Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Die interessante Abhandlung von Herrn A. Fleck „Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen"*) gibt mir Veranlassung, einige Betrachtungen mitzuteilen, die ich vor längerer Zeit bei Gelegenheit der Lektüre von Herrn E. Maillets Aufsatz: „Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes entiers positifs"**) anstellte.

1. Angenommen, es sei für einen bestimmten Exponenten n bekannt, daß sich jede positive Zahl als Summe von höchstens k n^{ten} Potenzen darstellen läßt, wo k eine feste Anzahl bezeichnet. Angenommen ferner, es bestehe eine in den Größen a, b, c, d identische Gleichung von der Form

$$(1) \qquad p(a^2+b^2+c^2+d^2)^n = \sum_{i=1}^{r} p_i(\alpha_i a + \beta_i b + \gamma_i c + \delta_i d)^{2n},$$

wobei $p, p_1, p_2, \ldots, p_r$ *positive* ganze Zahlen, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \delta_r$ aber beliebige ganze Zahlen bedeuten. Dann folgt leicht, daß auch jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens k' $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar ist, unter k' wiederum eine feste Anzahl verstanden.

In der Tat: jede ganze Zahl ist als Summe $a^2+b^2+c^2+d^2$ von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar. Daher wird nach Gleichung (1) das p-fache *jeder* n^{ten} Potenz als Summe von höchstens $p_1+p_2+\cdots+p_r$ $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar sein. Da weiter nach Voraussetzung jede ganze Zahl eine Summe von höchstens k n^{ten} Potenzen ist, so läßt sich das p-fache *jeder* ganzen Zahl als Summe von höchstens $k(p_1+p_2+\cdots+p_r)$ $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellen. Und da jede beliebige ganze Zahl aus einem

*) Diese Annalen, Bd. 64, S. 561.

**) Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux 1895.

Vielfachen von p durch Addition von 0 oder 1 oder 2, ... oder $p-1$ Einheiten entsteht, so ergibt sich schließlich, daß jede beliebige ganze Zahl als Summe von höchstens

(2) $$k' = k(p_1 + p_2 + \cdots + p_r) + p - 1$$

$2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar ist.

Eine Identität von der Gestalt (1) ist für den Fall $n = 2$ von Liouville, für den Fall $n = 3$ von Herrn Fleck*) aufgestellt worden. Für einen beliebigen Wert von n die Existenz einer derartigen Identität nachzuweisen, scheint aber eine Aufgabe von erheblicher Schwierigkeit zu sein. Doch ist es mir wenigstens gelungen, den nächsten Fall $n = 4$ zu erledigen. In diesem Falle besteht die folgende Gleichung:

(3) $$5040(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

$$= 6 \sum_{a\ldots d}^{(4)} (2a)^8 + 60 \sum_{a\ldots d}^{(12)} (a \pm b)^8 + \sum_{a\ldots d}^{(48)} (2a \pm b \pm c)^8 + 6 \sum_{a\ldots d}^{(8)} (a \pm b \pm c \pm d)^8,$$

wobei ich dieselbe Bezeichnungsweise angewendet habe, wie sie Herr Fleck benutzt.

Da die entwickelte rechte Seite nur gerade Potenzen von a, b, c, d enthält und in diesen Größen symmetrisch ist, so genügt es zur Verifikation der Gleichung (3), die Übereinstimmung der Koeffizienten von

$$a^8,\ a^6b^2,\ a^4b^4,\ a^4b^2c^2,\ a^2b^2c^2d^2$$

auf der linken und rechten Seite festzustellen, was durch eine kurze Rechnung geschieht.

Die in der Gleichung (1) mit $p, p_1, p_2, \ldots, p_r$ bezeichneten Koeffizienten haben in (3) folgende Werte: es ist $p = 5040$; von den übrigen Koeffizienten sind 4 gleich 6, ferner 12 gleich 60, weitere 48 gleich 1 und die übrigen 8 gleich 6. Nun hat Herr Landau**) bewiesen, daß jede ganze Zahl als Summe von höchstens 38 Biquadraten darstellbar ist. Nach Gleichung (2) ergibt sich für die achten Potenzen demnach

$$k' = 38\,(4\,.\,6 + 12\,.\,60 + 48 + 8\,.\,6) + 5039 = 36959,$$

d. h.:

*Jede positive ganze Zahl läßt sich als Summe von höchstens 36959 achten Potenzen ganzer Zahlen darstellen.****)

Es würde leicht sein, die Anzahl 36959 in diesem Satze auf einen kleineren Wert zu reduzieren; doch bietet diese Reduktion kein größeres Interesse.

---

*) A. a. O.

**) Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXIII, p. 91.)

***) Vergleiche hierzu auch die in den Comptes Rendus vom 30. Dezember 1907 erschienene Mitteilung von E. Maillet. (Zusatz bei der Korrektur.)

2. Bezüglich der Darstellung der positiven ganzen Zahlen durch eine Summe von n^{ten} Potenzen positiver ganzen Zahlen kann man leicht den folgenden Satz beweisen:

„Es gibt unendlich viele positive ganze Zahlen, die nicht als Summe von n oder weniger n^{ten} Potenzen darstellbar sind."

Mit anderen Worten: Bezeichnet $\psi(k)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = k \tag{4}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so ist für unendlich viele Zahlen k

$$\psi(k) = 0.$$

Bedeutet nämlich A die Anzahl derjenigen Systeme von n nicht negativen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche der Bedingung

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \leqq k \tag{5}$$

genügen, so ist nach bekannten Prinzipien*)

$$\operatorname*{Lim}_{k=\infty} \frac{A}{k} = \int\limits_{(n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n \text{**)}, \tag{6}$$

wo das n-fache Integral über das Gebiet

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0, \quad x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \leqq 1$$

auszudehnen ist. Anderseits ist

$$A = \psi(0) + \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(k). \tag{7}$$

Würde nun von einer gewissen Grenze, etwa von $k = N + 1$ ab, die Anzahl $\psi(k)$ stets größer als Null, also mindestens gleich 1 sein, so wäre für $k > N$

$$A \geqq \psi(0) + \psi(1) + \cdots + \psi(N) + k - N = k + C,$$

wo C von k unabhängig ist. Hieraus würde folgen

$$\frac{A}{k} \geqq 1 + \frac{C}{k}$$

und also durch Übergang zur Grenze $k = \infty$:

$$\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n \geqq 1. \tag{8}$$

Diese Ungleichung widerspricht aber der Tatsache, daß $\Gamma(x) < 1$ ist, wenn das Argument x zwischen 1 und 2 liegt. Demnach muß es, wie unser Satz behauptet, über jeder noch so großen Grenze N solche Zahlen k

---

*) Dirichlet, Werke, Bd. I, S. 418.

**) Ebenda, S. 389. Die Gleichung (6) betrachtet auch Mathews in der Note „On the representation of integers as sums of powers" (Messenger of Mathematics vol. 25 (1895) p. 69). Doch sind die Folgerungen, die Mathews aus der Gleichung (6) zieht, vollständig sinnlos.

geben, für die $\psi(k) = 0$ ist. Übrigens läßt sich dieser Satz, beiläufig bemerkt, auch ganz elementar, ohne Anwendung der Gleichung (6), durch eine direkte Abschätzung der Anzahl A beweisen. — Im Falle $n = 3$ ist unser Satz insofern trivial, als er schon aus der einfachen Tatsache*) folgt, daß die Summe dreier Kuben

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

durch 9 dividiert wohl die Reste 0, ± 1, ± 2, ± 3, niemals aber die Reste ± 4 lassen kann.

Ähnlich ist es im Falle $n = 4$, worauf mich Herr Landau gelegentlich aufmerksam machte. Jedes Biquadrat ist $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 16) und die Summe

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + \cdots + x_r^4$$

läßt daher durch 16 dividiert einen der Reste $0, 1, 2, \ldots r$. Solange $r < 15$ ist, gibt es also sicher unendlich viele Zahlen, die nicht als Summe von r Biquadraten darstellbar sind.

Die Gleichung (6) führt indessen, wenigstens im Falle $n = 3$, doch zu einem weiteren Resultat, nämlich zu folgendem Satze:

Unter den Zahlen, die durch 9 dividiert einen der Reste $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ lassen, gibt es unendlich viele, die nicht als Summe von drei Kuben darstellbar sind.

Wollte man das Gegenteil annehmen, so würde folgen, daß über eine gewisse Grenze hinaus $\frac{7}{9}$ aller Zahlen als Summe von drei Kuben darstellbar sind.

An Stelle der Ungleichung (8) würde sich nun ergeben

$$\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right]^3 \geqq \frac{7}{9} = 0{,}777\cdots,$$

eine Ungleichung, die nicht erfüllt ist, da man

$$\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right]^3 = 0{,}71\cdots$$

findet. Die Annahme, daß alle über einer gewissen Grenze liegenden Zahlen von einer der Formen $16m + r$ $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$ sich als Summe von vier Biquadraten darstellen lassen, würde dagegen nicht im Widerspruch mit der Gleichung (6) stehen, da die Ungleichung

$$\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right]^4 \geqq \frac{5}{16}$$

tatsächlich erfüllt ist.

Zürich, 20. November 1907.

*) Jacobi, Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Kuben. (Werke, Bd. 6, S. 326.)