Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.

Von **Gino Fano** in Rom.

1. Bekanntlich geben uns die allgemeinen binären Formen bis zum vierten Grade Beispiele von Formen mit einer gewissen (endlichen oder unendlichen) Gruppe linearer Transformationen in sich; sie sind aber nicht die einzigen Formen, die eine solche Gruppe gestatten. Anderseits ist es auch klar, dass eine binäre Form mit mehr als zwei verschiedenen Wurzelpunkten bloß eine endliche Anzahl linearer Transformationen gestatten kann; ihre Wurzeln können nämlich nur auf eine endliche Anzahl von Weisen unter einander vertauscht werden, und durch irgend eine Permutation derselben ist eine lineare (projective) Transformation der vorgelegten Form in sich selbst, insofern eine solche überhaupt existiert, eindeutig bestimmt. Sehen wir daher von denjenigen (ganz einfachen) Formen ab, die bloß eine oder zwei verschiedene Wurzeln besitzen, so werden wir *alle* binären Formen mit linearen Transformationen in sich erhalten, indem wir eine Anzahl Wurzelpunkte beliebig annehmen, und auf dieselben die Operationen *irgend einer endlichen Gruppe linearer Transformationen einer* (oder *zweier homogenen) Veränderlichen* anwenden. Besonderes Interesse werden diejenigen Formen besitzen, welche durch Anwendung der bez. Transformationen aus einem einzelnen Punkte entspringen; solche Formen werden eben eine endliche *transitive* Gruppe gestatten. Die übrigen Formen werden sich als Producte aus letzteren zusammensetzen lassen.

Offenbar müssen *alle rationalen Covarianten irgend einer gegebenen Form mit linearen Transformationen in sich durch dieselben Transformationen in sich übergehen, wie die Grundform.* [1])

Umgekehrt,[2]) sei eine endliche Gruppe G_n linearer Transformationen einer Veränderlichen (d. h. projectiver Transformationen eines einförmigen Gebildes) vorgelegt, und man bezeichne mit

[1]) Vgl. Klein: Math. Ann., Bd. IX, S. 191.

[2]) Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder* . . ., S. 116.

$\varphi_0(x) = x,\ \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ die n linearen Functionen der Variablen x, welche einer neuen Variablen x' gleich gesetzt, die einzelnen Operationen jener Gruppe darstellen. Es seien ferner a, b irgend zwei Größen, in der Art ausgewählt, dass keiner der Ausdrücke $\varphi(a)$ gleich b, oder, was dasselbe ist, keiner der Ausdrücke $\varphi(b)$ gleich a ist; anders ausgesprochen, dürfen die beiden Werte a, b durch keine Operation aus G_n in einander übergehen. Bilden wir uns dann die Gleichung n^{ten} Grades

$$\frac{\{\varphi_0(x)-a\}\{\varphi_1(x)-a\}\ldots\ldots\{\varphi_{n-1}(x)-a\}}{\{\varphi_0(x)-b\}\{\varphi_1(x)-b\}\ldots\ldots\{\varphi_{n-1}(x)-b\}} = z$$

unter z irgend einen veränderlichen Parameter verstanden, so geht dieselbe offenbar durch jede Operation der Gruppe G_n in sich selbst über. Substituieren wir nämlich statt x irgend eine Function $\varphi_i(x)$, so werden die verschiedenen Factoren, sowohl im Zähler als im Nenner (da die $\varphi_i(x)$ nach Voraussetzung eine Gruppe bilden) bloß unter einander vertauscht. Die durch jene Gleichung, für ein beliebiges z, dargestellte Gruppe von n Punkten wird daher bei jeder Operation aus G_n in sich transformiert. Und, den ∞^1 möglichen Werten von z entsprechend, erhalten wir die ∞^1 Punktgruppen einer Involution I_n^1 (d. h. in homogener Schreibweise, die ∞^1 binären Formen eines Büschels):

$$\Pi(x) + z\,\Pi_1(x) = 0, \tag{1}$$

wobei $\Pi = 0$ und $\Pi_1 = 0$, bezw. diejenigen (der Voraussetzung nach verschiedenen) Punktgruppen darstellen, welche aus den Werten a und b entspringen. Deuten wir die Variable $x = \frac{x_1}{x_2}$ als Coordinate in einem einförmigen Gebilde, so gehört jedes Element dieses Gebildes *einer* Gruppe der Involution (d. h. *einer* Form des Büschels (1)) an.

Einer jeden endlichen Gruppe G_n binärer linearer Transformationen entspricht daher ein Büschel von Formen n^{ten} Grades, deren jede durch alle Operationen jener Gruppe in sich übergeht.

Besonderen Werten von z entsprechend kann die Form $\Pi + z\Pi_1$ eine zweifache, ja allgemeiner auch eine ν-fache Wurzel besitzen. Dann müssen aber sämmtliche Wurzeln derselben Form zu je ν zusammenfallen; denn, lassen ν Operationen $\varphi_i(x)$ (die Identität inbegriffen) den Wert a in sich übergehen, so werden die Producte aus denselben ν und irgend einer anderen, falls eine solche vorhanden ist, a in einen und denselben Wert a' überführen; und weiter ebenso, falls noch andere Operationen existieren. Es muss folglich ν ein Theiler von n sein; und eine Form $\Pi + z\Pi_1$

mit einer (und daher lauter) ν-fachen Wurzeln wird die ν^{te} Potenz einer Form $\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\text{ten}}$ Grades sein.[1])

Jede weitere Punktgruppe, welche bei sämmtlichen Operationen von G_n in sich selbst übergeht, wird sich aus einer gewissen Anzahl Punktgruppen der Involution (1) zusammensetzen lassen und wird daher (eventuell mehrfach gezählt) durch Nullsetzen eines Productes aus Formen $\Pi + z\Pi_1$ darstellbar sein. Insbesondere wird auch jede Covariante einer Form des Büschels (1), oder auch der ν^{ten} Wurzel aus einer solchen Form, falls dieselbe mehrfache Wurzeln besitzt, nach Befreiung von gewissen die Variabeln nicht enthaltenden Factoren und eventueller Erhebung auf eine genügend große Potenz, sich als ein Product aus jenen Formen darstellen lassen; sie wird daher zugleich eine rationale ganze Function mit numerischen Coefficienten derjenigen (einfach gezählten) Formen desselben Büschels sein, welche gleich Null gesetzt, die mehrfach zählenden Punktgruppen der Involution I_n^1 darstellen. *Letztere Formen bilden daher das volle System der Covarianten in Bezug auf die Gruppe* G_n.[2])

2. Die Bestimmung der binären Formen mit linearen Transformationen in sich (und mindestens drei verschiedenen Wurzeln) ist nun auf diejenige der *endlichen Gruppen binärer linearer Transformationen* zurückgeführt. Und die Frage nach der vollständigen Bestimmung letzterer Gruppen ist um so wichtiger, insofern sie in den verschiedensten Gebieten der Mathematik auftritt; sie wurde daher bereits seit längerer Zeit und auf mehrere Weisen in Angriff genommen. Zuerst scheint das durch Herrn SCHWARZ geschehen zu sein; derselbe untersuchte nämlich in seiner Abhandlung: *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt* (Crelle's Journ., Bd. LXXV, 1873) gewisse algebraische Functionen (Quotienten zweier besonderer Zweige der hypergeometrischen Function, d. h. zweier Particularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung), deren verschiedene Zweige aus einander durch lineare Substitutionen hervorgehen. Dabei müssen diese Substitutionen offenbar eine Gruppe bilden, u. zwar da es sich um *algebraische* Functionen handelt, eine *endliche* Gruppe. Zugleich mit Herrn SCHWARZ, aber unabhängig von ihm, hat auch Herr KLEIN die Frage aufgenommen, indem er ganz besonders die (hier bereits geschilderten) Beziehungen derselben zur Theorie der binären Formen ins Auge fasste. (Vgl. Sitzungsber. der Erlanger phys.-med. Gesell., 1874; und Math. Ann., Bd. IX, S. 183—208;

---

[1]) Es ist nicht schwer einzusehen, dass, falls *jede* Form des Büschels (1) eine mehrfache Wurzel besitzen sollte, letztere allen Formen des Büschels *gemeinsam* sein muss; und das kann allerdings hier nicht vorkommen.

[2]) Vgl. KLEIN, Math. Ann., Bd. IX, S. 195—196.

1875—76.) Insbesondere ging Herr KLEIN in seiner Abhandlung: *Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (Math. Ann., Bd. IX) von der Interpretation der complexen Variablen $z = x + iy$ auf der Kugel aus; und indem er sich auf gewisse (theilweise bloß skizzierte) Betrachtungen aus der Nicht-Euklidischen Geometrie stützte, führte er die Bestimmung der endlichen Gruppen linearer Transformationen einer complexen Veränderlichen auf diejenige *der endlichen Gruppen von Rotationen des Euklidischen Raumes um einen festen Punkt* zurück. — Analytisch wurde die Frage einige Jahre später durch Herrn GORDAN behandelt (*Über endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen;* Math. Ann., Bd. XII, 1877). Und zuletzt haben noch mehrere Aufsätze, insbesondere der Herren JORDAN [1]), HALPHEN [2]) und FUCHS [3]), die große Wichtigkeit dieser Untersuchungen für die Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen hervortreten lassen, weil eben *einer jeden endlichen Gruppe homogener linearer Substitutionen von n Veränderlichen eine ganze Classe algebraisch integrierbarer linearer Differentialgleichungen* n^{ter} *Ordnung entspricht.* Es ist nun geradezu Herrn SCHWARZ's früherer Gesichtspunkt, der hier gewissermaßen verallgemeinert wieder auftritt.

