkeit wie für Kathodenstrahlen, sondern eher bei derselben Energie (Voltbeschleunigung). P. Lenard<sup>2)</sup> hat gefolgert, daß rasch bewegte (positive?) Strahlmoleküle bzw. Atome zwei Ionisationsmaxima haben, eines bei geringerer Geschwindigkeit und ein zweites bei höherem  $v$ , da, wo es Ramsauer vermutet. Unsere Kurven für neutrales H lassen diese Möglichkeit offen.

#### Anhang (Gleichgewichtszustand von Kanalstrahlen in Wasserstoff).

Es ist noch ein scheinbarer Widerspruch zwischen den Werten von  $w$ , die W. Wien<sup>3)</sup> und die H. Baerwald (2) für Kanalstrahlen mit Thermosäule bestimmten und den Werten, die J. Kutschewski und J. Koenigsberger photographisch und A. Rüttenauer<sup>4)</sup> mit Thermosäule ermittelt haben, aufzuklären. W. Wien findet an Kanalstrahlen in Wasserstoff, die auch kurzweg Wasserstoffkanalstrahlen genannt werden, bei Kühlung mit  $\text{CO}_2$  bei geringem  $\text{H}_2$ -Druck, daß von 100 Teilen 70 neutral ( $a$ ), 27 positiv ( $p$ ), 3 negativ ( $m$ ) sind, also 
$$\frac{p+m}{a} = w = \frac{30}{70}.$$
 Es war eine Zunahme von  $w$  mit dem Druck, dagegen keine merkliche Abhängigkeit von der Geschwindigkeit da. H. Baerwald (2) findet in Übereinstimmung mit W. Wien für Kanalstrahlen in Wasserstoff am Ende der Cu-Kapillaren bei geringem Druck<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> C. Ramsauer, *Jahrb. f. Rad.* 9, 515, 1912.

<sup>2)</sup> P. Lenard, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Abhandl.* 1913, Nr. 4, S. 15.

<sup>3)</sup> W. Wien, *Ann. d. Phys.* 27, 1034, 1908 u. 33, 887 u. 891, 1910 und in Marx, *Handbuch der Radiologie* 4, 84.

<sup>4)</sup> A. Rüttenauer, *ZS. f. Phys.* 1, 385, 1920; 4, 267, 1921.

<sup>5)</sup> Wie Versuche von A. Rüttenauer und einem von uns zeigten, bewirkt eine Metall-(Eisen-)Kapillare schon auf ganz kurzer Strecke, daß derselbe Gleichgewichtszustand erreicht wird, wie er in dem Gase, das die Kapillare erfüllt, bei höherem Druck oder größerer Wegstrecke auch zustande kommt. Eine Glaskapillare wirkt etwas anders. Obige Zahlen gelten für  $\text{CO}_2$ -Ätherkühlung und

und einer Funkenlänge  $F$  von 10 mm:  $a = 67$ ,  $p = 30$ ,  $m = 3$ ; für  $F = 6$  mm:  $a = 70$ ,  $p = 27$ ,  $m = 3$ ; für  $F = 3$  mm:  $a = 73$ ,  $p = 23$ ,  $m = 2$ .

Nach A. Rüttenauer ist dagegen in Übereinstimmung mit J. Kutschewski und J. Koenigsberger für  $F = 10$  bei  $1,1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg für  $H$ -Atom in  $H_2$ :  $a = 61$ ,  $p = 37$ ,  $m = 2$ ; für  $F = 6$ :  $a = 65$ ,  $p = 33$ ,  $m = 2$ ; für  $F = 3$ :  $a = 71$ ,  $p = 26$ ,  $m = 3$ .

Neuere Messungen (1921) von A. Rüttenauer und dem einen von uns an dem Gesamtkanalstrahl in Wasserstoff, wie ihn W. Wien und auch H. Baerwald bei ihren Versuchen verwandten, zeigten dann, daß dieser Kanalstrahl z. B. bei  $F = 10$  mm auch direkt hinter der Eisenkapillare nur zum kleinsten Teil aus Wasserstoffatomstrahlen besteht. Von 100 Energieteilen des Gesamtkanalstrahles ist unter Benutzung der Werte von  $w$  für die einzelnen Strahlen der Energie:

	$p$	$m$	$a$
$H(b)$ . . . . .	4,40	0,19	6,9
$H(c)$ . . . . .	0,91	0,05	2,0
$H_2(b)$ . . . . .	6,75	0	11,2
$H_2(c)$ . . . . .	0,96	0	2,2
$C(b)$ . . . . .	4,65	0,48	10,3
$C(c)$ . . . . .	0,70	0,07	2,2
$O(b)$ . . . . .	7,30	0,68	17,8
$O(c)$ . . . . .	0,81	0,08	3,7
$Hg(b)$ . . . . .	4,30	0	6,0
	30,78	1,55	62,3

Hierin bedeutet  $(b)$  die  $b$ -Kurve von T. Retschinsky<sup>1)</sup>, für welche  $\frac{1}{2}mv^2 = 0,67 E$ ; die  $(c)$  Kurve entspricht  $\frac{0,67}{\sqrt{2}} E$  und wird daher von Retschinsky gedeutet als Kurve nachträglich atomisierter Moleküle. Auffallend ist nur, daß nach diesen Messungen auch  $H_2$ -Strahlen vorkommen, die ungefähr — allerdings innerhalb eines großen Spielraumes von  $\pm 50$  Proz. — eine um  $\sqrt{2}$  kleinere Geschwindigkeit besitzen. Auch auf den Aufnahmen von Retschinsky ist eine Andeutung hiervon zu sehen. Hierzu kommen die langsamen Stoßstrahlen, die  $d$ -Kurve von Retschinsky. Sie werden aus der Differenz, welche die Summe der Tabellenzahlen zu 100 ergänzt, berechnet  $\leq 5,4$ .