Eine zusammenhängende Darstellung der ganzen Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, nebst den bez. Anwendungen auf algebraische und functionentheoretische Fragen, findet sich in Herrn KLEIN's *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom* 5^{ten} *Grade* (Leipzig, 1884). Dabei wird die Bestimmung der einzelnen Gruppen auf die Auflösung in ganzen positiven Zahlen einer gewissen Gleichung zwischen den bei Formen des im vorigen §. betrachteten Büschels auftretenden Multiplicitäten zurückgeführt. Und was ganz besonders (im zweiten Abschnitte) in den Vordergrund tritt, ist, wie der Titel selbst aussagt, der Zusammenhang dieser Untersuchungen mit der Theorie der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades, worüber die Herren BRIOSCHI, HERMITE, KRONECKER u. A. bereits wichtige Resultate zu Stande gebracht hatten. Unter jenen Gruppen linearer Substitutionen ist nämlich die sog. *Ikosaedergruppe* zu finden, welche, auf der Kugelfläche interpretiert, geradezu die 60 Bewegungen darstellt, die ein reguläres Ikosaeder mit sich selbst zur Deckung bringen; und dieselbe Gruppe ist auch zugleich mit derjenigen der 60 geraden Vertauschungen von *fünf* Elementen isomorph, d. h. mit der *Galois'schen Gruppe* der all-

---

[1]) *Mémoire sur les équations differentielles linéaires à intégrale algébrique* (Crelle's Journ., Bd. LXXXIV, 1878); *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* (Atti della R. Acc. di Napoli, 1880).

[2]) *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (Mém. Sav. Etrang., vol. XXVIII, 1880—83).

[3]) Gött. Nachr., Aug. 1875; weiter noch: *Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen* (Crelle's Journ., Bd. LXXXI, LXXXIV; 1875—78).

gemeinen Gleichung 5ten Grades nach Adjunction der Quadratwurzel aus der bez. Discriminante. [1])

3. Einen anderen, scheinbar auch leichten Weg, um die Bestimmung der endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen auf diejenige der endlichen Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt zurückzuführen (wie das auch bei Herrn KLEIN geschieht) finden wir in der Darstellung der ∞^3 projectiven Transformationen eines einförmigen Gebildes durch die Punkte des Raumes. [2]) Sehen wir als Bild irgend einer durch die Gleichung:

$$a x x' + b x + c x' + d = 0$$

definierten projectiven Umformung den durch die (projectiven, homogenen) Coordinaten a, b, c, d eindeutig bestimmten Raumpunkt an, und betrachten nun die (projective) Raumtransformation T, welche dem Bildpunkte irgend einer Projectivität P des einförmigen Gebildes denjenigen Punkt zuordnet, welcher das Bild der aus P selbst durch Transformation mit einer bestimmten Projectivität Q hervorgehenden Operation $Q^{-1}PQ$ ist. Lassen wir nun auch Q (im einförmigen Gebilde) sich ändern, so erhalten wir im Ganzen ∞^3 projective Raumtransformationen T, die ebenfalls eine Gruppe bilden. [3]) Bei dieser Gruppe gehen sämmtliche Flächen zweiten

---

[1]) Da die binären cubischen und biquadratischen Formen bereits Beispiele von Formen sind, die eine endliche Gruppe linearer Transformationen gestatten, so kann die Bestimmung der übrigen Formen, die ebenfalls eine endliche Gruppe solcher Transformationen zulassen, und daher diejenige dieser Gruppen selber, die natürliche Fortsetzung der gewöhnlichen Theorie der binären Formen bis zum 4ten Grade bilden, wie man dieselben in einer Vorlesung zu behandeln pflegt, namentlich dann, wenn in den vorangehenden Auseinandersetzungen der *geometrische* (daher auch der *projective*) Gesichtspunkt ganz besonders hervorgetreten ist. Das war aber geradezu in einer von mir während dieses Jahres an der hiesigen Universität gehaltenen Privatvorlesung der Fall. — Die Bestimmung der einzelnen projectiven Gruppen sollte nach Herrn KLEIN's Aufsatz in Ann., Bd. IX erfolgen; doch musste ich dabei einerseits auf einzelne Punkte näher eingehen, anderseits suchte ich die nicht euklidischen Betrachtungen des Verf. möglichst zu vermeiden, da die Studenten meistens die dazu nothwendige Vorbereitung nicht besitzen. Da dieser Gegenstand, soviel mir bekannt ist, von diesem Standpunkte aus aber bisher nicht behandelt worden ist, so will ich hier kurz mein Verfahren angeben. Hiebei werde ich selbstverständlich mich möglichst kurz fassen, wo ich nicht wesentlich Neues zu bieten vermag (§§ 10—12). Ich darf vielleicht noch hinzufügen, dass in einer mir von Herrn ENRIQUES zur Verfügung gestellten Ausarbeitung von Prof. BIANCHI's Vorlesung über Substitutionentheorie an der Normalschule der Universität Pisa die Frage, um die es sich hier handelt, analytisch vollständig untersucht wird; dabei treten allerdings noch geometrische Auseinandersetzungen hinzu, aber es wird noch kein vollständiger geometrischer Beweis gegeben.

[2]) Vgl. CAYLEY: *On the correspondence of homographies and rotations* (Math. Ann., Bd. XV); STÉPHANOS: *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace* ... (ibid., Bd. XXII).

[3]) Es ist das die sog. *kanonische Darstellung* der projectiven Geometrie eines einförmigen Gebildes (ENRIQUES: *Conferenze di Geometria* autogr. Vorl.; Bologna, 1895). Vgl. auch meine Abhandl.: *Sulle varieta algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè*, §. 5 (Mem. della R. Acc. di Torino, S. 2a, t. XLVI; 1896).

Grades eines gewissen Büschels in sich selbst über; darunter eine zweifach zählende Ebene ($b = c$, deren Punkte Bildpunkte der ∞^2 Involutionen sind) und eine Kegelfläche ($\{b + c\}^2 - 4\,ad = 0$, das Bild der parabolischen Transformationen). Lassen wir nun durch eine neue projective Raumtransformation [1]) jene Ebene zur unendlich fernen werden, und ihren Schnitt mit dieser Kegelfläche in den imaginären Kugelkreis übergehen, so entsteht aus dem bereits erhaltenen Büschel von Flächen 2^{ten} Grades ein Büschel concentrischer Kugeln; und die auszuführende Bestimmung endlicher Gruppen ist auf diejenige der ebenfalls endlichen projectiven Gruppen zurückgeführt, die eine jede Fläche 2^{ten} Grades, d. h. eine jede Kugel dieses Büschels zur Deckung bringen, und daher bloß aus Drehungen um den gemeinsamen Mittelpunkt bestehen. *Aber unter diesen Drehungen sind immer noch imaginäre Operationen vorhanden* (d. h. Drehungen um imaginäre Axen); wollen wir daher unsere Bestimmung wirklich durchführen und insbesondere zu den sogenannten *Gruppen der regulären Körper* gelangen, so müssen wir noch beweisen, dass die einzelnen Operationen einer endlichen Gruppe von Drehungen um jenen Mittelpunkt nicht *nothwendigerweise reell sind*, aber doch, durch Transformationen mit einer passenden Operation, *sämmtlich ins reelle Gebiet überführt werden können.* Und das scheint allerdings von vornherein nicht allzuleicht zu sein.

Wir ziehen es daher vor, wie es auch Herr Klein gethan hat, *die ganze Frage sofort ins reelle Gebiet zu übertragen*, d. h. für die ∞^3 Gruppe der linearen Transformationen einer complexen Veränderlichen sofort eine reelle Interpretation aufzusuchen. Um von allgemein Bekannten auszugehen, nehmen wir die Argand-Gauss'sche Darstellung der complexen Variablen $z = x + iy$ (d. h. der reellen und complexen Elemente eines einförmigen Gebildes) durch die reellen Punkte der Ebene.

4. Durch jede lineare Substitution $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe Coefficienten bedeuten, von denen bloß *drei* unabhängig sind (was etwa durch $= 1$-Setzung der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ zu erzielen ist), wird eine eindeutige (birationale) Transformation der reellen z-Ebene bestimmt. Sämmtliche Transformationen dieser Art bilden offenbar eine von *drei complexen*, daher auch von *sechs reellen Parametern* abhängige continuierliche Gruppe, die aber keineswegs aus lauter projectiven (ebenen) Transformationen besteht. Vielmehr lässt sich beweisen, dass bei diesen ∞^6 Operationen *Kreise* in ebensolche übergehen, wobei gerade Linien als specielle Kreise anzusehen sind (genauer ausgesprochen, das System der ∞^2 geraden Linien als ein besonderes System von Kreisen durch einen festen Punkt).

---

[1]) Die aber jedenfalls imaginär sein wird, falls wir im Raume von einem reellen Coordinatensystem ausgegangen sind.

Wir erinnern zu dem Zwecke an die Fundamentaleigenschaft der linearen Substitution, *Doppelverhältnisse* nicht zu ändern (wobei das Doppelverhältnis von vier complexen Größen durch die für reelle Größen aufgestellte Formel zu definieren ist). Wir zeigen nun, dass *das Doppelverhältnis von vier complexen Zahlen dann und nur dann reell ist, wenn die Bildpunkte dieser Zahlen auf einem und demselben Kreise* (speciell: *auf einer geraden Linie) liegen.* Es wird eben daraus folgen, dass bei unseren Transformationen Kreislinien geradezu in ebensolche (speciell auch in gerade Linien) übergehen: anders ausgesprochen, *dass sämmtliche* ∞^3 *Kreislinien der Ebene in Bezug auf unsere* ∞^6 *Gruppe einen sog. Körper bilden.*[1])

Betrachten wir in der That vier complexe Größen z_1, z_2, z_3, z_4 mit dem Doppelverhältnisse:

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Ein solches Doppelverhältnis wird dann und nur dann reell ausfallen, wenn sein Argument zum Verschwinden (oder mindestens zu einem ganzen Vielfachen von 2π) gebracht wird, d. h. wenn die beiden Größen: $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ und $\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$, von Vielfachen von 2π abgesehen, gleiche Argumente besitzen. Aber das Argument von $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ ist der Differenz zwischen denjenigen von $z_1 - z_3$ und $z_2 - z_3$ gleich, d. h. der Differenz der Winkel, welche die beiden Richtungen $\overline{z_3 z_1}$ und $\overline{z_3 z_2}$ bezw. mit der x-Axe bilden; es folgt also:

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \text{Wink.}\,(x, \overline{z_3 z_1}) - \text{Wink.}\,(x, \overline{z_3 z_2}) = \text{Wink.}\,(\overline{z_3 z_2}, \overline{z_3 z_1}),$$

d. h. gleich dem Winkel, unter welchem die Strecke $\overline{z_2 z_1}$ von z_3 aus gesehen wird. Das Gleiche gilt natürlich *mutatis mutandis* auch für den zweiten einfachen Bruch. Das Doppelverhältnis $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ wird daher eben dann reell sein, wenn die beiden Winkel $z_2 \widehat{z_3} z_1$ und $z_2 \widehat{z_4} z_1$, von ganzen Vielfachen von 2π abgesehen, der Größe und dem Sinne nach einander gleich sind, d. h. eben, wenn die vier Punkte auf einem und demselben Kreise liegen, oder speciell auf einer geraden Linie, falls die beiden Winkel selbst verschwinden.

5. Die Gruppe der linearen Substitutionen einer complexen Variablen bildet sich daher in der reellen Ebene als eine ∞^6 continuierliche Gruppe birationaler (quadratischer) Transformationen ab, welche die Punkte einer Kreislinie in ebensolche (speciell, in Punkte

[1]) Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Leipzig, 1872); §§. 5, 6.

einer geraden Linie) überführen. Derartige Transformationen nennt man nach Möbius[1]) *directe Kreisverwandtschaften*; sie haben, u. A., die merkwürdige Eigenschaft Winkelgrößen nicht zu ändern (d. h. *conforme* Transformationen zu sein,[2]) und zwar in der Weise, dass dabei nicht bloß die absolute Größe, sondern auch der Sinn eines jeden Winkels ungeändert bleibt (wie es auch aus dem Umstande hervorgeht, dass die bez. Transformationen eine *continuierliche Gruppe* bilden).

Ich darf aber noch darauf aufmerksam machen, dass neben diesen *directen Kreisverwandtschaften* noch andere (nicht minder wichtige) Transformationen vorhanden sind[3]), welche dieselben Eigenschaften besitzen, aber doch die Winkel *umlegen;* es sind das die sogenannten *inversen Kreisverwandtschaften.* Sie bilden eine zweite continuierliche ∞^6 Schar, welche keineswegs an und für sich eine Gruppe ist, aber doch zusammen mit ersterer (d. h. mit der Gruppe der directen Kreisverwandtschaften) eine solche (und zwar eine sog. *gemischte Gruppe*) bildet.[4]) Nach einem bekannten Satze von Herrn Lie[5]) werden daher sämmtliche inversen Kreisverwandtschaften aus den directen durch Multiplication mit einer beliebigen aus ihnen zu erhalten sein. Nun sind aber unter den *inversen* Kreisverwandtschaften die sog. *Transformationen durch reciproke Radien* (oder *Inversionen)* vorhanden, und unter Letzteren, falls der Inversionskreis sich auf eine gerade Linie reduciert, die *Spiegelungen* in Bezug auf die ∞^2 geraden Linien der Ebene. Die inversen Kreisverwandtschaften werden daher aus den directen durch Multiplication (rechts oder links) mit der Spiegelung an einer bestimmten geraden Linie hervorgehen. Nehmen wir nun Letztere als x-Axe (d. h. als Axe der reellen Zahlen), so führt die bez. Spiegelung auf diejenige analytische Transformation, bei welcher eine jede complexe Größe $z = x + iy$ durch die conjugierte $\bar{z} = x - iy$ zu ersetzen ist. Wir schließen also:

Die inversen Kreisverwandtschaften der Ebene sind als Bild derjenigen analytischen Transformationen einer complexen Variablen

---

[1]) Vgl. die Abh.: *Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren* (Leipz. Sitzungsber., Math.-Phys. Classe, Bd. 4, 1853); *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* (Leipz. Abh., Bd. 2, 1855; od. auch Ges. Werke, Bd. II.)

[2]) In der That ist die lineare Function $\alpha z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ein höchst einfaches Beispiel einer *Function einer complexen Veränderlichen* (in Riemann'schem Sinne).

[3]) Klein: *Vergleichende Betrachtungen* ..... (Vgl. insbes. die dem §. 6, beim Abdruck in Ann., Bd. XLIII, hinzugefügte Note.)

[4]) Dadurch sind aber sämmtliche birationale Transformationen der Ebene erschöpft, bei denen Kreislinien in ebensolche übergehen.

[5]) Vgl. *Theorie der Transformationsgruppen,* Bd. I, Cap. 18, S. 315—316.

$z = x + iy$ anzusehen, bei denen die neue Variable $z' = x' + iy'$ eine gebrochene lineare Function, nicht von z selbst, sondern der conjugierten Größe $\bar{z} = x - iy$ ist. [1])

6. Die aufgestellte Frage ist somit auf diejenige nach den *endlichen Gruppen directer Kreisverwandtschaften in der reellen Ebene* zurückgeführt. Wir haben daher das projective Gebiet verlassen, sind aber anderseits vollständig ins reelle getreten. Nun wollen wir auch, unbeschadet der Realität, ins projective Gebiet zurück.

Zu dem Zwecke greifen wir nach der bekannten *stereographischen Projection* der Kugel, d. h. nach der eindeutigen Correspondenz zwischen irgend einer Kugelfläche und unserer z-Ebene, welche durch Projection der Ersteren aus einem beliebigen ihrer Punkte, insbesondere aus einem Punkte des auf diese Ebene senkrecht stehenden Durchmessers herzustellen ist. Beschränken wir uns auf die Betrachtung *reeller* Punkte, so ergibt das Projectionscentrum O selbst die einzige Ausnahme in Bezug auf die Eindeutigkeit der Correspondenz, insofern demselben (falls die gebräuchlichen Grundlagen der projectiven Geometrie aufrecht zu halten sind) sämmtliche ∞^1 unendlich fernen Punkte der z-Ebene entsprechen. Übertragen wir nun unsere Abbildung der complexen Variablen $z = x + iy$ aus der bisherigen z-Ebene auf die derselben eindeutig entsprechende Kugelfläche, so erweist sich ja auch jene einzige Ausnahme als sehr zweckmäßig, insofern der *einzige* Punkt O als Bild des *einen* unendlich großen Wertes der Variablen z erscheint, welcher, vom projectiven Standtpunkte aus, mit jedem anderen Werte derselben gleichberechtig ist. [2]) [3])

Bekanntlich entsprechen, bei dieser stereographischen Projection der Kugelfläche, Punkten einer Kreislinie auf der z-Ebene ebensolche auf der Kugelfläche, und umgekehrt; speciell Punkten einer geraden Linie der z-Ebene Punkte eines Kreises durch das Projectionscentrum. *Auf der Kugelfläche* erhalten wir nun als Bild der sämmtlichen linearen Transformationen der Variablen z, *eine ∞^6 continuierliche Gruppe von Punkttransformationen, bei welchen Kreise in Kreise,* [4]) daher auch (immer *auf der bez. Kugel) Punkte*

[1]) Die Gruppe der Kreisverwandtschaften wird öfters als *Gruppe der reciproken Radien* bezeichnet. Ich darf aber darauf aufmerksam machen, dass die eigentlichen *Transformationen durch reciproke Radien* bloß ein ganz besonderer Fall von Transformationen dieser Gruppe (und zwar von *inversen* Kreisverwandtschaften) sind.

[2]) Von hier aus wird man dazu geführt, in der *Geometrie der reciproken Radien* der Ebene keineswegs noch ∞^1 unendlich weite Punkte (wie es in der projectiven Geometrie der Fall ist), vielmehr nur *einen einzigen unendlich fernen Punkt* zu ertheilen.

[3]) Ich brauche kaum daran zu erinnern, wie oft diese Darstellung der complexen Variablen auf der Kugelfläche (beispw. in der Functionentheorie) sich als höchst nützlich erwiesen hat.