Anwesenheit von Ramsaykitt. Die  $Hg$ - und  $C$ -Strahlen können je nach Kühlung usw. vermindert und vermehrt werden, dagegen anscheinend nicht leicht die  $O$ -Strahlen. Bei den Versuchen von W. Wien, von H. Baerwald u. a. dürfte die Zusammensetzung ähnlich wie hier gewesen sein.

<sup>1)</sup> T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **47**, 525, 1915; **48**, 546, 1915; **50**, 369, 1916.

Davon sind positive  $\leq 1,4$ , denen im Mittel etwa die neutralen  $\leq 4,0$  entsprechen. Die Zahl der langsamen ist bei  $1,1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg etwa 0,7 der normalen; ihre Energie im Mittel daher nur  $\leq 2600$  Volt oder ihre Geschwindigkeit im Mittel 1:120 der normalen.

Bei Benutzung der Tabelle ist zu berücksichtigen, daß nur für gleiche  $mv^2$  die hier gegebenen Energieverhältnisse auch dem Verhältnis der Teilchenzahl entsprechen, was also nur für die *b*-Kurven angenähert zutrifft.  $\frac{p+m}{a}$  der Gesamtheit ist in naher Übereinstimmung

mit Wien und Baerwald  $= \frac{34}{66} = 0,51$ . Für  $F = 7 \text{ mm} = \frac{33}{67}$ .

Mit steigendem Druck nimmt bei größerem Weg im Beobachtungsraum das Mengenverhältnis von O und  $H_2$  im Gesamtstrahl ab. Daher steigt der Wert des mittleren  $w$ , während  $v$  der einzelnen Strahlart vom Druck unabhängig ist. Die Geschwindigkeitsabnahme des mittleren  $w$  ist größer, als W. Wien und etwas kleiner, als H. Baerwald sie gefunden hat. Dies mag damit zusammenhängen, daß die Zusammensetzung des Gesamtkanalstrahles in  $H_2$  je nach den Versuchsbedingungen (Entladungsrohr, Kapillare, Kette, Kühlung) in etwas verschiedener Weise von der Geschwindigkeit abhängt.

### Zusammenfassung.

1. Die Wasserstoffatomstrahlen von ursprünglich einheitlicher Geschwindigkeit erzeugen im Wasserstoff eine Kollisionsstrahlung geringerer Geschwindigkeit durch Stoß auf die ruhenden Gasmoleküle. Das wurde durch vergleichende Bestimmung der Teilchenzahl nach der Ladung mit Faradayzylinder und nach der Energie mit der Thermo-säule festgestellt. Je kleiner die Geschwindigkeit des gestoßenen Teiles, um so größer muß theoretisch der Winkel des Stoßstrahles mit der Achse des primären Strahlenbündels sein. Die Stoßstrahlung liegt in einem Kegel um die Richtung des primären Strahles als Achse. Bei höherem Druck ist die Stoßstrahlung zahlreicher, hat im Mittel kleinere Geschwindigkeit und ist stärker diffus, wie Theorie und Experiment ergeben.

2. Die Größenordnung der Ionisation pro Teilchenzahl des Kanalstrahles, wobei auch über die begleitenden Kollisionsstrahlen gemittelt ist, wird von verschiedenen Beobachtern trotz verschiedener Strahlenarten und Geschwindigkeiten in  $H_2$  nahe übereinstimmend gefunden.

3. Die Abhängigkeit der Ionisierung durch Kanalstrahlen von Druck und Geschwindigkeit ist wegen der begleitenden Stoßstrahlen nicht genau bestimmbar.

4. Die Ionisierung durch einen neutralen Kanalstrahl in einem Gase mit Molekülen bzw. Atomen von derselben Masse wie der Strahl ist exakt aus der Umladung des neutralen Strahles in dem Gase zu berechnen, und ergibt ein Maximum für  $H_2$  unter  $v = 1,3 \cdot 10^8$ , für  $H$  unter  $v = 1,2 \cdot 10^8$  cm/sec für Ionisierungsstöße mit geringer Ablenkung.

5. Der scheinbare Widerspruch zwischen den Messungen des Gleichgewichtszustandes in Kanalstrahlen durch verschiedene Autoren wurde geklärt (vgl. Anhang).

Die vorliegenden Versuche wurden mit Mitteln, die seinerzeit von der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin bewilligt wurden, 1913 ausgeführt. Die Veröffentlichung hatte sich bis jetzt verzögert. Der Akademie möchten wir unseren Dank aussprechen.

Freiburg i. B., Math.-physik. Institut.

---