[4]) Auf der Kugelfläche ist nun auch die in der ebenen Abbildung auftretende Ausnahme, wobei gerade Linien als specielle Kreise erschienen, bei Seite geschafft.

einer Ebene in ebensolche übergehen. Letztere ist aber, *insofern es sich um Transformationen des Gesammtraumes handelt,* eine charakteristische Eigenschaft der *projectiven* Transformationen; es entsteht daher die Frage, ob die von uns *auf der Kugelfläche* erhaltenen Punkttransformationen etwa nicht *auf den Gesammtraum auszudehnen sind,* und zwar in der Weise, dass *dadurch projective Transformationen desselben entstehen, welche die Kugelfläche in sich überführen;* anders ausgesprochen, ob jene Transformationen der Kugelfläche in projectiven, reellen, die Kugelfläche in sich selbst überführenden Transformationen des Gesammtraumes *enthalten* sind.[1]) — Und so ist es auch in der That. Betrachten wir nämlich irgend einen reellen Raumpunkt P, so sind auf unserer Kugelfläche unendlich viele reelle Punktepaare Aa, $Bb, \ldots$ vorhanden, deren jedes auf einer von P auslaufenden geraden Linie liegt,[2]) und die daher zu je zweien in einer (nicht aber sämmtlich in derselben) Ebene liegen. Bei einer beliebigen unserer ∞^6 Transformationen *der Kugelfläche* werden solche Punktepaare Aa, $Bb, \ldots$ in Andere $A'a'$, $B'b', \ldots$ übergeführt, die auch zu je zweien in einer Ebene liegen müssen; die geraden Linien $A'a'$, $B'b', \ldots$ werden sich daher zu je zweien treffen, und da sie nicht sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen, so werden sie alle durch einen und denselben Punkt hindurchgehen. Diesen Punkt P' wollen wir dem Punkte P zuordnen, entsprechend derjenigen Transformation $\begin{pmatrix} Aa \ldots \\ A'a' \ldots \end{pmatrix}$, die wir auf die Kugelfläche angewandt haben. *Sämmtliche ∞^6 Transformationen der Kugelfläche bestimmen in der Weise ebensoviele eindeutige (birationale) und sie selbst bezw. enthaltende Transformationen des Gesammtraumes.* Es bleibt nur noch übrig nachzusehen, ob die so aufgestellten Raumtransformationen wirklich auch projective Transformationen sind. Nun ist es vor Allem klar, dass Punkten einer geraden Linie oder einer Ebene, welche die Kugelfläche in reellen Punkten (allgemein zu reden also in einem Punktepaare, bezw. einer Kreislinie) treffen, ebenfalls Punkte einer solchen Geraden Linie, bezw. einer solchen Ebene entsprechen. Es folgt daraus, dass auch Punkten einer *beliebigen* geraden Linie ebenfalls Punkte einer geraden Linie entsprechen (da durch eine gerade Linie immer unendlich viele Ebenen hindurchgehen, welche die Kugelfläche längs reeller Kreislinien treffen); daher werden auch sich schneidenden geraden Linien ebensolche, und den Punkten und geraden Linien einer beliebigen Ebene, auch ebensolche entsprechen. Wir haben es nun in der That mit einer projectiven,

---

[1]) Die bez. Antwort, wenn auch bejahend, ist keineswegs unmittelbar, um so mehr, da wir einfach wissen, wie die *reellen Punkte* der Kugelfläche untereinander transformiert werden. — Übrigens hätte man auch direct beweisen können, dass bei Kreisverwandtschaften in der Ebene Kreisbüschel und Kreisbündel in ebensolche übergehen; das wollen wir aber nicht voraussetzen.

[2]) Liegt P auf der Kugelfläche, so sind etwa A, $B, \ldots$ als mit P selbst zusammenfallend anzusehen.

durch die gegebene Transformation der Kugelfläche eindeutig bestimmten Transformation des Gesammtraumes zu thun.

Im Ganzen, erhalten wir dadurch ∞^6 reelle, projective, unsere Kugelfläche in sich überführende Raumtransformationen, die offenbar auch eine continuierliche Gruppe bilden. Sind nämlich A, B irgend zwei Transformationen unserer Kugelfläche, deren Product $AB = C$ ist; sind ferner A', B', C' die (eindeutig bestimmten) entsprechenden Raumtransformationen, so muss auch $A'B' = C'$ sein; andernfalls würde $A'B'C'^{-1}$ eine projective nicht identische Raumtransformation sein, bei welcher jeder Punkt der Kugelfläche in sich selbst übergehen würde; was offenbar auszuschließen ist. — Und da eine jede (nicht ausgeartete) Fläche 2ter Ordnung, insbesondere auch jede Kugelfläche geradezu ∞^6 (reelle) projective Transformationen zulässt, so haben wir es mit der *größten continuierlichen Gruppe projectiver Transformationen unserer Kugelfläche* zu thun. Das wird aber noch keineswegs die Gruppe *aller* projectiven Transformationen dieser Kugelfläche sein, insofern es sich hier um eine jedenfalls *continuierliche* Gruppe handelt, wobei nothwendigerweise ein jedes der beiden Systeme von (auf der Kugelfläche imaginären!) Erzeugenden in sich selbst übergehen muss; während bei gewissen (anderen) projectiven Transformationen dieselben Systeme auch unter einander vertauscht werden. Das ist nämlich bei jeder nicht ausgearteten Fläche 2ten Grades für eine zweite ∞^6 continuierliche Schar von Operationen der Fall. Wir schließen daher:

Die Gruppe der linearen (projectiven) Transformationen einer complexen Veränderlichen bildet sich als die ∞^6 Gruppe der directen Kreisverwandtschaften der reellen Ebene ab, oder auch als die ∞^6 continuierliche Gruppe projectiver Raumtransformationen die eine Kugelfläche in sich überführen.

Anders ausgesprochen (Klein: *Vergleichende Betrachtungen* ...., §. 6):

Die Theorie der binären Formen complexer Variabeln findet ihre bildliche Darstellung durch die Geometrie der reciproken Radien (genauer ausgedrückt, *der directen Kreisverwandtschaften), oder auch durch die projective Geometrie der reellen Kugelfläche* (mit der Beschränkung, im letzteren Falle, auf die *Continuität* der bez. Gruppe).

Denjenigen projectiven Umformungen der Kugelfläche, welche die beiden Systeme imaginärer Erzeugenden unter einander vertauschen *(Transformationen 2ter Art)* entsprechen durch stereographische Projection auf die Ebene (wie leicht zu erkennen ist) die inversen Kreisverwandtschaften. Und den eigentlichen Transformationen durch reciproke Radien in der Ebene entsprechen auf der Kugelfläche die ∞^3 perspectivischen Collineationen, welche die Kugel in sich überführen, bei denen also das Collineationscentrum und die Collineationsebene einander bezw. als Pol und Polarebene in Bezug auf die Kugel entsprechen. Ist Letztere insbesondere eine

Durchmesserebene der Kugel, so haben wir es mit einer gewöhnlichen *Spiegelung* an dieser Ebene zu thun.

Unsere Frage ist nun jetzt darauf zurückgeführt, *sämmtliche endlichen Gruppen reeller projectiver Umformungen einer Kugelfläche* zu bestimmen, wobei ein jedes der beiden Systeme imaginärer Erzeugenden bei jeder Operation der Gruppe in sich selbst übergehen muss.[1])

7. Bei jeder linearen Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ bleiben *zwei* Werte von $z = x + iy$ ungeändert, die aber auch zusammenfallen können (es ist das der Fall der sog. *parabolischen Transformation*). Wir erhalten somit reelle projective Umformungen unserer Kugelfläche, bei deren jeder zwei reelle, etwa auch zusammenfallende Punkte derselben ungeändert bleiben; mit letzteren bleibt offenbar zugleich die bez. Verbindungslinie ungeändert, welche sich im Falle einer parabolischen Transformation auf eine *Tangente* an die Kugelfläche reduciert.[2]) Bekanntlich ist aber eine parabolische Transformation niemals *cyclisch* (d. h. sie kann sich nach einer endlichen Anzahl von Malen keineswegs reproducieren); es folgt also, dass in unseren endlichen Gruppen bloß solche Transformationen enthalten sein können, bei denen zwei *getrennte* reelle Punkte der Kugelfläche ungeändert bleiben.[3])

Bei einer solchen Umformung wird zugleich mit der geraden Linie a, welche die Kugelfläche in reellen getrennten Punkten trifft, auch ihre Polarreciproke in Bezug auf die Kugel in sich selbst übergehen; Letztere wird ganz außerhalb der Kugel liegen, und als Durchschnitt der beiden Tangentenebenen an die Kugelfläche in den bez. Durchschnittspunkten mit a herzustellen sein. Dadurch sind, allgemein zu reden, sämmtliche reellen sich selbst entsprechenden Elemente (d h. *Doppelelemente*) der Collineation (zwei Punkte, zwei gerade Linien und zwei Ebenen) erschöpft. Insbesondere enthält die gerade Linie b, allgemein zu reden, keinen

---

[1]) Bei jedem auf der Kugelfläche eventuell liegenden Doppelpunkte sind daher, im Büschel der bez. Tangenten, die die beiden imaginären Erzeugenden vertauschenden und jedenfalls *symmetrischen* Involutioneu auszuschließen.

[2]) Es ist nicht schwer einzusehen, dass bei einer parabolischen Transformation sogar sämmtliche Tangenten an die Kugelfläche, die den einzigen auf derselben liegenden Doppelpunkt enthalten, und sämmtliche Punkte einer aus diesen Tangenten in sich selbst übergehen müssen.

[3]) Dasselbe Resultat würden wir auch folgendenmaßen erschließen können: Bei jeder *reellen* projectiven Raumtransformation geht mindestens eine *reelle* Gerade in sich über. Denn eine solche ist durch jeden eventuell vorhandenen reellen Doppelpunkt zu finden; und falls reelle Doppelpunkte nicht existieren, so sind jedenfalls zwei conjugiert imaginäre zu finden, deren Verbindungslinie eine *reelle* Gerade sein wird. Mit dieser einen geht auch ihre Polarreciproke in Bezug auf die Kugel in sich über; und eine der beiden muss eben die Kugel in reellen (auch in sich selbst übergehenden) Punkten treffen. Und falls die beiden Durchschnittspunkte zusammenfallen sollten, würde die entsprechende Transformation jedenfalls nicht cyclisch, folglich für uns auszuschließen sein.

reellen Doppelpunkt; und ist auf derselben *ein* solcher Doppelpunkt vorhanden, so müssen *sämmtliche* auf ihr liegenden Punkte sich selbst entsprechen (d. h. auch *Doppelpunkte* sein). Es folgt das daraus, dass unsere Collineationen die auf b liegende elliptische Involution der in Bezug auf die Kugelfläche reciproken Punktepaare in sich überführen müssen (ohne die bez. imaginären Doppelpunkte zu vertauschen); daher müssen die Punkte von b selbst bei einer solchen Collineation, falls sie nicht sämmtlich Doppelpunkte sind, in einer ebenfalls *elliptischen* mit jener Involution vertauschbaren Projectivität einander entsprechen, wobei eben reelle Doppelpunkte nicht auftreten können.

Anderseits müssen aber, wie bereits gesagt, sämmtliche von uns zu betrachtenden Operationen cyclisch sein; und *für eine cyclische, die Kugelfläche in sich selbst überführende Collineation müssen sämmtliche Punkte der* (die Kugelfläche treffenden) *geraden Linie a* (daher auch *sämmtliche Ebenen durch b*) *sich selbst entsprechen.* Genauer gesprochen: *Bei jeder reellen cyclischen eine Kugelfläche in sich überführenden Collineation* (wobei die beiden Systeme imaginärer Erzeugenden *nicht* unter einander zu vertauschen sind) *müssen sämmtliche Punkte einer die Kugelfläche in reellen getrennten Punkten treffenden geraden Linie in sich selbst übergehen.*

In der That haben wir es auf der geraden Linie a mit einer *reellen, cyclischen,* und *reelle Doppelpunkte besitzenden* Projectivität zu thun. Und das ist bloß mit der Identität und der gewöhnlichen Involution der Fall (insofern der absoluten Invariante, als *reeller Einheitswurzel,* bloß die beiden Werte $+1$ und -1 zu ertheilen sind, wobei zugleich, was den Wert $+1$ angeht, der Fall einer parabolischen nicht indentischen Transformation auszuschließen ist). Bei einer Involution würden aber im Innern der Kugel liegende Punkte in außerhalb derselben liegende übergehen, und umgekehrt; und das darf auch bei einer *reellen* Collineation nicht vorkommen. Es bleibt also auf a selbst die Identität als einzige Möglichkeit übrig.

Derartige axiale Collineationen sind, in einem gewissermaßen allgemeinerem Sinne, als eine Art *Rotationen,* etwa als *projective Rotationen* anzusehen; sie reducieren sich ja auch auf eine gewöhnliche Drehung um die a-Axe, falls dieselbe den Kugelmittelpunkt enthält. Es sei uns daher gestattet, dieselben, der Kürze wegen, als *projective Rotationen* zu bezeichnen. (Darunter wollen wir also sämmtliche axialen, unsere Kugelfläche in sich selbst überführenden Collineationen verstehen, bei denen sämmtliche Punkte einer die Kugelfläche in reellen getrennten Punkten treffenden geraden Linie je sich selbst entsprechen.) Unsere *endlichen Gruppen* werden daher einfach aus *projectiven Rotationen* bestehen [1]). Insbesondere werden

[1]) Gründen wir im Raume auf unsere Kugel als Fundamentalfläche eine *projective Maassbestimmung,* wobei für die im Innern der Kugel liegenden Punkte eine „*Nicht-Euklidische*" und zwar eine „*Hyperbolische*" *Geometrie* gelten wird, so erscheinen die von uns zu betrachtenden Operationen einfach als die in dieser

zugleich auch sämmtliche Punkte der (außerhalb der Kugel liegenden) geraden Linie b Doppelpunkte sein *können*; wir bekommen dann eine *geschaart-involutorische Collineation* mit den beiden Geraden a und b als Leitstrahlen. (Vgl. Reye, *Geometrie der Lage*, 3. Aufl., 2. Abth., S. 77.)

Die sog. *cyclischen Gruppen* (die aus der Wiederholung einer und derselben Operation zu erzielen sind) werden bloß projective Rotationen um *eine* bestimmte Axe enthalten. Aber es sind auch andere Gruppen vorhanden, bei denen mehrere Rotationsaxen zugleich auftreten; und darüber wollen wir nun einige Sätze aufstellen.

8. Sollen zwei Rotationen um zwei verschiedene Axen in einer und derselben endlichen Gruppe enthalten sein, so muss zuvörderst ihr Product nothwendigerweise auch eine Rotation sein. Wir beweisen nun:

Sollen zwei projective Rotationen um zwei verschiedene Axen zusammen noch eine Rotation ergeben, so müssen sich ihre Axen schneiden. Wir bezeichnen mit R, bezw. R_1 die beiden Rotationen, mit a, bezw. a_1 die beiden (lauter Fixpunkte enthaltenden) Axen, mit b, bezw. b_1 die Polarreciproken dieser Axen. Ist das Product $R R_1$ noch eine Rotation, so müssen Punkte, insbesondere solche im Innern der Kugel existieren, die bei der Operation R irgend eine neue Lage annehmen, und durch R_1 auf die Anfangslage zurückkommen. Es sei nun A ein solcher *innerhalb der Kugel* liegender Punkt, welcher vermöge R die (von A verschiedene) Lage A' annimmt, und vermöge R_1 nach A selbst zurückkommt (d. h. bei R gehe A in A', bei R_1 aber A' in A über). Die beiden Punkte A und A' werden dann in einer und derselben Ebene, sowohl des Büschels b, als des Büschels b' liegen (insofern sämmtliche Ebenen dieser Büschel für R, bezw. R_1 Doppelebenen sind); d. h. die Gerade AA' wird sowohl b als b' schneiden. Nun bilden aber sämmtliche ∞^1 projective Rotationen um die a-Axe eine ∞^1 continuierliche Gruppe, bei welcher ein jeder Raumpunkt längs eines

neuen Geometrie auftretenden *Rotationen* um irgend eine *reelle Axe*. Und als „*Nicht-Euklidische*" *Rotationen* behandelt sie eben auch Herr Klein (in Ann., Bd. IX).

Mit den reellen projectiven Umformungen einer Kugelfläche (immer noch als Bild der linearen Transformationen einer complexen Veränderlichen betrachtet) hat sich Herr Klein weiterhin auch in seiner Autogr. Vorlesung über „*Nicht-Euklidische Geometrie*" (Sommersem. 1890, Bd. II, S. 177 u. ff.) beschäftigt. Sieht man von den parabolischen Transformationen ab, so werden die übrigen Transformationen — diejenigen also, die auf der Kugelfläche getrennte Punkte ungeändert lassen — je nach dem Werte der bez. absoluten Invariante, in *elliptische*, *hyperbolische* und *loxodromische* getheilt. Unsere *projective Rotationen* sind ein besonderer Fall *elliptischer Transformationen*, insofern die hier einer Einheitswurzel gleiche absolute Invariante eben *den Modul eins* hat. Hyperbolische Transformationen sind ebenfalls axiale Collineationen, also auch *Rotationen*, aber um eine *ideale* (d. h. *die Kugel nicht treffende) Axe.* Endlich sind die loxodromischen Transformationen die allgemeinsten, d. h. die *elicoidalen Nicht-Euklidischen Bewegungen.*

in einer Ebene durch b enthaltenen Kegelschnittes (ja sogar eines Kreises) fortschreitet; und in jeder einzelnen Ebene des Büschels b bilden solche Kegelschnitte (bezw. Kreise) einen die zweifach zählende Gerade b und das eventuell reellen Durchschnittskreis mit der festen Kugel enthaltenden Büschel. – Betrachten wir insbesondere den in der Ebene $b.AA'$ sich befindenden Kreisbüschel, so liegen offenbar die beiden Punkte A und A' (die vermöge R in einander übergehen) auf einem und demselben Kreise dieses Büschels. Nun wird aber dieser Kreisbüschel von irgend einer geraden Linie der nämlichen Ebene, etwa von AA' selbst, in Punktepaaren einer Involution getroffen, wobei der Durchschnitt mit b als Doppelpunkt der Letzteren auftritt; es ist daher dieser Punkt $b.AA'$ ein Doppelpunkt der durch das Paar AA' und durch die *reellen* Durchschnittspunkte der geraden Linie AA' mit der Kugel eindeutig bestimmte Involution. Das muss aber offenbar, aus denselben Gründen, zugleich auch mit dem Durchschnitte $AA'.b_1$ der Fall sein; und da diese beiden Doppelpunkte außerhalb der Kugel liegen, werden sie nothwendigerweise mit dem *einzigen* außerhalb der Kugel liegenden Doppelpunkte jener Involution zusammenfallen müssen; d. h. b und b_1, folglich auch a und a_1 werden sich treffen, w. z. b. w.

Wir haben doch stillschweigend vorausgesetzt, dass keine der beiden Geraden b und b' lauter Doppelpunkte der Operation R bezw. R_1 enthalte. Sollte das aber auch der Fall sein, und sich daher R z. B. auf die geschaart-involutorische Collineation mit den Leitstrahlen a und b reducieren, so würde die auf die Gerade AA' durch das (auch innerhalb der Kugel liegende) Punktepaar AA' und durch die (reellen) Durchschnittspunkte mit der Kugel bestimmte Involution immer noch im Durchschnitte $AA'.b$ einen (und eben den einzigen außerhalb der Kugel liegenden) Doppelpunkt besitzen; woraus eben dasselbe Endresultat zu folgern ist. — Ist nun aber das Product $R_2 = RR_1$ auch eine projective Rotation, so muss seine Axe a_2 den Punkt aa_1 enthalten, folglich auch die Polarreciproke b_2 in der Ebene bb_1 liegen. In der That folgt aus $R_2 = RR_1$ sofort $R_1 = R^{-1}R_2$; $R = R_2R_1^{-1}$, woraus eben zu ersehen ist, dass a_2 die beiden Geraden a und a_1 treffen muss; und sollte das in getrennten Punkten geschehen, so würden die bezw. in a, a_1, a_2 nicht enthaltenen Punkte a_1a_2, a_2a, aa_1 immer noch bei R bezw. R_1, R_2 in sich übergehen müssen, also auf b, bezw. b_1, b_2 liegen; d. h. die genannten drei Operationen würden sämmtlich involutorisch und zu je zweien vertauschbar sein. Und in diesem Falle sind die sechs Gerade a und b die Kanten eines in Bezug auf die Kugel sich selbst conjugierten Tetraeders, wobei eben die geraden Linien a sämmtlich die einzige innerhalb der Kugel liegende Ecke enthalten müssen.

Es bleibt aber noch die Frage übrig, ob das Product aus zwei projectiven Rotationen, deren Axen sich gegenseitig treffen, ja auch eigentlich eine Rotation ist. Offenbar ist das der Fall, wenn die beiden Axen sich innerhalb der Kugel schneiden; denn dieser Punkt wird auch bei dem bez. Producte in sich übergehen, und unsere projectiven Rotationen sind ja eben die einzigen reellen die Kugel in sich selbst überführenden Collineationen (1^{ter} Art), welche Doppelpunkte im Innern der Kugel besitzen. Treffen sich die beiden Axen auf der Kugel selbst, so kann man noch beweisen, dass das bez. Product (falls dasselbe keine parabolische Transformation ist)[1]) auch eine projective Rotation um eine denselben Punkt der Kugelfläche enthaltende Axe ist; das hat aber für uns keine besondere Wichtigkeit (vgl. ff. §). Fällt doch der Schnittpunkt $a a_1$ außerhalb der Kugel, so wird dieser Punkt für das Product $R R_1$ allerdings ein Doppelpunkt, das Product selbst daher eine axiale Collineation sein; aber die diesen Punkt enthaltende Axe würde immer noch außerhalb der Kugel liegen oder dieselbe einfach berühren können; und in dem Falle würde das Product selbst keine projective Rotation (in dem von uns bestimmten Sinne) sein.

9. Sollen nun zwei oder mehrere Rotationen mit verschiedener Axe zu einer endlichen Gruppe Anlass geben, so müssen sich diese Axen zu je zweien schneiden; aber voraussichtlich wird man auch, was die Lage solcher Schnittpunkte in Bezug auf die Kugel angeht, weitere Beschränkungen aufstellen können. Wir beweisen nun, zweitens:

Damit zwei projective Rotationen mit verschiedener Axe in einer und derselben endlichen Gruppe enthalten sein können, müssen sich ihre Axen **innerhalb der Kugel** *schneiden.*

Zu dem Zwecke, wollen wir zeigen, dass der Schnittpunkt der beiden Axen weder auf der Kugel, noch außerhalb derselben liegen kann. — Wir nehmen zuvörderst an, er liege auf der Kugelfläche, und bezeichnen immer noch durch R, R_1 die beiden Operationen, durch a und a_1 die bez. Axen. Offenbar sind die genannten Operationen *nicht* vertauschbar, folglich die beiden Producte $R R_1$ und $R_1 R$ von einander verschieden. Doch müssen R und R_1 selber im Büschel der die Kugelfläche im Punkte $a a_1 \equiv P$ berührenden geraden Linien mit einander vertauschbare Transformationen ergeben, weil beide die durch P gehenden imaginären Erzeugenden ungeändert lassen (anders ausgesprochen, sie müssen in diesem Büschel *gewöhnliche Rotationen* ergeben). Es folgt daraus, dass das Gesammtproduct $(R R_1)(R_1 R)^{-1}$ jedenfalls sämmtliche Tangenten an die Kugelfläche im Punkte P ungeändert lässt, aber

[1]) So würde es eben der Fall sein, wenn die beiden vorgelegten Operationen geradezu Involutionen (d. h. geschaart-involutorische Collineationen) sein sollten. Haben wir nämlich auf einer Punktreihe zwei Involutionen mit *einem* gemeinsamen Doppelpunkte, und werfen diesen einen ins Unendliche, so bekommen wir zwei *Spiegelungen*, deren Product eine *Translation*, also eine parabolische Transformation ist.

immer noch keine identische Transformation im Raume, und selbst in der die Kugelfläche in P berührenden Ebene (die Ebene jenes Büschels) ergibt. Ich behaupte nun, dass dieses Product eine *parabolische Transformation* ist; woraus sofort zu folgern sein wird, dass R und R_1 zu keiner endlichen Gruppe Anlass geben können.

In der That gestattet unsere Kugelfläche ∞^4 projective Transformationen, die den Punkt P, folglich auch die bez. Tangentenebene ungeändert lassen; darunter eben R und R_1. In dieser Ebene gehen zwei gewisse conjugiert imaginäre Gerade (die beiden Erzeugenden der Kugelfläche) bei sämmtlichen ∞^4 Transformationen in sich über; durch Umformung nach dem Dualitätsprincip können wir also sagen, wir haben es in dieser Ebene mit einer ∞^4 Gruppe projectiver Transformationen zu thun, bei welcher zwei (conjugiert imaginäre) Punkte in sich übergehen; etwa mit der Gruppe der *Ähnlichkeitstransformationen.*[1]) Dann sind die beiden Producte RR_1 und R_1R auch (directe) Ähnlichkeitstransformationen, und zwar solche, bei denen sämmtliche Strecken nach demselben Verhältnis geändert werden; folglich das Gesammtproduct $(RR_1)(R_1R)^{-1}$ eine *Bewegung*, und zwar eine solche, bei welcher sämmtliche unendlich weit liegenden Punkte in sich übergehen; also eine *Translation*. Und das ist eben eine parabolische (folglich nicht cyclische) Transformation.

Wir nehmen an, zweitens, der Schnittpunkt $aa_1 \equiv P$ liege außerhalb der Kugel. Dann wird die Polarebene von P die Kugel längs eines reellen Kreises treffen. Wir können auch annehmen, es sei a ein Durchmesser der Kugel (was immer durch projective Umformung zu erzielen ist); dann ist R eine Rotation in gewöhnlichem Sinne, um eine Winkelgröße $\frac{2k\pi}{n}$, falls R cyclisch n^{ter} Ordnung ist, und k, n relative Primzahlen sind; wir können ja auch sagen um einen Winkel $\frac{2\pi}{n}$, indem wir eventuell statt R eine passende Potenz dieser Operation einführen. — Wir betrachten nun zugleich die transformierte Operation $R' = R_1^{-1}RR_1$; dieselbe ist auch cyclisch n^{ter} Ordnung, und ihre Axe a' wird diejenige (von a und a_1 verschiedene, aber ebenfalls durch P gehende) gerade Linie sein, in welche a vermöge R_1 übergeht. Auf dem Durchschnittskreise der Kugel mit der Polarebene von P ergeben R und R' elliptische (d. h. reelle Doppelpunkte nicht besitzende) Projectivitäten, deren erstere einfach eine gewöhnliche Drehung um den Kreismittelpunkt ist. Dagegen besitzen zwei vermöge R' einander entsprechende Punkte dieses Kreises eine innerhalb eines gewissen Intervalles veränderliche Bogenentfernung. Innerhalb dieses Intervalles liegt mindestens ein ganzes Vielfaches von

[1]) Diese Dualitätsumformung ist keineswegs nothwendig; sie gestattet aber die Sache leichter einzusehen.

$\frac{2\pi}{n}$; denn wäre die genannte Bogenentfernung etwa immer größer als $\frac{2k\pi}{n}$ und kleiner als $\frac{2(k+1)\pi}{n}$, so würde dieselbe nach n-maliger Wiederholung von R′ für je zwei sich entsprechende Punkte zwischen den Grenzen $2k\pi$ und $2(k+1)\pi$ liegen, also R'^n unmöglich der Identität gleich sein, wie nach der Voraussetzung geschehen muss. — Fällt nun die Bogenlänge $\frac{2h\pi}{n}$ innerhalb des genannten Intervalles, so muss die (keineswegs identische!) Operation $R'R^{-h}$ mindestens einen auf dem betrachteten Kreise liegenden reellen Doppelpunkt Q besitzen (ja sogar zwei solche Doppelpunkte; diejenigen nämlich, deren Bogenentfernung von den vermöge R' ihnen entsprechenden Punkten geradezu $=\frac{2h\pi}{n}$ ist). Es hat daher das Product $R'R^{-h}$ mindestens zwei reelle Doppelpunkte P und Q, deren Verbindungslinie offenbar die Kugel in Q selbst berührt, während P außerhalb der Kugel liegt. Es kann also keineswegs $R'R^{-h}$ eine projective Rotation um eine durch P gehende Axe sein; denn eine solche Axe würde zugleich auch Q enthalten, und daher mit PQ zusammenfallen müssen. Anderseits aber muss das eben geschehen (d. h. $R'R^{-h}$ muss eine Rotation um eine P enthaltende Axe sein), falls R und R', also auch R und R_1 zu einer endlichen Gruppe Anlass geben; wir sind daher nochmals auf einen Widerspruch gekommen. Es muss also der Schnittpunkt aa_1 innerhalb der Kugel liegen.[1])

10. *Sollen daher mehrere projective Rotationen in einer und derselben endlichen Gruppe enthalten sein, so müssen sich ihre Axen zu je zweien im Innern der Kugel schneiden.*

Wir beweisen nun, drittens, dass (falls diese Axen in größerer Anzahl als *zwei* vorhanden sind) dieselben unmöglich alle in einer und derselben Ebene liegen können, und foglich nothwendigerweise *durch einen und denselben innerhalb der Kugel liegenden Punkt hindurchgehen werden.* — Nehmen wir an, sie liegen sämmtlich in einer (die Kugel längs eines reellen Kreises treffenden) Ebene π; es wird dann diese Ebene in Bezug auf die ganze Gruppe ungeändert bleiben und in derselben werden die einzelnen Operationen

[1]) Was die *Nicht-Euklidische* (und zwar immer die *hyperbolische) Geometrie* angeht, so dürfen wir nun schließen, dass in Letzterer das Product aus zwei Rotationen um zwei eigentliche und in einer Ebene liegende, aber sich nicht treffende und zugleich auch nicht parallele Axen möglicherweise auch eine Rotation um eine sog. *ideale* Axe sein kann; d. h. eine Operation für die sämmtliche Ebenen eines eigentlichen Büschels (statt Punkten einer eigentlichen geraden Linie Doppelelemente sind, wobei dann jeder Punkt in der ihn enthaltenden Ebene des Büschels längs einer *Linie gleicher Entfernung* von der gemeinsamen Axe fortschreiten wird.

dieser Gruppe reelle und perspectivisch-cyclische, folglich auch involutorische Collineationen ergeben. Es folgt daraus, dass sämmtliche Collineationen der Gruppe auch für den Gesammtraum involutorisch (und zwar geschaart-involutorisch) sein müssen; weiter aber noch, dass sie zu je zweien vertauschbar sind. Denn aus $R^2 = R_1^2 = (RR_1)^2 = 1$ (wobei aber $R \not\equiv R_1$) folgt eben $RR_1 = (RR_1)^{-1} = R_1^{-1}R^{-1} = R_1R$. Es muss daher auch jede einzelne Rotationsaxe bei jeder Operation der Gruppe in sich übergehen; und wir bekommen somit in der Ebene π perspectivische Collineationen, bei deren jeder die Collineationsaxe durch das Centrum jeder anderen geht; d. h. die Axen sind zu je zweien in Bezug auf den Durchnittskreis von π mit der Kugel reciprok. Anderseits müssen sie aber sämmtlich diesen Kreis in reellen Punkten treffen; und offenbar sind beide Bedingungen für mehr als zwei Axen zugleich nicht verträglich.

Wir schließen also: *Jede endliche Gruppe reeller projectiver Umformungen einer Kugelfläche* (wobei keine Operation der Gruppe die beiden Systeme imaginärer Erzeugenden unter einander vertauscht) *besteht aus sog. projectiven Rotationen entweder um eine einzige Axe, oder auch um mehrere Axen, die aber sämmtlich durch einen innerhalb der Kugel liegenden Punkt hindurchgehen.*

Diesen sämmtlichen Axen gemeinsamen Punkt können wir (und zwar auf ∞^3 verschiedene Weisen) durch eine weitere reelle Projectivität ins Centrum der Kugel verlegen; und da eine projective Transformation die eine Kugel nebst dem bez. Mittelpunkte in sich überführt, einfach eine gewöhnliche Rotation um diesen Mittelpunkt ist, so schließen wir ferner:

Die Bestimmung der endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen ist auf diejenige der ebenfalls endlichen Gruppen von Drehungen (des Euklidischen Raumes) um einen festen Punkt zurückgeführt.

Bereits vorher (vgl. §. 6) hatten wir dieselbe Bestimmung auf diejenige der reellen endlichen projectiven Gruppen zurück geführt, die eine Kugel in sich überführen (mit der bekannten Beschränkung bezüglich der beiden Systeme von Erzeugenden). Nun sehen wir weiter, dass letztere endliche Gruppen, *entweder selbst einfach aus Rotationen um den Kugelmittelpunkt bestehen, oder aber, innerhalb der allgemeinen ∞^6 reellen Gruppe, mit einer solchen gleichberechtigt sind* (vgl. §. 3).

Der aus sämmtlichen Drehungen um den Kugelmittelpunkt bestehenden ∞^3 Untergruppe (der ∞^6 Gesammtgruppe) kann man folgende lineare Transformationen zuordnen:

$$z' = \frac{(d+ic)z - (b-ia)}{(b+ia)z + (d-ic)}$$

unter a, b, c, d, reelle und der Gleichung:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

genügende Zahlen verstanden. Es ist das die sog. *Cayley'sche Formel* (Math. Ann., Bd. XV (1879); vgl. auch KLEIN: *Vorlesungen über das Ikosaeder* . . . . , S. 32). Es entspricht aber, was die Werte von a, b, c, d angeht, jeder Drehung der Kugel um den bez. Mittelpunkt noch eine doppelte Möglichkeit, insofern sämmtliche Größen a, b, c, d zugleich ihr Vorzeichen wechseln dürfen.

Allgemein zu reden, dürfen wir sagen, dass diesen besonderen Substitutionen der Variablen z *die* ∞^3 *Gruppe der reellen projectiven Umformungen der Kugelfläche* entspricht, *bei welcher ein im Innern der Kugel liegender Punkt in sich übergeht.* Lassen wir dagegen einen *außerhalb* der Kugel liegenden Punkt (daher auch irdend einen *reellen Kreis auf der Kugelfläche*) in sich übergehen, so haben wir es mit einer ganz verschiedenen ∞^3 Gruppe linearer Substitutionen der Variablen z zu thun, welche mit derjenigen der *reellen linearen Transformationen* gleichberechtigt ist.

11. Die Bestimmung sämmtlicher *endlichen Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt,* ja allgemeiner auch aller möglichen (endlichen und unendlichen) Gruppen von Bewegungen im Euklidischen Raume, findet sich in Herrn JORDAN's Abhandlung: *Mémoire sur les groupes de mouvements* (Annali di Mat., ser 2ª, vol. II, pp. 167—215; 322—345). Wir werden uns daher darauf beschränken dürfen, das was uns besonders interessiert, hier kurz anzugeben; für alles Übrige verweisen wir auf die gen. Abhandlung selbst (speciell auf §. 14, S. 173 u. ff.)

Wir nehmen zuvörderst an, wir haben es mit *Drehungen um eine einzige Axe* zu thun. Es folgt dann ohne Schwierigkeit, dass *sämmtliche Operationen der Gruppe durch Wiederholung einer und derselben Drehung zu erzielen sind; Letztere wird den kleinsten überhaupt möglichen Drehungswinkel besitzen, und dieser Winkel wird ein ganzer Theiler von* 2π *sein.* Für jede positive ganze Zahl n bekommen wir somit eine cyclische Gruppe C_n, die Herr KLEIN als *Kreistheilungsgruppe* bezeichnet hat. Auf der Kugel sind das die n Drehungen um einen Winkel $\frac{2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) und mit fester Axe; analytisch sind das auf die ganz einfache Form $z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} z$ zurückführbare Substitutionen.

Zweitens wollen wir annehmen, die Gruppe enthalte Drehungen um mindestens *zwei* verschiedene Axen. Dabei sind aber noch zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

a) Die eventuell vorhandenen nicht involutorischen Operationen (d. h. Drehungen um einen kleineren Winkel als π) besitzen sämmtlich eine und dieselbe Rotationsaxe;

b) Es sind in der Gruppe Drehungen um einen kleineren Winkel als π und um mindestens zwei verschiedene Axen vorhanden.

a) Dieser Fall führt uns zu der nach Herrn Klein sog. *Diedergruppe*. Dieselbe besteht aus $2n$ ($n \geqq 2$) Operationen, deren n eine *cyclische*, innerhalb der Gesammtgruppe *invariante* (oder auch *ausgezeichnete*) *Untergruppe* (und zwar eine Kreistheilungsgruppe) bilden; es sind das eben sämmtliche Drehungen um einen kleineren Winkel als π. Die übrigen n Operationen sind bloß *Umklappungen* um ebensoviele auf diejenige der cyclischen Untergruppe senkrecht stehende Axen, von denen je zwei aufeinander folgende einen Winkel $= \frac{\pi}{n}$ einschließen. Analytisch treten jetzt neben den n Transformationen des ersten Falles noch ebensoviele Involutionen hinzu, bei denen die Werte 0 und ∞ der Variablen unter einander vertauscht werden (etwa also $z' = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{z}$).

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass für $n = 2$ die Diedergruppe mit der sog. *Vierergruppe* zusammenfällt; und von projectivem Standpunkte aus, *diejenige Gruppe von vier linearen Transformationen eines einförmigen Gebildes ergibt, bei welcher ein System von vier Elementen in allgemeiner Lage, folglich auch* ∞^1 *derartige Systeme in sich übergehen.* Und ebenso bekommen wir, für $n = 3$, *die Gruppe der sechs linearen (projectiven) Transformationen, die irgend drei Elemente auf alle möglichen Weisen unter einander vertauschen*; für $n = 4$ *die Gruppe der acht Transformationen, die ein harmonisches Gebilde in sich überführen.* Lassen wir insbesondere bei $n = 3$ den gen. drei Elementen bezw. die Werte 0, 1, ∞ der Variablen z entsprechen, so besteht die Gruppe aus den sechs wohlbekannten Transformationen:

$$z' = z,\ \frac{1}{z},\ 1 - z,\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z-1}{z},\ \frac{z}{z-1}.$$

Wir dürfen auch sagen: *Das volle System der Diederformen fällt, bei* $n = 3$, *mit demjenigen einer allgemeinen binären cubischen Form* (d. h. einer Form mit nicht verschwindender Discriminante) *zusammen.* Für $n = 2$ hängt das System der Diederformen offenbar mit demjenigen einer *allgemeinen binären biquadratischen Form*, für $n = 4$ mit demjenigen einer *binären biquadratischen Form mit verschwindender cubischen Invariante* (j) auch eng zusammen; es treten aber dabei Formen auf, die bei Letzteren nur mehrfach gezählt vorkommen.

b) In diesem letzten Falle zeigt Herr Jordan, dass man noch zu drei weiteren Gruppen gelangt, deren jede einen gewissen in der betrachteten Kugel eingeschriebenen *regulären Körper* mit sich selbst zur Deckung bringt. Es sind das eben die sog. *Gruppen der regulären Körper*, speciell die sog. *Tetraedergruppe*, die *Oktaeder-*

gruppe (oder Gruppe des *Würfels* [1]) und die *Ikosaedergruppe* (oder auch Gruppe des *Pentagondodekaeders*). [2])

Die *Tetraedergruppe* besteht aus 12 Operationen; soll daher eine auf die Kugel abzubildende biquadratische Form die Ecken eines regulären Tetraeders (oder irgend eine mit dieser projectiv gleichberechtigte Punktgruppe) darstellen, so ist das nothwendigerweise eine *äquianharmonische* Form (und umgekehrt). *Die sog. Tetraederform ist also einfach eine biquadratische äquianharmonische Form* (d. h. eine biquadratische Form mit verschwindender quadratischen Invariante); das bez. volle System umfasst weiter noch (was die Covarianten angeht) eine zweite biquadratische und ebenfalls äquianharmonische Form, welche die Hesse'sche Covariante der ersten ist, und erstere zugleich zur eigenen Hesse'schen Covariante hat; dazu noch die bekannte Covariante 6^{ten} Grades, die geradezu eine *Oktaederform* ist. Stellt die erste biquadratische Form, gleich Null gesetzt, irgend ein reguläres Tetraeder dar, so wird durch die zweite das bez. *Gegentetraeder* dargestellt (d. h. dasjenige Tetraeder, dessen Ecken die den ersteren gegenüber liegenden Punkte sind.) *Die Gruppe der Tetraederdrehungen ist mit derjenigen der ebenfalls 12 geraden Vertauschungen von 4 Elementen holoedrisch isomorph.*

Die *Oktaedergruppe* besteht aus 24 Operationen, und ist mit der Gruppe aller möglichen Vertauschungen von 4 Elementen holoedrisch isomorph (sie permutiert ja gerade in der Weise die 4 Würfeldiagonalen). Sie enthält die Gruppe der Tetraederdrehungen als invariante Untergruppe; und es kommen noch die 12 Drehungen hinzu, welche Tetraeder und Gegentetraeder unter einander vertauschen. Das bez. volle System der Covarianten besteht hier auch aus drei Formen, der Oktaederform, welche die Covariante 6^{ten} Grades einer allgemeinen biquadratischen Form, folglich auch eines ganzen Büschels solcher Formen ist; und dazu noch zwei weitere Formen, 8^{ten} bezw. 12^{ten} Grades, welche aus dem Producte der beiden äquianharmonischen, bezw. der drei harmonischen biquadratischen Formen entstehen, die dem gen. Büschel angehören. Die Form 8^{ten} Grades ist die dem Oktaeder entsprechende Würfelform; diejenige 12^{ten} Grades stellt die 12 dem Oktaeder und

[1]) Bringt nämlich irgend eine Drehung um den Kugelmittelpunkt ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung, so ist das auch mit demjenigen (in derselben Kugel eingeschriebenen) Würfel der Fall, dessen Ecken den Mittelpunkten der Seitenflächen des Oktaeders entsprechen (und umgekehrt). Ebenso geschieht es beim Ikosaeder und Pentagondodekaeder; es sind eben die nämlichen Figuren zu je zweien polar.

[2]) Jede einzelne dieser Gruppe kann durch eine ihrer eigenen Ordnung gleiche Anzahl von *Operationen* 2^{ter} *Art* erweitert werden. (Vgl. Klein, Math. Ann., Bd. IX, S. 190; *Vorlesungen über das Ikosaeder* ....., S. 20.) Diese weiteren Operationen werden analytisch durch bilineare Gleichungen zwischen z' und dem mit z conjugierten Werte $\bar{z}$ dargestellt. — Herr Klein hat auch die Frage nach den diesen Gruppen entsprechenden *vollen Formensystemen* ausführlich behandelt.

Würfel gemeinsamen Kantenhalbierungspunkte dar. — Von projectivem Standpunkte aus, ist diese Gruppe dadurch charakterisiert, dass sie *das System von drei zu je zwei harmonischen Punktepaaren in sich selbst überführt.*

Endlich besteht die (von Herrn Klein in mehreren Aufsätzen ganz besonders untersuchte [1]) *Ikosaedergruppe* aus 60 Operationen; dieselbe ist mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 5 Elementen auch holoedrisch isomorph. Das volle System der Covarianten besteht hier ebenfalls aus drei Formen, resp. vom 12^{ten}, 20^{ten} und 30^{ten} Grade, die aber (wie auch in den vorigen Fällen) nach einer gewissen Gleichung (deren Grad in den Veränderlichen gleich der Ordnung der bez. Gruppe, hier also $= 60$ ist) genügen. Diese Gruppe ist von den übrigen nach mehreren Gesichtspunkten verschieden; insbesondere ist sie *einfach* (enthält also keine invariante Untergruppe). [2]) Es scheint auch nicht so leicht, dieselbe, von projectivem Standpunkte aus, in so einfacher Weise zu interpretieren.

12. Wir dürfen vielleicht noch das projectivisch ausgesprochene Hauptergebnis unserer Untersuchung in folgenden Worten zusammenfassen:

Die einzigen endlichen Gruppen projectiver Transformationen eines einförmigen Gebildes sind folgende:

1^0 *Gruppen G_n, die durch Wiederholung einer und derselben nicht parabolischen, vielmehr aber von der n^{ten} Ordnung cyclischen projectiven Transformation zu erzielen sind* (wobei n eine beliebige positive ganze Zahl sein mag);

2^0 *Gruppen G_{2n}, die aus den vorangehenden durch Erweiterung mit derselben Anzahl n ($\geqq 2$) von die beiden festen Doppelpunkte vertauschenden Involutionen entstehen.* Darunter befinden sich insbesondere:

für $n = 2$, *die Gruppe G_4 der projectiven Transformationen, die eine allgemeine Gruppe von vier Elementen in sich überführen;*

für $n = 3$, *die Gruppe G_6 der Transformationen, die irgend drei Elemente des Gebildes auf alle überhaupt möglichen Weisen unter einander vertauschen.* Dabei wird zugleich und in derselben Weise ein zweites Elemententripel in sich überführt; dasselbe besteht aus den harmonisch conjugierten Elementen je eines der drei ersteren in Bezug auf die beiden übrigen;

für $n = 4$, *die Gruppe G_8 der projectiven Transformationen, die irgend ein harmonisches Gebilde in sich überführen* (wobei zugleich auch ein zweites harmonisches Gebilde in sich übergeht);

---

[1]) Vgl. auch den Aufsatz: *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* (Math. Ann., Bd. XII).

[2]) Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder* ...., S. 18.

3⁰ *Die Gruppe* G_{12} *der projectiven Transformationen, die irgend ein* (und zugleich auch ein zweites) *äquianharmonisches Gebilde in sich überführen;*

4⁰ *Die Gruppe* G_{24} *der Transformationen, bei welchen ein System von drei zu je zwei sich harmonisch theilenden Punktepaaren ungeändert bleibt;*[1])

5⁰ *Eine Gruppe* G_{60} *projectiver Transformationen, die ein gewisses aus 12* (darunter höchstens 5 reellen) *Elementen bestehendes Gebilde in sich überführen.* Dabei gehen zugleich zwei weitere aus 20 bezw. 30 Elementen bestehende Gebilde je in sich selbst über.

---

[1]) Diese Gruppe enthält als *gleich berechtigte Untergruppen* drei *Diedergruppen* (2ter Fall) $n = 4$, die dadurch charakterisiert sind, dass je eines der drei harmonischen Paare ungeändert bleibt, während die beiden Anderen auch vertauscht werden dürfen. Als *invariante* (den drei jetzt genannten gemeinsame) *Untergruppe* enthält dieselbe eine Diedergruppe $n = 2$, bei welcher ein jedes der drei harmonischen Paare in sich übergeht.